









SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1890.

ERSTER HALBBAND. JANUAR BIS MAI.

STÜCK I—XXVII MIT VIER TAFELN.

BERLIN, 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

INHALT.

Inhalt.

VERZEICHNISS

DER

MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

AM 1. JANUAR 1890.

I. BESTÄNDIGE SECRETARE.

Hr. *du Bois-Reymond*, Secr. der phys.-math. Classe.
- *Curtius*, Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Mommsen*, Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Auwers*, Secr. der phys.-math. Classe.

II. ORDENTLICHE MITGLIEDER

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.	
Hr. *Emil du Bois-Reymond*		1851	März 5.
	Hr. *Heinrich Kiepert*	1853	Juli 25.
- *Heinrich Ernst Beyrich*		1853	Aug. 15.
- *Julius Wilhelm Ewald*		1853	Aug. 15.
- *Karl Friedr. Rammelsberg*		1855	Aug. 15.
- *Ernst Eduard Kummer*		1855	Dec. 10.
- *Karl Weierstraſs*		1856	Nov. 19.
	- *Albrecht Weber*	1857	Aug. 24.
	- *Theodor Mommsen*	1858	April 27.
	- *Adolf Kirchhoff*	1860	März 7.
- *Leopold Kronecker*		1861	Jan. 23.
	- *Ernst Curtius*	1862	März 3.
- *August Wilhelm von Hofmann*		1865	Mai 27.
- *Arthur Auwers*		1866	Aug. 18.
- *Justus Roth*		1867	April 22.
- *Nathanael Pringsheim*		1868	Aug. 17.
- *Hermann von Helmholtz*		1870	Juni 1.
	- *Eduard Zeller*	1872	Dec. 9.

Ordentliche Mitglieder

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.
Hr. *Werner von Siemens*		1873 Dec. 22.
- *Rudolph Virchow*		1873 Dec. 22.
	Hr. *Johannes Vahlen*	1874 Dec. 16.
	- *Eberhard Schrader*	1875 Juni 14.
	- *Heinrich von Sybel*	1875 Dec. 20.
	- *August Dillmann*	1877 März 28.
	- *Alexander Conze*	1877 April 23.
- *Simon Schwendener*		1879 Juli 13.
- *Hermann Munk*		1880 März 10.
	- *Adolf Tobler*	1881 Aug. 15.
	- *Wilhelm Wattenbach*	1881 Aug. 15.
	- *Hermann Diels*	1881 Aug. 15.
- *Hans Landolt*		1881 Aug. 15.
- *Wilhelm Waldeyer*		1884 Febr. 18.
	- *Alfred Pernice*	1884 April 9.
	- *Heinrich Brunner*	1884 April 9.
	- *Johannes Schmidt*	1884 April 9.
- *Lazarus Fuchs*		1884 April 9.
- *Franz Eilhard Schulze*		1884 Juni 21.
	- *Otto Hirschfeld*	1885 März 9.
- *Wilhelm von Bezold*		1886 April 5.
	- *Eduard Sachau*	1887 Jan. 24.
	- *Gustav Schmoller*	1887 Jan. 24.
	- *Wilhelm Dilthey*	1887 Jan. 24.
- *Karl Klein*		1887 April 6.
- *Karl August Möbius*		1888 April 30.
- *August Kundt*		1888 Mai 29.
	- *Ernst Dümmler*	1888 Dec. 19.
	- *Ulrich Koehler*	1888 Dec. 19.
	- *Karl Weinhold*	1889 Juli 25.
	- *Georg v. d. Gabelentz*	1889 Aug. 16.

(Die Adressen der Mitglieder s. S. IX.)

III. AUSWÄRTIGE MITGLIEDER

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.
	Sir *Henry Rawlinson* in London	1850 Mai 18.
Hr. *Franz Neumann* in Königsberg		1858 Aug. 18.
- *Robert Wilhelm Bunsen* in Heidelberg		1862 März 3.
	Hr. *Franz* Ritter *v. Miklosich* in Wien	1862 März 24.
- *Wilhelm Weber* in Göttingen		1863 Juli 11.
- *Hermann Kopp* in Heidelberg		1874 Mai 13.
	- *Giovanni Battista de Rossi* in Rom	1875 Juli 9.
Sir *Richard Owen* in London		1878 Dec. 2.
- *George Biddell Airy* in Greenwich		1879 Febr. 8.
Hr. *Charles Hermite* in Paris		1881 Jan. 2.
- *August Kekulé* in Bonn		1885 März 2.
	- *Otto von Boehtlingk* in Leipzig	1885 Nov. 30.
	- *Rudolf von Roth* in Tübingen	1889 Mai 15.

IV. EHREN-MITGLIEDER.

	Datum der Königlichen Bestätigung.	
Hr. *Peter von Tschichatschef* in Florenz	1853	Aug. 22.
- Graf *Helmuth von Moltke* in Berlin	1860	Juni 2.
Don *Baldassare Boncompagni* in Rom	1862	Juli 21.
Hr. *Georg Hanssen* in Göttingen	1862	März 3.
S. M. Dom *Pedro,* Kaiser von Brasilien	1882	Oct. 18.
Earl *of Crawford and Balcarres* in Dunecht, Aberdeen .	1883	Juli 30.
Don *Carlos Ibañez* in Madrid	1887	April 1.
Hr. *Max Lehmann* in Marburg	1887	Jan. 24.
- *Ludwig Boltzmann* in Graz	1888	Juni 29.

V. CORRESPONDIRENDE MITGLIEDER.

Physikalisch-mathematische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Adolf von Baeyer* in München	1884	Jan. 17.
- *C. H. D. Buys-Ballot* in Utrecht	1887	Nov. 3.
- *Friedrich Beilstein* in Petersburg	1888	Dec. 6.
- *Eugenio Beltrami* in Pavia	1881	Jan. 6.
- *Eduard van Beneden* in Lüttich	1887	Nov. 3.
- *P. J. van Beneden* in Löwen	1855	Juli 26.
- *Enrico Betti* in Pisa	1881	Jan. 6.
- *Francesco Brioschi* in Mailand	1881	Jan. 6.
- *Ole Jacob Broch* in Christiania	1876	Febr. 3.
- *Ernst von Brücke* in Wien	1854	April 27.
- *Hermann Burmeister* in Buenos Aires	1874	April 16.
- *Auguste Cahours* in Paris	1867	Dec. 19.
- *Alphonse de Candolle* in Genf	1874	April 16.
- *Stanislao Cannizzaro* in Rom	1888	Dec. 6.
- *Felice Casorati* in Pavia	1886	Juli 15.
- *Arthur Cayley* in Cambridge	1866	Juli 26.
- *Elvin Bruno Christoffel* in Strassburg	1868	April 2.
- *Ferdinand Cohn* in Breslau	1889	Dec. 19.
- *Luigi Cremona* in Rom	1886	Juli 15.
- *James Dana* in New Haven, Connecticut	1855	Juli 26.
- *Richard Dedekind* in Braunschweig	1880	März 11.
- *Louis-Hippolyte Fizeau* in Paris	1863	Aug. 6.
- *Edward Frankland* in London	1856	Nov. 8.
- *Remigius Fresenius* in Wiesbaden	1888	Dec. 6.
- *Carl Gegenbaur* in Heidelberg	1884	Jan. 17.
- *Archibald Geikie* in London	1889	Febr. 21.
- *Wolcott Gibbs* in Cambridge, Massachusetts	1885	Jan. 29.
- *Benjamin Apthorp Gould* in Cambridge, Massachusetts	1883	Juni 7.
- *Julius Hann* in Wien	1889	Febr. 21.
- *Franz von Hauer* in Wien	1881	März 3.
- *Rudolf Heidenhain* in Breslau	1884	Jan. 17.
- *Heinrich Hertz* in Bonn	1889	März 7.
- *Johann Friedrich Hittorf* in Münster	1884	Juli 31.
Sir *Joseph Dalton Hooker* in Kew	1854	Juni 1.
Hr. *Thomas Huxley* in London	1865	Aug. 3.
- *Joseph Hyrtl* in Wien	1857	Jan. 15.
- *Albert von Kölliker* in Würzburg	1873	April 3.
- *Friedrich Kohlrausch* in Strassburg	1884	Juli 31.

Physikalisch-mathematische Classe.

		Datum der Wahl.	
Hr.	*Nicolai von Kokscharow* in St. Petersburg	1887	Oct. 20.
-	*Adalbert Krueger* in Kiel	1887	Febr. 10.
-	*Rudolph Leuckart* in Leipzig	1887	Jan. 20.
-	*Franz von Leydig* in Würzburg	1887	Jan. 20.
-	*Rudolph Lipschitz* in Bonn	1872	April 18.
-	*Sven Ludvig Lovén* in Stockholm	1875	Juli 8.
-	*Karl Ludwig* in Leipzig	1864	Oct. 27.
-	*Charles Marignac* in Genf	1865	März 30.
-	*Lothar Meyer* in Tübingen	1888	Dec. 6.
-	*Karl von Nägeli* in München	1874	April 16.
-	*Simon Newcomb* in Washington	1883	Juni 7.
-	*Wilhelm Pfeffer* in Leipzig	1889	Dec. 19.
-	*Eduard Pflüger* in Bonn	1873	April 3.
-	*Georg Quincke* in Heidelberg	1879	März 13.
-	*Friedrich von Recklinghausen* in Strassburg	1885	Febr. 26.
-	*Ferdinand von Richthofen* in Berlin	1881	März 3.
-	*Ferdinand Römer* in Breslau	1869	Juni 3.
-	*Heinrich Rosenbusch* in Heidelberg	1887	Oct. 20.
-	*George Salmon* in Dublin	1873	Juni 12.
-	*Arcangelo Scacchi* in Neapel	1872	April 18.
-	*Ernst Christian Julius Schering* in Göttingen . . .	1875	Juli 8.
-	*Giovanni Virginio Schiaparelli* in Mailand	1879	Oct. 23.
-	*Ludwig Schläfli* in Bern	1873	Juni 12.
-	*Eduard Schönfeld* in Bonn	1887	Febr. 10.
-	*Heinrich Schröter* in Breslau	1881	Jan. 6.
-	*Philipp Ludwig von Seidel* in München	1863	Juli 16.
-	*Japetus Steenstrup* in Kopenhagen	1859	Juli 11.
-	*George Gabriel Stokes* in Cambridge	1859	April 7.
-	*Eduard Strasburger* in Bonn	1889	Dec. 19.
-	*Otto von Struve* in Pulkowa	1868	April 2.
-	*James Joseph Sylvester* in London	1866	Juli 26.
Sir	*William Thomson* in Glasgow	1871	Juli 13.
Hr.	*August Töpler* in Dresden	1879	März 13.
-	*Moritz Traube* in Breslau	1886	Juli 29.
-	*Pafnutij Tschebyschew* in St. Petersburg	1871	Juli 13.
-	*Gustav Tschermak* in Wien	1881	März 3.
-	*Gustav Wiedemann* in Leipzig	1879	März 13.
-	*Heinrich Wild* in St. Petersburg	1881	Jan. 6.
-	*Alexander William Williamson* in High Pitfold, Haslemere	1875	Nov. 18.
-	*August Winnecke* in Strassburg	1879	Oct. 23.
-	*Adolf Wüllner* in Aachen	1889	März 7.
-	*Ferdinand Zirkel* in Leipzig	1887	Oct. 20.

Philosophisch-historische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Wilhelm Christian Ahlwardt* in Greifswald	1888	Febr. 2.
- *Graziadio Isaia Ascoli* in Mailand	1887	März 10.
- *Theodor Aufrecht* in Heidelberg	1864	Febr. 11.
- *George Bancroft* in Washington	1845	Febr. 27.
- *Heinrich Brugsch* in Berlin	1873	Febr. 13.
- *Heinrich von Brunn* in München	1866	Juli 26.
- *Franz Bücheler* in Bonn	1882	Juni 15.
- *Georg Bühler* in Wien	1878	April 11.
- *Ingram Bywater* in Oxford	1887	Nov. 17.
- *Giuseppe Canale* in Genua	1862	März 13.
- *Antonio Maria Ceriani* in Mailand	1869	Nov. 4.
- *Alexander Cunningham* in London	1875	Juni 17.
- *Léopold Delisle* in Paris	1867	April 11.
- *Wilhelm Dittenberger* in Halle	1882	Juni 15.
- *Giuseppe Fiorelli* in Rom	1865	Jan. 12.
- *Kuno Fischer* in Heidelberg	1885	Jan. 29.
- *Paul Foucart* in Athen	1884	Juli 24.
- *Karl Immanuel Gerhardt* in Eisleben	1861	Jan. 31.
- *Konrad Gislason* in Kopenhagen	1854	März 2.
- Graf *Giambattista Carlo Giuliari* in Verona	1867	April 11.
- *Aureliano Fernandez Guerra y Orbe* in Madrid	1861	Mai 30.
- *Friedrich Wilhelm Karl Hegel* in Erlangen	1876	April 6.
- *Emil Heitz* in Strassburg	1871	Juli 20.
- *Hans von der Holst* in Freiburg i. B.	1889	Juli 25.
- *Théophile Homolle* in Paris	1887	Nov. 17.
- *Paul Hunfalvy* in Pesth	1873	Febr. 13.
- *Friedrich Imhoof-Blumer* in Winterthur	1879	Juni 19.
- *Vatroslav Jagić* in Wien	1880	Dec. 16.
- *Rudolf von Jhering* in Göttingen	1889	Juli 25.
- *Panagiotis Kabbadias* in Athen	1887	Nov. 17.
- *Heinrich Keil* in Halle	1882	Juni 15.
- *Franz Kielhorn* in Göttingen	1880	Dec. 16.
- *Sigismund Wilhelm Koelle* in London	1855	Mai 10.
- *Stephanos Kumanudes* in Athen	1870	Nov. 3.
- *Konrad Leemans* in Leiden	1844	Mai 9.
- *Giacomo Lumbroso* in Rom	1874	Nov. 3.
- *Konrad Maurer* in München	1889	Juli 25.
- *Adolf Michaelis* in Strassburg	1888	Juni 21.
- *Giulio Minervini* in Neapel	1852	Juni 17.
- *Ludvig Müller* in Kopenhagen	1866	Juli 26.
- *Max Müller* in Oxford	1865	Jan. 12.
- *August Nauck* in St. Petersburg	1861	Mai 30.
- *Charles Newton* in London	1861	Jan. 31.

Philosophisch-historische Classe.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Theodor Nöldeke* in Strassburg	1878	Febr. 14.
- *Julius Oppert* in Paris	1862	März 13.
- *Gaston Paris* in Paris	1882	April 20.
- *Georges Perrot* in Paris	1884	Juli 24.
- *Wilhelm Pertsch* in Gotha	1888	Febr. 2.
- *Rizo Rangabé* in Athen	1851	April 10.
- *Félix Ravaisson* in Paris	1847	Juni 10.
- *Ernest Renan* in Paris	1859	Juni 30.
- *Georg Rosen* in Detmold	1858	März 25.
- *Eugène de Rozière* in Paris	1864	Febr. 11.
- *Hermann Sauppe* in Göttingen	1861	Jan. 31.
- *Theodor Sickel* in Wien	1876	April 6.
- *Christoph Sigwart* in Tübingen	1885	Jan. 29.
- *Friedrich Spiegel* in Erlangen	1862	März 13.
- *Aloys Sprenger* in Heidelberg	1858	März 25.
- *William Stubbs* in Chester	1882	März 30.
- *Théodore Hersant de la Villemarqué* in Paris . . .	1851	April 10.
- *Louis Vivien de Saint-Martin* in Paris	1867	April 11.
- *Matthias de Vries* in Leiden	1861	Jan. 31.
- *William Waddington* in Paris	1866	Febr. 15.
- *William Dwight Whitney* in New Haven	1873	Febr. 13.
- *Friedrich Wieseler* in Göttingen	1879	Febr. 27.
- *Ferdinand Wüstenfeld* in Göttingen	1879	Febr. 27.
- *K. E. Zachariae von Lingenthal* in Grosskmehlen .	1866	Juli 26.
- *Karl Zangemeister* in Heidelberg	1887	Febr. 10.

WOHNUNGEN DER ORDENTLICHEN MITGLIEDER.

Hr. Dr. *Auwers,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Lindenstr. 91. SW.
- - *Beyrich,* Prof., Geh. Bergrath, Französischestr. 29. W.
- - *von Bezold,* Professor, Lützowstr. 72. W.
- - *E. du Bois-Reymond,* Prof., Geh. Medic.-Rath, Neue Wilhelmstr. 15. NW.
- - *Brunner,* Prof., Geh. Justiz-Rath, Lutherstr. 36. W.
- - *Conze,* Professor, Charlottenburg, Fasanenstr. 3.
- - *Curtius,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Matthäikirchstr. 4. W.
- - *Diels,* Professor, Magdeburgerstr. 20. W.
- - *Dillmann,* Professor, Schillstr. 11a. W.
- - *Dilthey,* Professor, Burggrafenstr. 4. W.
- - *Dümmler,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Königin Augustastr. 53. W.
- - *Ewald,* Matthäikirchstr. 28. W.
- - *Fuchs,* Professor, Kronprinzen-Ufer 24. NW.
- - *von der Gabelentz,* Professor, Kleiststr. 18. 19.
- - *von Helmholtz,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Charlottenburg, Physikalisch-technischen Reichsanstalt, Marchstr.
- - *Hirschfeld,* Professor, Charlottenburg, Hardenbergstr. 8.
- - *von Hofmann,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Dorotheenstr. 10. NW.
- - *Kiepert,* Professor, Lindenstr. 11. SW.
- - *Kirchhoff,* Professor, Matthäikirchstr. 23. W.
- - *Klein,* Prof., Geh. Bergrath, Am Karlsbad 2. W.
- - *Koehler,* Professor, Königin Augustastr. 42. W.
- - *Kronecker,* Professor, Bellevuestr. 13. W.
- - *Kummer,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Schönebergerstr. 10. SW.
- - *Kundt,* Professor, Neue Wilhelmstr. 16. NW.
- - *Landolt,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Königgrätzerstr. 123b. W.
- - *Möbius,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Alexander-Ufer 2. NW.
- - *Mommsen,* Professor, Charlottenburg, Marchstr. 6.
- - *H. Munk,* Professor, Matthäikirchstr. 4. W.
- - *Pernice,* Prof., Geh. Justiz-Rath, Genthinerstr. 13. W.
- - *Pringsheim,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Königin-Augustastr. 49. W.
- - *Rammelsberg,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Schönebergerstr. 10. SW.
- - *Roth,* Professor, Matthäikirchstr. 23. W.
- - *Sachau,* Professor, Wormserstr. 12. W.
- - *Schmidt,* Professor, Lützower Ufer 24. W.
- - *Schmoller,* Professor, Wormserstr. 13. W.
- - *Schrader,* Professor, Kronprinzen-Ufer 20. NW.
- - *Schulze,* Prof., Geh. Regierungs-Rath, Invalidenstr. 43. NW.
- - *Schwendener,* Professor, Matthäikirchstr. 28. W.

Hr. Dr. *von Siemens*, Geh. Regierungs-Rath, Markgrafenstr. 94. SW., Charlottenburg, Berlinerstr. 36.
- - *von Sybel*, Prof., Wirkl. Geh. Ober-Reg. Rath, Hohenzollernstr. 6. W.
- - *Tobler*, Professor, Schillstr. 11. W.
- - *Vahlen*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Genthinerstr. 22. W.
- - *Virchow*, Prof., Geh. Medicinal-Rath, Schellingstr. 10. W.
- - *Waldeyer*, Prof., Geh. Medicinal-Rath, Lutherstr. 35. W.
- - *Wattenbach*, Professor, Geh. Regierungs-Rath, Corneliusstr. 5. W.
- - *Weber*, Professor, Ritterstr. 56. S.
- - *Weierstrafs*, Prof., Friedrich-Wilhelmstr. 14. W.
- - *Weinhold*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Hohenzollernstr. 10. W.
- - *Zeller*, Prof., Geh. Regierungs-Rath, Magdeburgerstr. 4. W.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1890.
I.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

9. Januar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Dillmann las: Bemerkungen zur Grammatik des Geez und zur alten Geschichte Abessiniens.

Die Mittheilung folgt umstehend.



Bemerkungen zur Grammatik des Geez und zur alten Geschichte Abessiniens.

Von A. Dillmann.

1.

In meiner Grammatik der äthiopischen Sprache vom Jahre 1857 S. 60 bis 62 habe ich den Satz aufgestellt und zu beweisen gesucht, dass im Geez die Grundform der Nomina (im Unterschied vom status constructus und vom Accusativ) einst auf einen kurzen Vocal, etwa ein flüchtiges *ĕ* ausgelautet habe, dieser Auslaut aber mit der Zeit fallen gelassen worden sei, wodurch bei manchen Wörtern, z. B. denen der einfachsten Bildung wie ገብር፡, ግብር፡, eine neue Silbengruppirung entstehen musste, so dass man dann *géber* für ursprüngliches *gébre* sprach. Dieser Satz schien Hrn. Trumpp in seiner Arbeit »über den Accent im Äthiopischen« in ZDMG. XXVIII S. 532 der Begründung zu entbehren: die Sprache habe wenigstens keine Spur davon bewahrt. Dagegen hat E. König in »Neue Studien über Schrift, Aussprache und allgemeine Formenlehre des Äthiopischen« 1877 S. 76. 95 f. meinen Satz gebilligt, aber meine Beweise dafür zum Theil angefochten. Wenn ich jetzt auf denselben zurückkomme, so muss ich vor allem daran erinnern, dass man vor 33 Jahren zum Analogiebeweis aus andern Sprachen nur das Arabische zur Verfügung hatte. Man konnte damals noch immer den vocalischen Auslaut der arabischen Nomina als etwas specifisch arabisches ansetzen. Seither aber sind die assyrischen und sabäischen Sprachdenkmale für die Wissenschaft erschlossen, und da auch diese beiden, der Zeit nach dem Schriftarabischen vorausgehenden Sprachen dieselbe Erscheinung des vocalischen Nominalauslautes zeigen, so ist der Analogiebeweis kaum mehr anfechtbar. Aber selbst wenn man diesen zulässt, wäre ja immer noch möglich, die Analogie im Geez auf die vorhistorische Zeit zu beschränken. Mir handelt es sich jedoch um die Frage, ob die vocalische Auslautung der Nomina auch noch in der Zeit, aus der die ältesten Literaturüberreste des Geez stammen, lebendig gewesen sei, und diese zu entscheiden reicht der Analogieschluss nicht aus. Ebenso wenig lässt

sich der Beweis daraus führen[1], dass bei Anhängung der Pronomina suffixa an die Grundform des Nomen sich ein Zwischenlaut *é* (nach der jetzigen Aussprache) hören lässt. Denn dass dieses *é* nicht ein Bindelaut (d. h. der Rest einer den st. c. bezeichnenden Sylbe), wie das *î* der pluralischen Nomina mit Suffixen, sondern eben das die Nomina ursprünglich auslautende *é* sei, ist doch nur eine Theorie, wenn auch ohne Zweifel richtige Theorie, nicht aber eine Thatsache: auch das Hebräische, obwohl es längst den vocalischen Auslaut der Nomina verloren hat, hält doch diesen Rest vor Suffixen fest. Auch der weitere, von König[2] geltend gemachte Grund, dass die contrahirten Formen der einfachsten Bildung, wie ደቅ፡, nur zu einer Zeit entstanden sein können, da noch ein Vocal am Ende gehört wurde (also nicht aus *dáqeq*, sondern nur aus *dáqq*ᵉ), ist zwar an sich richtig, führt aber nicht weiter, als in die vorhistorische Zeit der Bildung dieser Wörter.

Dagegen in die Literaturzeit der Sprache reichen folgende Erscheinungen hinein, die ich in meiner Grammatik als Beweisgründe aufgestellt habe und an denen ich festhalte.

1. Formen wie በድው፡, ሥርው፡, welche nach Trumpp S. 532 heutzutage von den Abessiniern *bád-u*, *sér-u* gesprochen werden, können zur Zeit des Lebens der Sprache nicht so gesprochen worden sein, weil in den älteren Handschriften niemals dafür በዴ፡, ሥሬ፡ geschrieben wird; ebenso wenig aber kann *badé-u*, *seré-u* gesprochen worden sein, weil daraus nie das heutige *bád-u*, *sér-u* werden konnte[3], sondern nur *bádv*ᵉ, *sérv*ᵉ, woraus nach dem Stummwerden des Auslauts *bád-u*, *sér-u* von selbst entstand. Ganz klar tritt dies auch in der Schrift zu Tage, wenn das Wort für Bruder bald እኁው፡, bald እኁ፡ geschrieben wird. Mag jenes heute *eḫé-u*, dieses *éḫ-u* gesprochen werden, ursprünglich müssen beide Schreibweisen dasselbe besagt haben, und das kann nur die Aussprache *éḫv*ᵉ gewesen sein. Dasselbe erhellt von anderer Seite, wenn Nomina einfacher Bildung von hintenvocaligen und mittelhauchlautigen Stämmen hinter dem ersten Radical den Vocal *a* haben, also ሣሕው፡ Ausdehnung, ራእይ፡ Gesicht. Die Dehnung des *a* vor dem Guttural ist bekanntlich erst im Laufe der Literaturperiode eingetreten. Wären solche Wörter von Anfang an, wie jetzt[4], also *sāḥ-éu*, *rá-ʾéi* gesprochen worden, so wäre die Dehnung des *a* unerklärbar; erklärbar wird sie nur, wenn der zweite Radical die erste Sylbe schloss, also *sáḥ-v*ᵉ, *ráʾ-j*ᵉ gelautet wurde. Das gleiche

[1] König S. 76.
[2] S. 76. 95 f.
[3] König S. 76.
[4] Trumpp S. 533.

gilt auch von andern Nomina mittelhauchlautiger Stämme, wie ረሒብ: Weite, ሠሒቅ: Spott, welche erst in historischer Zeit aus *ráḥ-b*ᵉ, *śáḥ-q*ᵉ, unmöglich aber aus *ráḥeb*, *śáḥeq* entstanden sind.

2. In den auf einen *u*-haltigen Kehllaut ausgehenden Nomina wie ኈልቍ:, ጽጕ:, ስርጕ:, ጕሕቍ:, die nie (Mss. der letzten Jahrhunderte beweisen nichts mehr) ኈልቀ: oder ኈልቊ:, ጽግ: oder ጽጉ:. ስርግ: oder ስርጉ: (wie das Fremdwort ሐቍ: auch als ሐቊ: vorkommt) geschrieben werden, liegt der vocalische Auslaut noch vollkommen zu Tag. Wie König[1] das bestreiten mag, ist mir unverständlich. Denn man mag über die Entstehung der *u*-haltigen Kehllaute denken, wie man will[2], so viel ist aus der constanten Schreibung jener Wörter klar, dass sie weder auf *u*, noch consonantisch ausgelautet haben.

3. Das Fragewörtchen ኑ:, an ein auf ን: auslautendes Nomen angehängt, wird nie mit diesem zusammen geschrieben, wohl aber mit dem ን: eines auf ን: auslautenden Verbums, also wohl ተማስኑ: wirst du verderben? aber ይሄንኑ: ist er wohl? (nie ይሄኑ:[3]). Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass beim Nomen ein Zwischenlaut die beiden *n* trennt, und die heutige Aussprache *dăḫen-nú*[4] nicht die ursprüngliche gewesen sein kann.

Zu diesen Beweisen vermittelst Rückschlusses aus der Orthographie der Literaturzeit glaube ich nun auch einen äusseren Beweis hinzufügen zu können. Kosmas in seiner Topographia Christiana lib. XI[5] beschreibt das Rhinoceros und sagt: Καλοῦσι δὲ αὐτὸ οἱ Αἰθίοπες τῇ ἰδίᾳ διαλέκτῳ Ἄρου ἢ Ἄρισι, δασύνοντες τὸ δεύτερον ἄλφα καὶ οὕτω προστιθέντες τὸ ῥισί. ἵνα διὰ τοῦ μὲν Ἄρου ᾗ τὸ θηρίον, διὰ δὲ τοῦ Ἄρισι ἀροτριᾷν ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ περὶ τοὺς ῥώθωνας, ἅμα δὲ καὶ τοῦ δέρματος, τὴν ἐπωνυμίαν αὐτῷ τεθεικότες. Schon Salt[6] hat richtig Ἄρου ἢ und Ἄρου ᾗ der Herausgeber in Αρουη verbessert, so dass Ἀρουὴ Ἅρισι genau dem አርዌ:ሐሪስ (Jjob 39,9) entspricht. Genannt wäre es so (nach Kosmas) als Thier des Pflügens, denn አርዌ: bedeutet Thier, und ሐሪስ: ist Infinitiv von ሐረሰ: pflügen. Kosmas sagt nämlich, das Thier habe eine Haut, die getrocknet fünf Finger dick sei; aus ihr machen manche, statt aus Eisen, Pflugschaaren, und pflügen damit. Man kann diese Etymologie dahin gestellt sein lassen, jedenfalls zeigt sich Kosmas hier, wie auch sonst oft genug, sehr gut unterrichtet. Als Beweis davon will ich hier gelegentlich z. B. anführen, dass er[7], indem er

---

[1] S. 76.

[2] Die von König S. 41 ff. darüber vorgetragene Theorie ist wenig befriedigend.

[3] Grammatik S. 298.

[4] Trumpp 559.

[5] Bei Migne Bd. LXXXVIII Sp. 441; bei Montfaucon coll. nov. Patrum II p. 334.

[6] Voyage to Abyssinia, Lond. 1814 S. 417.

[7] Bei Migne Sp. 100 (vergl. 108).

das Land Sasu als das südlichste von Äthiopien aus beschreibt, berichtet, der König von Axum schicke alljährlich dorthin den Statthalter der Agau mit einer Karawane, um (auf eine von ihm beschriebene, sehr primitive Weise) gegen Ochsen, Salz und Eisen Goldklümpchen in der Gestalt kleiner Bohnen, Τάγχαρα genannt, einzutauschen. Jetzt wissen wir[1], dass das Gallawort *adanguar* (Tigre አደንጕለት፡, Tigriña አደንጕራ፡) Bohne bedeutet. Wenn nun (um zurückzukommen) Kosmas ሐሪስ፡, nach jetziger Aussprache *ḥaris*, vielmehr Ἀρισι schreibt, so muss er einen auslautenden Vocal *i* gehört haben, denn an ein auf *i* auslautendes Adjectiv (das ሐሪሲ፡ lauten müsste) ist natürlich nicht zu denken. Darnach liess man also noch um's Jahr 540 sogar in solchen Fällen, wo dem letzten Radical ein langer Vocal vorhergeht und somit der letzte Radical ganz gut ohne vocalischen Nachlaut aussprechbar war, dennoch einen solchen hören; um so mehr wird, so schliesse ich, das der Fall gewesen sein bei denjenigen Arten von Nomina, von denen oben gehandelt wurde. Auf eine andere, ähnliche Angabe bei Kosmas[2], welche lautet Τὸ μικρὸν ζῶόν ἐστιν ὁ μόσχος. καλοῦσι δὲ αὐτὸ οἱ ἐγχώριοι κασтоῦρι lege ich kein Gewicht, weil ich diesen Namen als Geez-Wort nicht nachweisen kann. Denn wahrscheinlich ist doch mit jenem Thier die Viverra Civetta gemeint: diese nannten die Geez አንጽሳ፡ (አንበሳ፡)[3]; bei den Amharern heisst sie ጥርኝ፡; bei den Kafa[4] *yárō*, bei den Afar[5] *dumṓ dabắd* (d. h. دمّة زباد), und κασтоῦρι scheint vielmehr ein von den Einheimischen aus dem Munde der griechischen Kaufleute aufgenommenes Wort zu sein, sei es κάστωρ (so dass die Endung *i* der nominale Auslaut des Geez wäre), sei es καστόριον Bibergeil, in welchem Fall das *i* keine Beweiskraft hat. Aber schon *aruê ḥarisi* genügt zum Beweis, dass zu Lebzeiten der Geez-Sprache die Grundform des Nomen auf einen Vocal auslautete, welcher aber im Munde derer, die Kosmas hörte, mehr *i* als *e* klang. Damit combinire ich die merkwürdige Erscheinung im Tigriña[6], dass gerade die Nomina der Form ገብር፡ und ግብር፡ dort in ihrer isolirten Form auf *ī* ausklingen[7], wie ወርቂ፡, ምድሪ፡, ሕዝቢ፡, selbst ወዲ፡, ሊዉሲ፡, ebenso die auf eine mit weiblichem *t* ausgehende Consonantengruppe schliessenden Geez-Wörter, wie ብርሃት፡, ህዝቅት፡, ተምህርት፡.

[1] S. Reinisch Wörterbuch der Bilin-Sprache, Wien 1887. S. 15.

[2] Migne Sp. 444 (Montf. S. 335).

[3] Ludolf hist. Aeth. I. 10, 75.

[4] Reinisch die Kafa-Sprache 1888, II. S. 101.

[5] Reinisch die Afar-Sprache 1885, II. S. 47.

[6] Praetorius Grammatik der Tigriñasprache 1871, S. 168 ff.

[7] vergl. Salt S. 276 f., der sagt, dass ጸዐዳ፡ባሕር፡ in Tigré-language *tsadâ bahri* gesprochen werde.

መቅሠፋት፡, ቈልበት፡, ኦሀሀሞት፡, dort በርኝቲ፡, ሀዘቂ፡, ትምህርቲ፡, መቅሠፋቲ፡, ቈልበቲ፡, ኦሀሀሞቲ፡ gesprochen werden, also mit einem nachlautenden mehr oder weniger gedehnten *i*. Ganz ähnliches findet sich im Harari[1]. Wenn aber Praetorius meint, dieses *ī* sei nichts anderes, als der Bindelaut *i*, welcher im Geez besonders am Ende der pluralischen Nomina vor den Pronomina suffixa auftritt, und dieses Binde-*i* sei aus euphonischen Gründen auch für die isolirte Form der Nomina beibehalten worden, so kann ich diese Erklärung der Sache nicht richtig finden. Beibehaltung jenes Bindelautes für die isolirte Form, und vollends eines pluralischen Bindelautes für isolirte Singularformen wäre, genau genommen, ein sprachlicher Widersinn; und ist um so weniger zuzugeben, als gerade diese selben Nomina, im Tigriña, wenn ihnen Suffixe angehängt werden, statt jenes angeblichen Bindelautes *i* vielmehr ein *ĕ* annehmen, z. B. ነፍሲ፡ wird mit Suff. der 1 p. Plur. ነፍስና፡ *náfsenà*, ፈተውቲ፡ mit Suff. der 2. p. Sing. m. ፈተውትኻ፡ *fatáutecha*[2]. Sodann wenn man auch zur Noth sagen könnte, dass Nomina, die nach der späteren Aussprache des Geez auf eine Doppelconsonanz ausklingen (wie በርኝት፡, ኦሀሀሞት፡, መቅሠፋት፡), weiterhin in Tigriña der Euphonie halber einen vocalischen Auslaut annehmen, so wird man doch zugeben müssen, dass bei Formen wie ገበር፡, ግበር፡, wenn sie schon ursprünglich, wie jetzt von den Abessiniern, *gáber*, *géber* gesprochen worden wären, die Annahme eines solchen vocalischen Auslauts ganz unbegründet gewesen wäre. Mit anderen Worten, Tigriña-Aussprachen, wie *ʾégrī* Fuss, *ḥézbī* Volk sind sicher nicht Neugestaltungen aus Geez *éger*, *ḥézeb*, sondern sind dasselbe, was ursprüngliches Geez *égrᵉ*, *ḥezbᵉ*, nur dass man in Tigriña den Vocal mehr *i* als *e* lauten liess, (wie schon die Gewährsmänner des Kosmas), und ihn etwas gedehnter sprach. So hat auch Schreiber[3] dieses *i* ganz richtig als dialektische Verlängerung eines ursprünglichen Vocals sechster Classe (in welchem bekanntlich die kurzen *i*, *e*, *o* oder *u* zusammengefallen sind) aufgefasst. Dieses *i* musste in Tigriña darum um so constanter werden, als das alte *ă* des Status constructus, welches im Geez immer erhalten blieb, im Tigriña zu einem Vocal der sechsten Classe wurde, z. B. ደቂ፡ Kinder, aber ደቅ፡ዓዲ፡ Kinder des Dorfs[4]. Demgemäss finde ich auch noch in Tigriña einen Beweis dafür, das bei den Geez der vocalische Auslaut, wenigstens gewisser Classen von Nomina, noch lange lebendig blieb. Weiterhin ergibt sich dann daraus auch, dass die jetzige Betonung der Geez-

[1] Praetorius in ZDMG. XXIII. 463 f.

[2] J. Schreiber Manuel de la langue Tigraï. (Vienne 1887). § 22.

[3] §. 64.

[4] Schreiber § 53.

Wörter (wie sie Trumpp beschrieben hat) sich keineswegs durchaus mit der ursprünglichen deckt. Auch an andern Anzeichen dafür fehlt es nicht. Doch soll darauf hier nicht eingegangen werden.

2.

In Sachen der abessinischen Münzkunde haben sich in den letzten zehn Jahren, seit ich in der Abhandlung »über die Anfänge des axumitischen Reichs« vom Jahr 1878[1] S. 210 ff. darüber berichtet habe, mehrere Gelehrte vernehmen lassen, nämlich Mordtmann in der Wiener numismatischen Zeitschrift 1880, E. Drouin in der Revue archéologique 1882 Bd. 44, Prideaux im Numismatic Chronicle 1884, Schlumberger in der Revue numismatique 1886, A. von Sallet in der Berliner Zeitschrift für Numismatik 1887 S. 15 ff. Man ist seither nicht viel, aber doch etwas weiter gekommen, theils insofern die wenigen schon früher bekannten Münzen mit neuen Exemplaren belegt wurden (z. B. Ulsebas, Aphilas und namentlich viele mit der Legende BAC + CIN + BAX + ACA im Avers, aber mit dreifach verschiedenen Legenden des Reverses), theils eine neue höchst merkwürdige Münze in dreifacher Vertretung hinzugekommen ist. Es ist dies eine Kaleb-Münze mit griechischer Legende. Auf dem ersten Exemplar derselben in Gold, welches der französische Akademiker Mr. Schefer von Mr. Maurice Ries in Aden erhielt, liest Schlumberger als Umschrift der Vorderseite um die mit der Königskrone versehene Büste XAΛHB BACIΛЄYC (nebst zwei unleserlichen Buchstaben), auf der Rückseite um die mit der Haube versehene Büste ꟷΙΛ YIOC ΘЄ.ζ.ЄNA. Ein zweites Exemplar dieser Münze gelang Hrn. Schlumberger in einem, auch aus Aden stammenden, von Prideaux S. 217 f. beschriebenen, aber unrichtig gelesenen Stück zu entdecken, mit den Buchstaben XAIHB BACIΛЄY.., und auf dem Revers XA IOC ΘIЄZЄMA, indem er das XA dieses zweiten und das ꟷΙΛ des ersten Exemplars als Abkürzungen von Χαλη̂β nimmt. Zu diesen zwei Exemplaren kommt nun ein drittes, noch nicht publicirtes, welches E. Glaser von seiner dritten Reise nach Arabien mitgebracht und an das hiesige Münzcabinet verkauft hat, ziemlich abgenützt, im Gewicht von 1.4^{g}. Die Legende ist ganz deutlich XAΛHB BAↃIΛ∃IYC +, rückseitig YIOC ΘЭZAΜΛ + +. Von diesem berühmten König Axums, dem Zeitgenossen der Kaiser Justin und Justinian, dem Bezwinger des jüdischen Dhu Nuwâs in Jemen, kannte man den Namen Kaleb bis jetzt blos aus der abessinischen Überlieferung: in den auswärtigen Nachrichten heisst er Ἑλλεσβααιος, Ἑλε-

[1] Abh. der K. Akad. der Wiss. zu Berlin 1878.

σβααs (d. h. ኤለ፡ አጽብሐ፡ oder ኤለ፡ አጽበሐ፡). Der Zweifel, den ich 1880[1] aussprach, ob Ελεσβααs als König wirklich auch den Namen Kaleb geführt habe, muss damit als beseitigt gelten. Im übrigen ist dieser Fund von Wichtigkeit einmal deshalb, weil (wie schon Hr. Schlumberger bemerkt hat) durch diese Münze die Angabe der traditionellen Königsliste, dass Kalebs Vater und Vorgänger *Tazênâ* (ታዜና፡. ΘΕΖΕΝΑ) war, in überraschender Weise bestätigt wird, sodann deshalb, weil auch auf die bisher völlig dunkle Bedeutung der behaubten Büste auf dem Revers einiges Licht geworfen wird. Da die Umschrift des Reverses dieselbe Person betrifft, wie die des Averses, d. h. den König von Axum, so ist jeder Anlass, auf das Bild eines sabäischen Unterkönigs oder Statthalters zu rathen, beseitigt. Auch den Vater Θεζενα (was Schlumberger als eine ihm selbst unwahrscheinliche Vermuthung hingestellt hat) wird die Büste des Reverses nicht darstellen, da ja dieser Vater auch König, also mit der Krone zu versehen war, sondern entweder einen höchsten Civilbeamten, oder (wie Hr. von Sallet S. 16 vermuthet) die Königin, was die Züge erlauben. Jedenfalls aber entzieht diese Wahrnehmung den von A. von Gutschmid[2] versuchten und von Nöldeke[3] angenommenen Deutungen einiger abessinischer Münzen, über welche hier noch ein paar Worte zu sagen sind, ihren letzten Halt. Hr. von Gutschmid wollte in ausdrücklichem Gegensatz gegen die bisherigen Auffassungen[4] in der gekrönten Büste der Averse sabäische und in der behaubten axumitische Könige erkennen. So statuirte er auf dem Revers der bekannten Aphilas-Münze, indem er an der von Rüppell, Langlois und Levy aufgebrachten Lesung ΔΙΜΗΑΝ festhielt und ΒΙCΙ für βασιλευs nahm, einen βασιλεὺs Διμηαν Αξωμιτῶν, und auf dem Avers (sich der Lesung des Hrn. Praetorius anschliessend) einen Αριδαs βασιλεύs, in welchem er den himjarischen Gegner des Dhu Nuwâs erkennen wollte, welchen Malalas Ἄνδαs (Theophanes Ἀδάδ, Johannes von Asien ܐܝܕܘܓ) nennt. Und doch ist diese angebliche Büste des Andas, der nie König war, gekrönt, ist Αριδαs immer noch nicht Ανδαs, ist die Beziehung der Münze auf die Personen eines sabäischen Ανδαs und axumitischen Königs Διμηαν schon darum ganz unmöglich, weil durch den Halbmond auf beiden Seiten der Münze dieselbe der Zeit des Heidenthums zugewiesen ist, wozu noch als die Hauptsache kommt, dass weder Αριδαs, noch Διμηαν auf

[1] In meiner Abhandlung »Zur Geschichte des axumitischen Reiches im vierten bis sechsten Jahrhundert« (in den Abhandlungen unserer Akademie 1880) S. 48.

[2] In ZDMG. XXXIV S. 737 ff.

[3] Geschichte der Perser und Araber zur Zeit der Sasaniden nach Tabari 1879, S. 175. 191. 219.

[4] S. 740.

der Münze zu lesen ist, wie alle bezeugen, welche ein Exemplar unter den Händen hatten. Zumal für die hiesige Aphilas-Goldmünze[1], welche auch, was die Ausführung der Züge der Bilder und die Buchstaben betrifft, eine für Abessinien merkwürdige Vollkommenheit des Schnittes und der Prägung zeigt, ist eine andere Lesung als **Αφιλας** und **Βισι Διμηλη** unmöglich. Wir sind nicht berechtigt, aus diesem Βισι Διμηλη Ἀξωμιτῶν einen Βασιλεὺς Ἀξωμιτῶν zu machen, und wird vielmehr unter Βισι Διμηλη der Axumiten ein Epitheton des Aphilas zu verstehen sein, ähnlich dem Epitheton *Bese (Bise) Halen*, welches der König der axumitischen Geez-Inschriften sich beilegt, dessen Bedeutung allerdings noch unklar ist, aber auf »der Mann der Halen« d. h. möglicher Weise (als Weibesname aufgefasst) der Helena hinauskommt. — Nicht besser steht es mit von Gutschmid's Erklärung der Goldmünze, welche auf der Vorderseite + BAC + CIN + BAX + ACA, auf der Rückseite IAN + AAΦ + CIB + NωЄ zeigt. Namentlich diese rückseitige Umschrift hat bisher allen Erklärungsversuchen widerstanden, und es ist wohl möglich, dass man rückwärts ein BIC . . . . ΞωMITωN oder etwas dergl. lesen muss. Aber von Gutschmid will auch hier wieder um jeden Preis Personen aus der Epoche des Kalebkrieges finden, und entdeckt auf dem Avers B(ασιλευς) ACCINBAXA CA(βαίων), das soll der nach Procopius von Ελεσβαας nach Besiegung des Dhu Nuwâs zu seinem Statthalter in Jemen eingesetzte Ἐσιμιφαῖος (inschriftlich und arabisch סמיפע, سميفع) sein, so zwar, dass was an dem Namen nicht zusammenstimmt, der Münzmeister verschuldet hätte; auf dem Revers sodann gewinnt er, indem er die Buchstaben der linken Hälfte, als auf den Kopf gestellt, umkehrt, BIC + IAH + AAY + ЄωN, und findet darin, unter Annahme von Prägefehlern, BAC(ιλευς) ICPAHΛ AYЄωN d. h. den Namen eines Sohnes von Kaleb, nämlich Ἰσραήλ, welcher bei der von seinem Vater vorgenommenen Reichstheilung das Land Aue in Abessinien mit der Hoheit über Saba erhalten habe; für die Existenz dieses Israel weiss er aber keinen Beweis, als die Berufung auf eine sehr trübe und späte Quelle, nämlich das Senkesâr. Hier steht alles in der Luft, wie auch Drouin gesehen hat. Alle die vielen (von Prideaux und Schlumberger verzeichneten) Münzen dieses Königs, die man jetzt hat, zeigen, obwohl der Revers dreifach variirt, also sie eigentlich dreierlei Münzen darstellen, doch auf dem Avers sämmtlich BAC + CIN + BAX + ACA, und kann darnach von Ἐσσιμιφαῖος, der nur kurz seine Statthalterschaft behauptete und auf keinen Fall gekrönter König war, keine Rede sein, und liegt nicht der mindeste Grund vor, gerade an einen König oder Statthalter der Justinianischen Zeit zu denken.

[1] Beschrieben von von Sallet S. 15 f.

Minder gewaltsam ist Hrn. von Gutschmid's Deutung[1] der in meiner Abhandlung vom Jahre 1878[2] erwähnten Goldmünze, welche rückseitig ΓЄ + PC + Є + M, vorn BACIΛI AZWMI zeigt, indem er letzteres statt *Βασιλευς Αξωμιτων* lesen will BACIΛ(ευς) IAΞWMI, und darunter den Jaksûm, den Sohn Abraha's versteht, welcher laut Angabe der arabischen Schriftsteller nach seines Vaters Abraha Tod König von Jemen unter den Abessiniern wurde, während Gersem der äthiopische Oberkönig gewesen sei. Aber auch hier ist alle Wahrscheinlichkeit dagegen, weil dann *Γερσεμ*, der axumitische Oberkönig, die Haube, Jaksûm, der sabäische Unterkönig, die Krone hätte, und weil auf einen sabäischen Statthalter überhaupt nichts hinweist. Die Voraussetzung, dass die Doppelbüste einen axumitischen und einen sabäischen Fürsten darstellen müsse, ist jetzt durch die Kaleb-Münze definitiv beseitigt. Noch sind eine Menge Räthsel in diesem Gebiet ungelöst, aber mit Conjecturalkritik, mit welcher der scharfsinnige Gelehrte auf andern Gebieten so viel ausgerichtet hat, ist hier kaum etwas zu erreichen, jedenfalls nichts, was Stand hielte, erreicht worden. Man wird ruhig abwarten müssen, bis neue Funde neues Licht verbreiten, und unser Hauptbestreben muss zunächst sein, neue Materialien zu gewinnen.

3.

Neue Materialien für die Aufklärung der alten Geschichte und der geographischen Verhältnisse Südarabiens sind in Menge beigeschafft worden durch Hrn. Ed. Glaser. Auf seinen Reisen nach Jemen (1883, 1885 und 1887), namentlich auf der dritten, hat er Gegenden durchforscht, die bisher kaum oder noch gar nicht erkundet waren, zugleich über 1000 Inschriften mitgebracht, darunter viele datirte und manche sehr umfangreiche, z. B. eine aus Sirwâḥ mit weit über 1000 Worten. Dieses Material harrt erst seiner Veröffentlichung und genaueren Durcharbeitung. Indessen hat der verdiente Reisende selbst in einer lesenswerthen Schrift, welche »Skizze der Geschichte Arabiens von den ältesten Zeiten bis zum Propheten Muhammad«, Heft I 1889 (München) betitelt ist, in grossen Zügen die Gesammtanschauung dargelegt, welche sich ihm aus dem von ihm gesammelten inschriftlichen und geographischen Material ergeben hat, und welche von der bisher durch andere geltend gemachten Ansicht zum Theil bedeutend abweicht. Nach seinen Ergebnissen geht der sabäischen Herrschaft, die schon zur Zeit des Assyrers Sargon um 715 v. Ch. im Gange war, das

---

[1] Bei Nöldeke S. 219.

[2] S. 229.

minäische Zeitalter, d. h. die Zeit der Herrschaft der Maʿîn (hebr. מְעוּנִים. מָעוֹן) voraus, deren Beginn er in Anbetracht der Zahl der bis jetzt gefundenen Namen minäischer Könige bis über 1500 v. Ch. zurückdatiren will. Das sabäische Zeitalter selbst zerfällt ihm wieder in 4 Perioden: a) die der Makârib, d. h. der sabäischen Priesterfürsten, etwa 2 Jahrhunderte umfassend, während welcher die Sabäer mit den Maʿîn um die Oberherrschaft gerungen haben, ungefähr 1020—820 v. Ch.; b) die der Könige von Sabâ, von welchen unter anderen jene Colossalbauten in Sirwâḥ und Mârib herrühren, die noch heute das Staunen des Beschauers erregen, etwa bis auf das Ende der Achämeniden; c) die Zeit der Könige von Sabâ und Raidân bis gegen 300 n. Ch.; d) worauf dann diese Könige in Folge ihrer Eroberungen in Ḥadhramaut, Mahra, ʿOmân, ʿAsîr, Ḥidjâz und der Tihâma einen längeren Titel (Könige von Sabâ, Raidân, Ḥadhramaut, Jemnat) annahmen, weiterhin in die Kriege mit den durch die römischen Kaiser unterstützten Abessiniern verwickelt. Glaser giebt uns in seiner Schrift auch vorläufige Kenntniss von einer Menge datirter Inschriften, deren Aera er nach Halévy und Fell definitiv als mit dem Jahr 115 v. Ch. beginnend festsetzt, von einer Reihe von Inschriften mit monotheistischem (jüdischem und christlichem) Bekenntniss[1], von einer grossen vierseitigen Prismainschrift in Mârib, von christlicher Seite gesetzt, aus dem Jahr 542/43 n. Ch., welche für die Verhältnisse und Thaten der Abessinier und ihrer Partei in Jemen nach Kalebs Zeit von besonderer Wichtigkeit ist; er giebt viele geographische Aufschlüsse z. B. über Saue, Raidân, Sanʿâ, Ṭafâr, Vermuthungen über die Ḥabašat an der Südostküste Arabiens, ihre Herkunft und Auswanderung nach Afrika. Doch es ist nicht meine Absicht, über all das Neue, was er aus seinen Inschriften und der Autopsie der Länder und Städte begründen zu können meint, zu berichten.

Aber Hr. Glaser hat bei dieser Gelegenheit, um sich für seine Auffassung der Beziehungen der Abessinier und Südaraber zu einander den Weg zu ebnen, sich auch des näheren über die Zeit und den Inhalt der adulitanischen und axumitischen Inschriften, welche ich in meiner Abhandlung vom Jahre 1878 behandelt habe, ausgelassen. Und darüber habe ich hier noch zu reden, da ich seinen Ausführungen durchweg entgegentreten muss.

Der axumitische König, der die adulitanische griechische Inschrift setzte, zählt darin die ganze Reihe der Völker auf, die er besiegt und der Botmässigkeit des axumitischen Throns unterworfen habe.

[1] Worin von »*Raḥmânân*« (dem Allbarmherzigen), »dem Gott«, »dem Herrn des Himmels und der Erde« u. s. w. die Rede ist.

nämlich Γάζη, Ἀγάμη, Σιγύην, Αὐά καὶ Τιαμῶ τοὺς λεγομένους Τζιαμῶ, Γάμβηλα, Ζιγγαβηνέ, Ἀγγαβέ, Τιαμά, Ἀθαγαοῦς Καλαά, Σεμῆναι, Λασινέ, Ζαά, Γαβαλά, Ἀταλμῶ, Βεγά und die Stämme bei ihnen, Ταγγαΐτας bis zu den Grenzen Ägyptens wohnend, Ἀννίνε, Μετίνε, dann Σέσεα ἔθνος, Ῥαυσῶν ἔθνη μεσόγεια λιβανωτοφόρων βαρβάρων, Σωλατὲ ἔθνος. Alle diese Namen hat nicht nur Kosmas selbst, der die Inschrift überliefert und da und dort commentirt hat, sondern haben auch die neueren Gelehrten und ich selbst in Africa gesucht. Welche derselben man noch verificiren kann, welche nicht, habe ich in meiner Abhandlung[1] besprochen. Seither ist meines Wissens nichts von Belang hinzugekommen[2]. Glaser S. 20 ff. will nun einen Theil dieser Namen in Arabien nachweisen. Vor allem soll Tiamo oder Tziamo einerlei sein mit der Tihâma (تِهامة), dem arabischen Küstenstrich. Die sachliche Möglichkeit davon will er damit begründen, dass die Tihâma zuerst im Jahre 450 n. Chr. in einer Inschrift des jemenischen Königs Šaraḥbil Ja'fûr als zum sabäischen Reich gehörig erwähnt werde, früher dieselbe nie zu diesem gehört habe, auch keine Inschrift dort zu finden sei, also dieselbe früher wohl axumitisch gewesen sein könne. Die lautliche Möglichkeit dieser Identification will er damit rechtfertigen, dass heute manche Orientalen, z. B. die südarabischen Juden, das aspirirte oder affricirte ת wie *ts* sprechen. Die Ehre seiner Entdeckung erkennt er Hrn. Prof. Hommel in München zu, mit dem er darüber conferirt habe. Da jenes Tziamo auch im Königstitel der axumitischen Inschriften, nicht bloss der griechischen als Τιαμῶ, sondern auch der kleineren Geez-Inschrift in der Schreibung ጸያሞ፡ vorkommt, so behauptet er selbstverständlich, dass auch hiemit die Tihâma gemeint sei. Nun ist es aber an sich schon eine höchst missliche Annahme, dass die damaligen Araber das ت dieses Wortes als ث sollten gesprochen haben, so dass die Griechen möglicher Weise ein Τζ hören konnten. Vollends die semitischen Axumiten, wenn ihnen die Tihâma gehörte, können doch dieselbe nicht bloss aus dem Munde der Griechen gekannt haben, und dass Semiten ein arabisches ت sollten als ጸ wiedergegeben haben, muss vorerst als unglaublich gelten. Erwägt man die Wendung Τιαμῶ, τοὺς λεγομένους Τζιαμῶ auf der adulitanischen Inschrift, und bedenkt man, dass auch die griechische Inschrift von Axum Τιαμῶ, aber die Geez-Inschrift ጸያሞ፡ schreibt, so muss man vielmehr umgekehrt schliessen, dass die Griechen Τζιαμῶ hörten, aber in ihrer gewohnten Weise dies zu Τιαμῶ vereinfachten.

---

[1] S. 195 ff.

[2] Eine Vermuthung bezüglich Σιγύην s. bei Reinisch, die Bilin-Sprache in Nordostafrica. 1882. S. 5.

Man bedenke auch dazu, dass die griechischen Inschriften zwar gräcisirt Ὁμηριτῶν, Ῥαειδαν, Σιλεη geben, aber die Geez in ihrer Sprache richtig semitisch ሐሜር፡ ሬይዳን፡ ሰልሔን፡ schreiben. Aber neben dieser sprachlichen Unwahrscheinlichkeit steht als weitere Instanz, dass alle unmittelbar vorhergehenden oder folgenden Namen, soweit man sie überhaupt noch nachweisen kann, sicher africanische, beziehungsweise abessinische Stämme und Völker bezeichnen: wie sollte mitten in diese herein die Tihâma Arabiens kommen? Freilich will nun Glaser auch andere arabische Ortsnamen in der Liste finden. Zunächst Καλαα soll die jemenische Landschaft el-Kalâʿ (الكلاع) sein, d. h. die Gegend nördlich von Taʿizz bis nördlich von Mekhâdir, also ʿUdein, Djabla, Ybb, Djebdjeb, Ḥobeiš, und alles westlich daran grenzende Land bis zur Tihâma von Zebîd und Beit el-Faqîh. Aber so dankbar wir für diese geographische Notiz sind, so entschieden müssen wir ein jemenisches Καλαα in diesem Zusammenhang ablehnen, weil gerade zuvor die Ἀθαγαοί, jedenfalls ein Agau-Stamm, und unmittelbar darauf die Σεμῆναι ἔθνος πέραν τοῦ Νείλου (d. h. des Takazze) ἐν δυσβάτοις καὶ χιονώδεσσιν ὄρεσιν οἰκοῦντες genannt werden, welche deutlich durch diese Beschreibung als die Bewohner des bekannten abessinischen Schneegebirges Semèn gekennzeichnet sind. Auch von den auf die Σεμῆναι folgenden Völkern Λασινὲ (καὶ Ζαά) καὶ Γαβαλά, welche bis jetzt nicht nachzuweisen sind, meint Glaser, freilich minder zuversichtlich, Lasine in Liʿsân (لعسان), der Gegend am westlichen Fuss des Ḥarâzbergs (als könnte lautlich aus Liʿsân Lasine werden!) und Gabala in der zum Kalâʿ-Gebiet gehörigen Stadt Gabala finden zu dürfen, und doch bezeichnet sie der König als Volksstämme οἰκοῦντες παρ' ὄρεσι θερμῶν ὑδάτων βλύζουσι καὶ καταῤῥύτοις! Diese Berge mit Thermen hätte Glaser in Liʿsân und Gabala nachweisen müssen, wenn er auf Zustimmung hätte rechnen wollen, und das möchte ihm schwer sein. Endlich zu Σέσεα ἔθνος vermuthet er den Namen Ṣaʿṣaʿ (صعصع), der in Arabien mehrere Gegenden bezeichne, z. B. eine bei Ḥadjdja (حجّة), drei Tagereisen nordwestlich von Sanʿâ. Und doch bemerkt Kosmas ausdrücklich, dass diese Σεσεα zu τὰ τῆς Βαρβαρίας ἔθνη gehören, also kann jenes صعصع nicht gemeint sein. Nun will Glaser freilich auch die unmittelbar darauf folgenden Ῥαυσῶν ἔθνη μεσόγεια λιβανωτοφόρων βαρβάρων, οἰκοῦντα ἐντὸς πεδίων μεγίστων ἀνύδρων, καὶ Σωλατὲ ἔθνος, οἷς καὶ τοὺς αἰγιαλοὺς τῆς θαλάσσης φυλάσσειν ἐκέλευσα, als einen Theil des arabischen Weihrauchgebirges verstehen, und unter den ungeheuren wasserlosen Ebenen die grosse Dehnâ-Wüste, die von Mârib (doch wohl cum grano salis) bis ʿOmân reiche: die Solate[1] aber werden die Mahra und die Be-

[1] S. 27.

wohner der vorliegenden Inseln bezeichnen. Aber die *βάρβαροι* sind, wie Kosmas ausdrücklich bemerkt, Bewohner der *Βαρβαρία*; unter dieser oder *Βαρβαρικὴ χώρα* verstand man aber in solchem Zusammenhang[1] die Somaliländer bis Cap Guardafui, niemals Arabien. Auch konnte der König unmöglich, wenn er unter *Ῥαυσῶν ἔθνη* die Stämme des arabischen Weihrauchgebirges gemeint hätte, sagen, dass sie in der Dehnâ-Wüste wohnen. Nun meint freilich Hr. Glaser, Azania sei nach dem Periplus maris erythraei[2] dem *Χολαῖβος*, dem *τύραννος* der *Μαφαρῖτις*, gehorsam gewesen, und habe also, da dieser ein Vasall des Sabäerkönigs Charibael war, zum sabäischen Reich gehört, somit nicht zum axumitischen. Aber Azania ist ein engerer Begriff als *ἡ Βαρβαρικὴ χώρα*[3], und hat sich die sabäische Oberherrlichkeit gewiss nicht weit landeinwärts erstreckt, so dass durch dieselbe ein Kriegszug des axumitischen Königs nach dem Somaliland nicht verhindert worden wäre. Ohnedem behauptet niemand, dass der König der adulitanischen Inschrift Zeitgenosse des Verfassers des Periplus gewesen sei.

Sind somit alle diese Aufstellungen Glaser's schon nach dem Zusammenhang der Inschrift und nach dem Laut der Namen theils willkürlich, theils unannehmbar, so werden dieselben durch den weiteren Inhalt der Inschrift geradezu unmöglich. Der König fährt nämlich fort: *ταῦτα πάντα τὰ ἔθνη ὄρεσιν ἰσχυροῖς πεφρουρημένα* habe er persönlich in seinen Kämpfen besiegt, andere haben sich ihm freiwillig unterworfen, und sagt dann: *καὶ πέραν τῆς Ἐρυθρᾶς θαλάσσης οἰκοῦντας Ἀραβίτας καὶ Κιναιδοκολπίτας, στράτευμα ναυτικὸν καὶ πεζικὸν διαπεμψάμενος καὶ ὑποτάξας αὐτῶν τοὺς βασιλέας, φόρους τῆς γῆς τελεῖν ἐκέλευσα, καὶ ὁδεύεσθαι μετ' εἰρήνης καὶ πλέεσθαι. ἀπό τε Λευκῆς κώμης ἕως τῶν Σαβέων χώρας ἐπολέμησα.* Aus diesem Passus ist doch sicher, dass die vorher aufgezählten Eroberungen, bei denen er persönlich zugegen war, diesseits des erythräischen Meeres, nicht in Arabien, stattfanden, und dass die von ihm ausgesandte Expedition, die er selbst nicht mitmachte, nur die von *Λευκὴ Κώμη* (dem Hafen an der Südgrenze des Nabatäergebiets) bis zum Sabäerland sich erstreckende Küste betraf und den Hauptzweck hatte, den Land- und Seeweg gegen die Wegelagerer und Seeräuber zu sichern. Allerdings beansprucht er auch, diese Küstenbewohner sich unterthänig gemacht zu haben, aber von Eroberungen im Binnenlande des sabäischen Reiches sagt er kein Wort.

[1] Z. B. Kosmas bei Migne Sp. 97. 100 und 108, wo er bemerkt, *τὴν Σάσου καὶ τὴν Βαρβαρίαν* als *τέλος τῆς Αἰθιοπίας* sei dem König wohl bekannt gewesen; ferner Peripl. mar. erythr. §. 5. 7. 25.

[2] §. 16. 22. 31.

[3] S. C. Müller geographi Graeci I p. 268.

Wenn nun aber weiter Glaser[1] meint, dass der König der Inschrift von Adule jünger sein müsse, als der Periplus, weil Zoscales, der axumitische König des Periplus, nur ein auf afrikanische Landschaften beschränktes Reich besitze, während der König der adulitanischen Inschrift viele und grosse Gegenden Arabiens unter seinem Scepter habe, so ist dieser chronologische Schluss hinfällig, weil nach dem Gesagten der Untersatz unrichtig ist. Damit ist dann auch der positiven Bestimmung der Zeit der Inschrift, die er versucht, der Boden entzogen. Er meint, weil nach den sabäischen Inschriften nicht lange vor 300 n. Ch. die in der Aduleinschrift genannten arabischen Landschaften von den Sabäern erobert und ganz Südarabien von ihnen in Besitz genommen worden sei, so müsse der Versuch der Axumiten, sich in Südarabien festzusetzen, und somit auch die adulitanische Inschrift, die darüber berichte, etwas älter sein als 300 n. Ch., etwa in den Lauf des dritten Jahrhunderts oder dessen zweite Hälfte gehören, oder aber müsse die Inschrift von Aizanas selbst, dem König der griechischen Inschrift von Axum, der zwischen 360 und 378 n. Ch. das sabäische Reich auf kurze Zeit erobert habe, gesetzt sein. Darauf erwiedere ich: des Aizanas Zeit kennen wir annähernd aus anderen Daten; aber dass er die Theile des sabäischen Reichs, die er in seinem Titel als unter seiner Herrschaft stehend aufführt (*βασιλεὺς Ὁμηριτῶν καὶ τοῦ Ῥαειδᾶν καὶ Αἰθιόπων καὶ Σαβαειτῶν καὶ τοῦ Σιλεῆ*), selbst auch erobert habe, davon sagt er nichts; es wäre möglich, möglich ist aber auch, dass er sie schon von einem Vorgänger überkommen hat. Wir wissen bis jetzt darüber nichts, und können ruhig abwarten, was die von Glaser gefundenen, aber erst noch zu veröffentlichenden Inschriften ergeben werden. Dass aber der Verfasser der Aduleinschrift derselbe sei mit Aizanas, was Glaser als möglich hinstellt, ist vielmehr eine Unmöglichkeit, weil er keinen Theil von Südarabien inne hatte. Schliesslich will Glaser[2] gefunden haben, die in den Titeln des Aizanas ausgesprochene Herrschaft der Axumiten über Südarabien könne höchstens etwas über ein Jahrzehnt gedauert haben, weil Glaser's monotheistische Inschrift Nr. 389 vom Jahr 493, d. h. 378 n. Ch. von einem einheimischen Herrscher von Sabâ, Raidân, Ḥadhramaut und Jemnat, Namens Juhamin, herstamme. Und weiter, da von 378 bis 525 n. Ch. wenigstens im Centrum Jemen's lauter echt arabische Fürsten herrschten, die er alle inschriftlich belegen könne, so sei für einen Tazênâ, Sohn des Ela Amida Beese Halen, dem ich die beiden axumitischen Geezinschriften beilege, und den ich als den Vorgänger des Elesbaas oder Kaleb in das Ende des fünften oder den Anfang des

[1] S. 31.
[2] S. 37 ff.

sechsten Jahrhunderts setze, kein Platz in dieser Zeit, und müsse er, Glaser, deshalb urtheilen, dass jener . . zena (der erste Buchstabe fehlt in der Inschrift) nicht [Ta]zena, sondern [Ai]zena zu ergänzen sei, und der König identisch mit dem Aizana der griechischen Inschrift von Axum sei. Darnach ergebe sich, dass Aizana zwischen 360 und 378 das sabäische Reich erobert und auch wieder verloren habe. Die allgemeine Möglichkeit dieser Identification des . . zena mit *Aἰζανα* gebe ich zu, aber mehr auch nicht. Denn 1) der König der griechischen Inschrift nennt sich Αειζανας und spricht im Verlauf von seinen zwei Brüdern *Σαιαζανα* und *Αδηφας*: der König der Geezinschriften nennt sich geflissentlich . . zena Sohn des Ela Amida Beese Halen; das macht schon einen Unterschied. Warum soll er sich gescheut haben, in der griechischen Inschrift auch seinen Vaternamen und Beese Halen zu nennen? 2) Ferner . . zena zieht selbst in den Krieg, Αειζανας schickt seine zwei Brüder mit dem Heer. Auch ist (s. oben) Tazena als Vater des Kaleb jetzt durch die Kalebmünze gesichert, und das gibt eine gute Präsumtion für die Richtigkeit der abessinischen Königsliste für diese Zeit, welche die Reihe Ela 'Amida, Tazena, Kaleb aufstellt. 3) Weiter wenn sowohl Αειζανας als . . zena sich *βασιλεὺς Ἀξωμιτῶν καὶ Ομηριτῶν καὶ τοῦ Ῥαειδὰν καὶ Αἰθιόπων καὶ Σαβαειτῶν καὶ τοῦ Σιλεῆ καὶ τοῦ Τιαμῶ καὶ Βουγαειτῶν καὶ τοῦ Κάσου, βασιλεὺς βασιλέων* nennt, so besagt das noch lange nicht, dass er auch der Eroberer gerade der arabischen Länder, die der Titel aufführt, war. Oder soll er auch der Eroberer der *Ἀξωμῖται, Βουγαεῖται, Κάσου* gewesen sein? 4) Endlich bleibt ja auch die Möglichkeit, dass jene Titulatur von . . zena fortgeführt wurde, auch wenn seine Herrschaft über die jemenischen Landschaften schon bestritten oder factisch schon beseitigt war, und er nur noch den theoretischen Anspruch auf dieselben erhob. Aus diesen Gründen finde ich auch bezüglich des . . zena mich vorerst nicht bewogen, von meiner früheren Ansicht abzugehen. Ich hoffe, dass das von Hrn. Glaser gesammelte inschriftliche Material noch über manche dunkle Punkte jener internationalen Beziehungen zwischen den Äthiopen und den Arabern Licht verbreiten wird. Auch werde ich selbstverständlich meine bisherigen Ansichten aufgeben, wo zwingende Thatsachen entgegenstehen. Aber in dem, was Hr. Glaser bis jetzt vorgebracht hat, kann ich nur eine vorläufige Construction jener Beziehungen erkennen, nicht aber mich widerlegende Thatsachen.

Ausgegeben am 16. Januar.



1890.
II.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

9. Januar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Fuchs machte eine Mittheilung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, als Schluss der Mittheilung vom 11. Juli 1889.

2. Hr. E. du Bois-Reymond legte einen Bericht des Hrn. Prof. I. Steiner in Köln vor: die Functionen des Centralnervensystems der wirbellosen Thiere.

Beide Mittheilungen folgen umstehend.



Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von L. Fuchs.

(Schluss der Mittheilung vom 11. Juli 1889.)

22.

Die zu den singulären Punkten k_1, k_2, k_3, k_4 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (2) Nr. 16 lauten übereinstimmend

$$r^2(r-1)(r-2)=0. \tag{1}$$

Demnach ist nach den Gleichungen (3) Nr. 16 und den Gleichungen (9) Nr. 18 in der Umgebung von $x=k_1$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{11}+\frac{1}{\pi i}y_1\log(x-k_1)\\ v_2 &= \psi_{21}\\ v_3 &= y_1\\ v_4 &= \psi_{41}\end{aligned}\right. \tag{2}$$

in der Umgebung von $x=k_2$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{12}+\frac{1}{\pi i}y_2\log(x-k_2)\\ v_2 &= \psi_{22}\\ v_3 &= \psi_{32}-\frac{1}{\pi i}y_2\log(x-k_2)\\ v_4 &= \psi_{42}+\frac{1}{\pi i}y_2\log(x-k_2)\end{aligned}\right. \tag{3}$$

in der Umgebung von $x=k_3$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{13}+\frac{1}{\pi i}y_3\log(x-k_3)\\ v_2 &= \psi_{23}+\frac{1}{\pi i}y_3\log(x-k_3)\\ v_3 &= \psi_{33}-\frac{1}{\pi i}y_3\log(x-k_3)\\ v_4 &= \psi_{43}+\frac{1}{\pi i}y_3\log(x-k_3)\end{aligned}\right. \tag{4}$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$
(5)\qquad \begin{cases} v_1 = \psi_{14} + \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x - k_4) \\ v_2 = \psi_{24} + \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x - k_4) \\ v_3 = \psi_{34} - \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x - k_4) \\ v_4 = \psi_{44}. \end{cases}
$$

In den Gleichungen (2) bis (5) bedeuten die Grössen $\psi_{\lambda\mu}$ und y_μ nach positiven ganzen Potenzen von $x - k_\mu$ fortschreitende Reihen, und zwar ist

$$
(6)\qquad y_\mu = -\pi i \psi'(k_\mu)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi i}{8} \psi'(k_\mu)^{-\frac{3}{2}} \psi^{(2)}(k_\mu)(x - k_\mu) + \ldots,
$$

ferner sind $\psi_{21}(k_1)$, $\psi_{41}(k_1)$, $\psi_{22}(k_2)$, $\psi_{44}(k_4)$ von Null verschieden.

Die Integrale ζ gehören zu derselben Classe mit den Integralen v (vergl. Nr. 9 und Gl. (10) Nr. 17), daher bleiben die Gleichungen (9) Nr. 18 bestehen, wenn v_λ durch ζ_λ und $\bar{v}_\lambda$ durch ζ_λ ersetzt wird, und es ist in der Umgebung von $x = k_1$

$$
(2a)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \chi_{11} + \frac{1}{\pi i} \eta_1 \log(x - k_1) \\ \zeta_2 = \chi_{21} \\ \zeta_3 = \eta_1 \\ \zeta_4 = \chi_{41} \end{cases}
$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$
(3a)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \chi_{12} + \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x - k_2) \\ \zeta_2 = \chi_{22} \\ \zeta_3 = \chi_{32} - \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x - k_2) \\ \zeta_4 = \chi_{42} + \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x - k_2) \end{cases}
$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$
(4a)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \chi_{13} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x - k_3) \\ \zeta_2 = \chi_{23} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x - k_3) \\ \zeta_3 = \chi_{33} - \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x - k_3) \\ \zeta_4 = \chi_{43} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x - k_3) \end{cases}
$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$(5a)\quad \begin{cases} \zeta_1 = \chi_{14} + \frac{1}{\pi i}\eta_4 \log(x - k_4) \\ \zeta_2 = \chi_{24} + \frac{1}{\pi i}\eta_4 \log(x - k_4) \\ \zeta_3 = \chi_{34} - \frac{1}{\pi i}\eta_4 \log(x - k_4) \\ \zeta_4 = \chi_{44}. \end{cases}$$

In den Gleichungen (2a) bis (5a) sind die Grössen $\chi_{\lambda\mu}$ und η_μ nach positiven ganzen Potenzen von $x - k_\mu$ fortschreitende Reihen, und zwar ist

$$(6a)\qquad (\eta_\mu)_{x=k_\mu} = -\pi i k_\mu \psi'(k_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

ferner sind $\chi_{21}(k_1)$, $\chi_{41}(k_1)$, $\chi_{22}(k_2)$, $\chi_{44}(k_4)$ von Null verschieden.

Aus den Gleichungen (9) Nr. 18 folgt, dass nach einem Umlaufe um $x = \infty$

$$(7)\qquad \bar v_1 = -v_1,\; \bar v_2 = -v_2,\; \bar v_3 = -v_3 + 2v_1,\; \bar v_4 = -v_4.$$

Ferner ist die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (2) Nr. 16

$$(8)\qquad (r - \tfrac{1}{2})(r - \tfrac{3}{2})^2(r - \tfrac{5}{2}) = 0.$$

Demnach ist in der Umgebung von $x = \infty$

$$(9)\quad \begin{cases} v_1 = x^{-\frac{3}{2}}\psi_{1\infty} \\ v_2 = x^{-\frac{1}{2}}\psi_{2\infty} \\ v_3 = x^{-\frac{1}{2}}\psi_{3\infty} + \frac{1}{\pi i} v_1 \log\frac{1}{x} \\ v_4 = x^{-\frac{1}{2}}\psi_{4\infty}, \end{cases}$$

wo $\psi_{\lambda\infty}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen $\psi_{1\infty}, \psi_{2\infty}, \psi_{4\infty}$ für $x = \infty$ nicht verschwinden.

Alsdann ist

$$(9a)\quad \begin{cases} \zeta_1 = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{1\infty} \\ \zeta_2 = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{2\infty} \\ \zeta_3 = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{3\infty} + \frac{1}{\pi i}\zeta_1 \log\frac{1}{x} \\ \zeta_4 = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{4\infty}, \end{cases}$$

wo $\chi_{1\infty}, \chi_{2\infty}, \chi_{4\infty}, \chi_{3\infty}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, wovon die drei ersten für $x = \infty$ nicht verschwinden.

23.

Die Functionen a, b, c, d, f genügen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \psi \frac{d^2\Omega}{dx^2} + \psi' \frac{d\Omega}{dx} + \frac{1}{8}\psi^{(2)}\Omega + 6\psi \frac{dw}{dx} + 3\psi' w = 0$$

wenn wir

$$(2) \qquad \Omega = 8\psi \frac{d^3w}{dx^3} + 16\psi' \frac{d^2w}{dx^2} + 9\psi^{(2)} \frac{dw}{dx} + \psi^{(3)} w$$

setzen.

Die zu den singulären Punkten k_1, k_2, k_3, k_4 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (1) lauten übereinstimmend:

$$(3) \qquad r^2(r-1)(r-2)^2 = 0\,.$$

Die zum Punkte $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung derselben Gleichung ist

$$(4) \qquad (r-1)^2(r-2)(r-3)^2 = 0.$$

Aus den Gleichungen (10) Nr. 18 ergiebt sich demnach in der Umgebung von $x = k_1$

$$(5) \qquad \begin{cases} a = A^{(1)} - \frac{d}{\pi i} \log(x-k_1) \\ b = B^{(1)} \\ c = C^{(1)} + \frac{f}{\pi i} \log(x-k_1) \\ d = D^{(1)} \\ f = F^{(1)}, \end{cases}$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$(6) \qquad \begin{cases} a = A^{(2)} + \frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2) \\ b = B^{(2)} + \frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2) \\ c = C^{(2)} + \frac{1}{\pi i}(-a+2b+c+f)\log(x-k_2) \\ d = D^{(2)} + \frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2) \\ f = F^{(2)} + \frac{1}{\pi i}(-2b-c+d-f)\log(x-k_2)\,; \end{cases}$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$(7)\quad \begin{cases} a = A^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(2b + c - d)\log(x - k_3) \\ b = B^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(a - c - d - f)\log(x - k_3) \\ c = C^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(-a + 2b + 2c + f)\log(x - k_3) \\ d = D^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(a + 2b - 2d - f)\log(x - k_3) \\ f = F^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(-2b - c + d)\log(x - k_3), \end{cases}$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$(8)\quad \begin{cases} a = A^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(a + 2b + c - d)\log(x - k_4) \\ b = B^{(4)} - \frac{1}{\pi i}(c + f)\log(x - k_4) \\ c = C^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(c + f)\log(x - k_4) \\ d = D^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(a + 2b - d - f)\log(x - k_4) \\ f = F^{(4)} - \frac{1}{\pi i}(c + f)\log(x - k_4). \end{cases}$$

In den Gleichungen (5) bis (8) bedeuten $A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}, D^{(\mu)}, F^{(\mu)}$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - k_\mu$ fortschreitende Reihen. Ebenso sind die Coefficienten von $\log(x - k_1)$, $\log(x - k_2)$, $\log(x - k_3)$, $\log(x - k_4)$ in den Gleichungen (5), (6), (7), (8) nach positiven ganzen Potenzen bez. von $x - k_1$, $x - k_2$, $x - k_3$, $x - k_4$ fortschreitende Reihen, welche bez. für $x = k_1$, $x = k_2$, $x = k_3$, $x = k_4$ nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen (10) Nr. 18 ergiebt sich, dass nach einem Umlaufe um $x = \infty$

$$(9)\qquad \bar{a} = a,\ \bar{b} = b,\ \bar{c} = c,\ \bar{d} = d + 2a,\ \bar{f} = f - 2c.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf Gleichung (4) in der Umgebung von $x = \infty$

$$(10)\quad \begin{cases} a = x^{-1}A^{(\infty)} \\ b = x^{-1}B^{(\infty)} \\ c = x^{-1}C^{(\infty)} \\ d = x^{-1}D^{(\infty)} + \frac{a}{\pi i}\log\frac{1}{x} \\ f = x^{-1}F^{(\infty)} - \frac{c}{\pi i}\log\frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo $A^{(\lambda)}$, $B^{(\lambda)}$, $C^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$, $F^{(\lambda)}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, von welchen die drei ersten für $x = \infty$ nicht verschwinden.

24.

Durch Differentiation erhalten wir die Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial x} = x \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} + \tfrac{1}{2} v_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

woraus sich ergiebt

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}[v_\lambda \zeta_\mu - v_\mu \zeta_\lambda] = (\zeta_\mu - x v_\mu)\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - (\zeta_\lambda - x v_\lambda)\frac{\partial v_\mu}{\partial x}.$$

Nach den Gleichungen (6) Nr. 18 ist daher

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= (\zeta_2 - x v_2)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - x v_1)\frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= (\zeta_3 - x v_3)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - x v_1)\frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= (\zeta_4 - x v_4)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - x v_1)\frac{\partial v_4}{\partial x} \\ \frac{\partial d}{\partial x} &= (\zeta_3 - x v_3)\frac{\partial v_2}{\partial x} - (\zeta_2 - x v_2)\frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= (\zeta_4 - x v_4)\frac{\partial v_3}{\partial x} - (\zeta_3 - x v_3)\frac{\partial v_4}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Multipliciren wir die erste der Gleichungen (3) mit $x - k_1$, und setzen $x = k_1$, so folgt, wenn wir die Bezeichnung

$$(4) \qquad \psi_\lambda(z) = \frac{\psi(z)}{z - k_\lambda}$$

einführen, aus den Gleichungen (2) Nr. 22 und (5) Nr. 23:

$$(5) \qquad (d)_{x=k_1} = -y_1(k_1)\int_{k}^{k_1} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}.$$

Multipliciren wir die dritte der Gleichungen (3) mit $x - k_1$ und setzen $x = k_1$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (2) Nr. 22 und (5) Nr. 23:

$$(6) \qquad (f)_{x=k_1} = y_1(k_1)\int_{k_2}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}.$$

Durch Multiplication der ersten und der letzten der Gleichungen (3) mit $x-k_2$ ergiebt sich aus den Gleichungen (3) Nr. 22 und (6) Nr. 23, wenn wir $x=k_2$ setzen,

$$(7)\qquad (a-d)_{x=k_2} = y_2(k_2)\int_{k_3}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_2(z)}},$$

$$(8)\qquad (-2b-c+d-f)_{x=k_2} = -y_2(k_2)\int_{k_1}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_2(z)}}.$$

Multipliciren wir die beiden ersten der Gleichungen (3) mit $x-k_3$ und setzen $x=k_3$, so folgt aus den Gleichungen (4) Nr. 22 und (7) Nr. 23:

$$(9)\qquad (2b+c-d)_{x=k_3} = y_3(k_3)\int_{k_1}^{k_2}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_3(z)}}.$$

$$(10)\qquad (a-c-d-f)_{x=k_3} = y_3(k_3)\int_{k_2}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_3(z)}}.$$

Multipliciren wir endlich die beiden ersten der Gleichungen (3) mit $x-k_4$ und setzen $x=k_4$, so ergeben die Gleichungen (5) Nr. 22 und (8) Nr. 23:

$$(11)\qquad (a+2b+c-d)_{x=k_4} = y_4(k_1)\int_{k_1}^{k_2}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_4(z)}}.$$

$$(12)\qquad (c+f)_{x=k_4} = -y_4(k_4)\int_{k_2}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\Psi_4(z)}}.$$

25.

Wir wollen mit k irgend eine der Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnen. Um die Function $H(a, b, c, d)$ (Nr. 21) zu bestimmen, sind nunmehr die Werthe der Ableitungen nach k von den Functionen a, b, c, d für die singulären Punkte $x=k_1, k_2, k_3, k_4$ und für $x=\infty$ zu berechnen. Wir könnten dieselben unmittelbar durch Differentiation der Gleichungen (5) bis (8) und der Gleichung (10) Nr. 23 nach der Variabeln k erhalten — die Zulässigkeit dieser Differentiation liesse sich ohne erhebliche Schwierigkeit erweisen — aber auch der folgende Weg führt uns schnell zu demselben Ziele.

Da die Integrale a, b, c, d, f der Gleichung (1) Nr. 23 durch die Umläufe um die singulären Punkte derselben k_1, k_2, k_3, k_4 die

Substitutionen (10) Nr. 18 erleiden, deren Coefficienten von den Werthen der Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 unabhängig sind, so wird nach Nr. 12 eine Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial w}{\partial k} = A_0 w + A_1 \frac{\partial w}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4},$$

in welcher A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 nach getroffener Wahl des k wohlbestimmte rationale Functionen von x sind, durch jede der Grössen a, b, c, d, f befriedigt.

Hieraus und aus den Gleichungen (5) bis (8) und Gleichung (10) Nr. 23 ergiebt sich demnach, dass die Functionen $\frac{\partial a}{\partial k}, \frac{\partial b}{\partial k}, \frac{\partial c}{\partial k}, \frac{\partial d}{\partial k}, \frac{\partial f}{\partial k}$ in der Umgebung von $x = k_\mu$ die Form $P_\mu + Q_\mu \log(x - k_\mu)$ und in der Umgebung von $x = \infty$ die Form $P_\infty + Q_\infty \log \frac{1}{x}$ haben, also in der Bezeichnungsweise meiner Arbeit[1] wie F beschaffene Ausdrücke sind.

Setzen wir die Differentialgleichung (1) Nr. 23 in die Form

$$(2)\qquad B_0 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_4 \frac{\partial w}{\partial x} + B_5 w = 0$$

worin $B_0, B_1, \ldots B_5$ ganze rationale Functionen von x und den Grössen k_μ sind, und differentiiren diese Gleichung nach k, so folgt

$$(3)\quad B_0 \frac{\partial^5}{\partial x^5}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)$$
$$+ B_5 \frac{\partial w}{\partial k} + \frac{\partial B_0}{\partial k}\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \frac{\partial B_1}{\partial k}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial B_2}{\partial k}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial B_3}{\partial k}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial B_4}{\partial k}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial B_5}{\partial k} w = 0.$$

Ist w eine der Functionen a, b, c, d, f, so ist nach den Gleichungen (5) bis (8) Nr. 23, w in der Umgebung von $x = k_\mu$ eine wie F beschaffene Function, welche zum Exponenten Null gehört. Ist λ der Exponent, zu welchem $\frac{\partial w}{\partial k}$ gehört und ist $\lambda > 0$, so gehört $\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)$ zum Exponenten $-\lambda - r$, während $\frac{\partial^r w}{\partial x^r}$ zum Exponenten $-r$ gehört. Setzen wir also in Gleichung (3) für w seinen in einer der Gleichungen (5) bis (8) enthaltenen Ausdruck und für $\frac{\partial w}{\partial k}$ den obigen Ausdruck $P_\mu + Q_\mu \log(x - k_\mu)$, welcher unserer Annahme nach zum Exponenten $-\lambda$ gehört, so ergiebt die Vergleichung der gleich hohen Potenzen von $x - k_\mu$ entweder im Coefficienten von $\log(x - k_\mu)$ oder in den

[1] Borch. Journ. B. 66, S. 155.

vom Logarithmus freien Gliedern, dass λ die Einheit nicht überschreiten darf, wenn $k = k_\mu$, und dass λ nicht positiv ist, wenn k von k_μ verschieden.

Auf demselben Wege ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (10) Nr. 23, dass der Exponent, zu welchem $\frac{\partial w}{\partial k}$ in der Umgebung von $x = \infty$ gehört, nicht grösser als die negative Einheit ist.

Die oben erwähnte Coefficientenvergleichung zeigt übrigens auch — wie nach der directen Differentiation der Gleichungen (5) bis (8) Nr. 23 zu erwarten war — dass im Falle $k = k_\mu$ die Summen

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial k}, \quad \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial k}, \ldots$$

nicht zu einem negativen Exponenten gehören.

Hieraus ergiebt sich, dass $G(a, b, c, d)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 eine wie F beschaffene Function ist, deren Exponent nicht unter die negative Einheit sinkt, während der Exponent von $G(a, b, c, d)$ in der Umgebung von $x = \infty$ höchstens den Werth -5 hat.

Nach Gleichung (26) Nr. 21 ist

$$G(a, b, c, d) = a.\ H(a, b, c, d). \tag{4}$$

Wir wollen zunächst bemerken, dass H ausser für die Werthe $x = k_\mu$ für keinen anderen endlichen Werth von x unendlich werden kann. Ist nämlich $x = \beta$ ein von dem k_μ verschiedener Werth, für welchen H unendlich würde, so müsste, weil $G(a, b, c, d)$ für $x = \beta$ einen endlichen Werth erhält, a für $x = \beta$ verschwinden. Macht x einen beliebigen Umlauf, und gehen dabei a und $G(a, b, c, d)$ bez. in $\bar{a}$, $\bar{G}(a, b, c, d)$ über, so ist — weil nach Nr. 21 H eine rationale Function von x — nach Gleichung (4)

$$\bar{G}(a, b, c, d) = \bar{a} \cdot H(a, b, c, d). \tag{5}$$

Aus dieser Gleichung ergäbe sich, dass auch $\bar{a}$ für $x = \beta$ verschwinden müsste. Ein Werth $x = \beta$ aber, für welchen jeder Zweig eines Integrals der irreductibelen Gleichung (1) Nr. 23 verschwindet, müsste die Function $\psi(x)$ annulliren, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus den obigen Entwickelungen und aus den Gleichungen (5) bis (8) Nr. 23 folgt, dass

$$H(x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)(x - k_4) = H_1 \tag{6}$$

für keinen endlichen Werth von x unendlich werden kann.

Aus denselben Entwickelungen und aus Gleichung (10) Nr. 23 folgt aber, dass H für $x = \infty$ wenigstens vierter Ordnung ver-

schwindet. Demnach ist H_1 eine von x unabhängige Grösse. Da H nicht identisch verschwinden kann, so ergiebt sich, dass diese Function für $x = \infty$ genau vierter Ordnung verschwindet.

Vertauschen wir in Gleichung (2) Nr. 16 x mit k_1, so erhalten wir die Differentialgleichung, welcher y_1, y_2, y_3, y_4 als Functionen von k_1 genügen. Wir gelangen also durch den obigen Schlüssen analoge Schlüsse zu dem Resultate, dass

$$H(k_1 - x)(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)$$

eine von k_1 unabhängige Grösse ist. Ebenso folgt, dass

$$H(k_2 - x)(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)$$

von k_2 unabhängig wird.

Setzen wir daher

$$(7)\quad (x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_1-k_4)(k_2-k_3)(k_2-k_4) = \Pi$$

so erhalten wir

$$(8)\qquad H(a, b, c, d) = \frac{\lambda}{\Pi},$$

wo λ eine von x, k_1, k_2 unabhängige Grösse bedeutet.

Nach den Gleichungen (4) und (5) Nr. 20 und der Gleichung (26) No. 21 ist daher

$$(9)\qquad \Delta = \frac{\lambda}{a^3\,\Pi},$$

wo λ eine von x, k_1, k_2 unabhängige Grösse bedeutet.

26.

Wir wollen nunmehr die Functionen a, b, c, d, f in ihren realen und imaginären Bestandtheil zerlegen, also setzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} a = a_1 + a_2 i, \; b = b_1 + b_2 i, \; c = c_1 + c_2 i \\ d = d_1 + d_2 i, \; f = f_1 + f_2 i. \end{cases}$$

Setzen wir ebenso

$$(2)\qquad x = x_1 + x_2 i,$$

so ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Coefficienten der Tabelle (10) Nr. 18 reale Grössen sind, dass es erlaubt ist in dieser Tabelle a, b, c, d, f durch a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 bez. und a, b, c, d, f durch a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 bez. zu ersetzen, wenn mit a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 diejenigen Werthe bezeichnet werden, in welche sich die realen Functionen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 der realen Variablen x_1, x_2 verwandeln, wenn der

durch die Coordinaten (x_1, x_2) bestimmte Punkt um je einen der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 einen Umlauf vollzieht. Gleichermaassen ist es erlaubt, in derselben Tabelle a, b, c, d, f durch a_2, b_2, c_2, d_2, f_2 bez. und $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{f}$ durch $\overline{a}_2, \overline{b}_2, \overline{c}_2, \overline{d}_2, \overline{f}_2$ zu ersetzen, wenn die letzteren Grössen das bezeichnen, was aus a_2, b_2, c_2, d_2, f_2 durch dieselben Umläufe von (x_1, x_2) wird.

Die Function $af + b^2 + cd$ verschwindet nach Gleichungen (7) und (8) Nr. 18 identisch für jedes x, und verwandelt sich durch die Umläufe um die singulären Punkte k_μ in sich selbst.

Bilden wir daher analog die Ausdrücke

$$\phi_1 = a_1 f_1 + b_1^2 + c_1 d_1 \tag{3}$$

$$\phi_2 = a_2 f_2 + b_2^2 + c_2 d_2, \tag{4}$$

so ergeben die Verwandlungstabellen für $a_1, b_1, \ldots$ und $a_2, b_2, \ldots$, von welchen eben die Rede war, dass die realen Functionen ϕ_1, ϕ_2 der realen Variablen x_1, x_2 bei Umläufen des Punktes (x_1, x_2) um die Punkte k_μ umgeändert bleiben.

Ihrer Bedeutung nach bleiben $a_1, b_1, \ldots$ und $a_2, b_2, \ldots$ folglich auch ϕ_1 und ϕ_2 ungeändert, wenn (x_1, x_2) irgend welche Umläufe um andere Punkte vollzieht.

Demnach sind ϕ_1, ϕ_2 eindeutige Functionen von x_1, x_2.

Aus der Gleichung

$$af + b^2 + cd = 0 \quad \text{(s. Gleichungen (7) und (8) Nr. 18)} \tag{5}$$

folgt durch Trennung des realen und des imaginären Theiles

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2) f_1 &= -b_1 [ab] + b_2 (ab) - c_1 [ad] + c_2 (ad)\\ (a_1^2 + a_2^2) f_2 &= -b_1 (ab) - b_2 [ab] - c_1 (ad) - c_2 [ad],\end{aligned} \tag{6}$$

wo

$$\begin{cases}(pq) = p_1 q_2 - p_2 q_1\\ [pq] = p_1 q_1 + p_2 q_2\end{cases} \tag{7}$$

gesetzt ist. Substituiren wir die Werthe von f_1 und f_2 aus den Gleichungen (6) in ϕ_1, ϕ_2 (Gleichungen (3) und (4)), so folgt

$$\phi_1 (a_1^2 + a_2^2) = \phi_2 (a_1^2 + a_2^2) = (ab)^2 + (ad)(ac). \tag{8}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, wie auch unmittelbar aus Gleichung (5) sich ergiebt

$$\phi_1 = \phi_2. \tag{9}$$

Setzen wir demnach

$$\phi_2 = \phi_1 = \phi, \tag{10}$$

so lautet die Gleichung (8)

$$\phi (a_1^2 + a_2^2) = (ab)^2 + (ad)(ac) = R. \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die wichtige Folgerung, dass das Vorzeichen der Function R für eine beliebige Stelle (x_1, x_2) nach Vollziehung beliebiger Umläufe ungeändert bleibt.

27.

Aus den Gleichungen (5) bis (8) und Gleichungen (10) Nr. 18 ergiebt sich, dass in der Umgebung von $x = k_1$

$$\phi = \frac{1}{\pi}(d_1 f_2 - d_2 f_1) \log \rho_1 + r_1, \tag{1}$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$\phi = \frac{1}{\pi}[(a_1 - d_1)(-2b_2 - c_2 + d_2 - f_2) - (a_2 - d_2)(-2b_1 - c_1 + d_1 - f_1)] \log \rho_2 + r_2, \tag{2}$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$\phi = \frac{1}{\pi}[(2b_1 + c_1 - d_1)(a_2 - c_2 - d_2 - f_2) - (2b_2 + c_2 - d_2)(a_1 - c_1 - d_1 - f_1)] \log \rho_3 + r_3, \tag{3}$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$\phi = \frac{1}{\pi}[(c_1 + f_1)(a_2 + 2b_2 + c_2 - d_2) - (c_2 + f_2)(a_1 + 2b_1 + c_1 - d')] \log \rho_4 + r_4, \tag{4}$$

in der Umgebung von $x = \infty$

$$\phi = \frac{1}{\pi}(c_1 a_2 - c_2 a_1) \log \rho_\infty + r_\infty. \tag{5}$$

Wir haben hierbei in der Umgebung von $x = k_\mu$

$$x - k_\mu = \rho_\mu e^{\psi_\mu i} \tag{6}$$

und in der Umgebung von $x = \infty$

$$\frac{1}{x} = \rho_\infty e^{\psi_\infty i} \tag{7}$$

gesetzt. Die Grössen r_μ und r_∞ erhalten für $\rho_\mu = 0$, bez. $\rho_\infty = 0$ endliche Werthe.

Aus den Gleichungen (1) bis (5) ergiebt sich:

Das Vorzeichen von ϕ in hinlänglicher Nähe von k_1 ist übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von $-\frac{f}{d}$, demnach nach Gleichungen (5) und (6) Nr. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_1 = \int_{k_2}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} : \int_{k_3}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}. \tag{8}$$

In hinlänglicher Nähe von k_2 ist das Vorzeichen von ϕ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$-\frac{(2b - c + d - f)}{a - d},$$

demnach nach Gleichungen (7) und (8) Nr. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_2 = \int_{k_1}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}} : \int_{k_1}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}}. \tag{9}$$

In hinlänglicher Nähe von k_3 ist das Vorzeichen von ϕ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$-\frac{(a - c - d - f)}{2b + c - d},$$

demnach nach Gleichungen (9) und (10) Nr. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_3 = -\int_{k_2}^{k_1} \frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}} : \int_{k_1}^{k_2} \frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}}. \tag{10}$$

In hinlänglicher Nähe von k_4 ist das Vorzeichen von ϕ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\frac{(a + 2b + c - d)}{c + f},$$

demnach nach Gleichungen (11) und (12) Nr. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_4 = \int_{k_1}^{k_2} \frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}} : \int_{k_2}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}}. \tag{11}$$

Endlich ist in hinlänglicher Nähe von $x = \infty$ das Vorzeichen von ϕ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von $-\frac{a}{c}$, demnach mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_\infty = -\int_{k_3}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} : \int_{k_2}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}. \tag{12}$$

Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_\infty$ sind Quotienten von elliptischen Periodicitätsmoduln. Jede derselben lässt sich durch Anwendung einer linearen Substitution in die Form $-\frac{\eta_2}{\eta_1} i$ bringen, nach der Bezeich-

nungsweise meiner Arbeit.[1] Nach den Ergebnissen dieser Abhandlung ist also der imaginäre Theil der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_\infty$ negativ.

Es ergiebt sich also:

Die Funktion ϕ ist in hinlänglicher Nähe der Punkte $x = k_\mu$ und $x = \infty$ **negativ**.

28.

Aus den Gleichungen (5) bis (8) und aus Gleichung (10) Nr. 23 ergiebt sich, dass in der Umgebung von $x = k_1$

$$(1) \qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}(d_1^2 + d_2^2)\log\rho_1 + s_1,$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$(2) \qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}\left\{(a_1 - d_1)^2 + (a_2 - d_2)^2\right\}\log\rho_2 + s_2,$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$(3) \quad (ad) = \frac{1}{\pi^2}\{(2b_1 + c_1 - d_1)(a_2 - c_2 - d_2 - f_2) - (2b_2 + c_2 - d_2)(a_1 - c_1 - d_1 - f_1)\}(\log\rho_3)^2 + s_3'\log\rho_3 + s_3,$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$(4) \quad (ad) = -\frac{1}{\pi^2}\{(a_1 + 2b_1 + c_1 - d_1)(c_2 + f_2) - (a_2 + 2b_2 + c_2 - d_2)(c_1 + f_1)\}(\log\rho_4)^2 + s_4'\log\rho_4 + s_4,$$

endlich in der Umgebung von $x = \infty$

$$(5) \qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}(a_1^2 + a_2^2)\log\rho_\infty + s_\infty.$$

Die Grössen s_μ und s_∞ sind für $\rho_\mu = 0$ bez. $\rho_\infty = 0$, und ebenso s_3', s_4' bez. für $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 0$ endlich.

Aus den Gleichungen (1) bis (5) ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4) voriger Nummer, dass (ad) sowohl in hinlänglicher Nähe der Punkte k_μ als auch in hinlänglicher Nähe von $x = \infty$ einen positiven Werth hat.

29.

Die Function ϕ ist für jeden nicht singulären Werth von x von Null verschieden, so lange die Grössen k_μ endlich

[1] Borch. Journ. B. 83 S. 13.

und von einander verschieden. Nun haben wir in Nr. 27 bewiesen, dass ϕ in der Nähe von $x = \infty$ und von $x = k_\mu$ negativ ist. Da aber diese Function in einer nicht singulären Stelle ihr Vorzeichen nur wechseln könnte, wenn sie daselbst verschwände, so ergiebt sich:

I. So lange die Grössen k_μ endlich und von einander verschieden sind, ist ϕ stets negativ.

Aus Gleichung (11) Nr. 26 ergiebt sich daher:

II. Unter derselben Voraussetzung haben die Grössen (ac), (ad) entgegengesetzte Vorzeichen.

III. In einer nicht singulären Stelle kann keine der Grössen (ac), (ad) verschwinden, weil nach Gleichung (11) Nr. 26 daselbst ϕ einen positiven Werth annehmen müsste.

Da nach Nr. 28 (ad) in der Nähe der singulären Stellen positiv ist, so ergiebt sich aus Satz III.:

IV. Unter derselben Voraussetzung wie in I. und II. ist ausserhalb der singulären Stellen (ad) stets positiv und (ac) negativ.

Wir wollen den Coefficienten von i einer Grösse z mit $I(z)$ bezeichnen, dann ergiebt sich aus den Gleichungen (5) bis (8) und Gleichungen (10) Nr. 23:

Für $x = k_1$

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = 0, \quad I\left(\frac{d}{a}\right) = 0, \tag{1}$$

für $x = k_2, k_3, k_1$

$$I\left(\frac{c}{a}\right) = -I\left(\frac{b}{a}\right), \quad I\left(\frac{d}{a}\right) = I\left(\frac{b}{a}\right), \tag{2}$$

für $x = \infty$

$$I\left(\frac{d}{a}\right) = 0. \tag{3}$$

Hieraus folgt:

V. In einem der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 und in $x = \infty$ ist entweder ϕ oder $I\left(\frac{d}{a}\right)$ Null.

Die Grössen a, b, c, d, f als Funktionen einer der Grössen k_μ aufgefasst, erleiden für die Umläufe dieser Variabeln dieselben Substitutionen, welche in Gleichungen (10) Nr. 18 angegeben sind. Es gelten daher die Sätze I—IV, wenn wir x mit k_μ vertauschen. Diese Sätze können wir alsdann folgendermassen zusammenfassen:

VI. So lange die Grössen x, k_1, k_2, k_3, k_4 endlich und unter einander verschieden sind, haben die Grössen $I(\eta)$, $I(-\zeta)$, $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta)$ stets das negative Vorzeichen.

In der Theorie der Abel'schen Functionen werden Grössen $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ betrachtet,[1] welche mit unseren Variabeln ξ, η, ζ in folgendem Zusammenhange stehen:

$$a_{11} = \pi i \zeta \qquad a_{12} = -\pi i \xi \qquad a_{22} = -\pi i \eta .$$

Die in den obigen Theoremen enthaltenen Resultate, in diese Bezeichnungsweise übertragen, liefern den Satz, dass der reale Theil der quadratischen Form $a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2$ (m, n reale ganze Zahlen) eine definite Form mit negativem Werthe ist. Dieses Theorem, welches zuerst Riemann[2] mit anderen Hülfsmitteln bewiesen, hat sich also in unserer Untersuchung als eine Eigenschaft der Functionen, welche gewissen linearen Differentialgleichungen genügen, ergeben, gleich wie wir das Theorem von den Periodenrelationen[3] in Nr. 18 unserer Untersuchung ebenfalls als einen Ausfluss aus den Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungen erkannt haben.

30.

Wenn wir den Satz V voriger Nummer auf ξ, η, ζ als Functionen der Variabeln x, k_1, k_2 übertragen, so lautet derselbe:

I. Wenn zwei der Variabeln x, k_1, k_2 unter einander oder gleich einer der Grössen k_3, k_4 oder wenn eine der Variabeln unendlich wird, so ist entweder $I(\zeta) = 0$ oder $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0$.

Nach Gleichung (11) Nr. 26 ist

$$I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = \frac{\phi}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{1}$$

Wenn x unzählig viele Umläufe vollzieht, derart dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von x unabhängig wird, so wird, da ϕ ungeändert bleibt, die rechte Seite der Gleichung (1) verschwinden, folglich auch die linke. — Wenn ξ, η, ζ auch als Functionen der Veränderlichen k_1, k_2 betrachtet werden, so lässt sich dieses Resultat folgendermassen aussprechen:

II. Wenn die Veränderlichen x, k_1, k_2 solche Umläufe in unendlicher Anzahl vollziehen, dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von einer oder mehreren dieser Veränderlichen unabhängige Werthe annehmen, so wird

$$I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0. \tag{2}$$

---

[1] Riemann, Ab. F. Nr. 18.

[2] A. a. O. Nr. 21.

[3] Riemann, a. a. O. N. 20.

31.

Wir haben es in Nr. 20 ausgesprochen, dass x, k_1, k_2 eindeutige Functionen von ξ, η, ζ sind, und bemerkt, dass wir den Beweis dieses Satzes im Wesentlichen nach der Methode liefern wollen, welche wir für die elliptische Modulfunction[1] angewendet haben. Diese Methode war im Wesentlichen die folgende.

Sind η_1, η_2 die dort näher bezeichneten Fundamentalintegrale der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln mit der unabhängigen Variabeln u, so beweisen wir zuerst, dass der reale Theil des Quotienten $H = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ in der Nähe der singulären Punkte $u = 0, 1, \infty$ positiv ist. Bezeichnen wir den realen Theil von H mit $\Re(H)$, so kann es kein Gebiet Γ geben, innerhalb dessen $\Re(H)$ negativ ist. Denn es müsste an der Begrenzung von Γ, wo $\Re(H)$ sein Vorzeichen wechselt, $\Re(H)$ verschwinden. Wir zeigen aber daselbst, dass das Vorzeichen von $\Re(H)$ vom Wege der Variabeln u unabhängig sei. Wir können nun den Umlauf von u so wählen, dass innerhalb Γ die Function H also auch $\Re(H)$ nicht unendlich wird. Weil aber innerhalb Γ keiner der Punkte $u = 0, 1, \infty$ sich befindet, so müsste $\Re(H)$ innerhalb Γ identisch verschwinden. Wir zeigen dann, dass für unendlich viele Umläufe, welche H von u unabhängig machen, $\Re(H)$ gegen Null convergirt. Der Gesammtwerthvorrath, den H für alle möglichen Umläufe von u erhält, befindet sich daher auf der positiven Seite der lateralen H-Axe. In diese Axe fallen auch die Werthe von H, welche $u = 0$, $u = 1$ entsprechen. Für die Function u von H, wie sie durch die Differentialgleichung zwischen u und H[2] definirt wird, sind aber $u = 0, 1$ die einzigen wirklichen singulären Punkte. Demnach ist u eine eindeutige Function des Werthvorrathes H.

Genau ebenso verfahren wir in der Frage, die uns gegenwärtig beschäftigt. Aus den Gleichungen (2) Nr. 20, und aus den Sätzen am Schlusse der Nr. 21 und am Schlusse der Nr. 25 Gleichung (9) folgt, dass die einzigen Singularitäten der Grössen x, k_1, k_2 als Functionen der unabhängig von einander sich ändernden Grössen ξ, η, ζ, durch das Zusammenfallen zweier der Grössen x, k_1, k_2, k_3, k_4 oder das Unendlichwerden einer oder mehrerer derselben erhalten werden. Nach Nr. 29 Satz VI ist der Gesammtwerthvorrath V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ, wenn die unabhängigen Variabeln x, k_1, k_2 beliebige Wege beschreiben, so beschaffen, dass $I(\eta)$, $I(-\zeta)$, $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta)$ negativ bleiben. Diejenigen Werthe, welche durch unzählig viele Umläufe

[1] BORCH. Jour. B. 83 S. 13.

[2] S. l. c. p. 25.

von x, k_1, k_2 von solcher Beschaffenheit erzielt werden, dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von einer oder mehreren der Grössen x, k_1, k_2 unabhängig werden, liegen auf der Begrenzung von V (Satz II Nr. 30). Für diese Werthe ist nämlich $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0$. Ebenfalls auf der Begrenzung liegen die oben bezeichneten singulären Stellen von x, k_1, k_2 als Functionen von ξ, η, ζ (Satz I Nr. 30). Für diese ist nämlich entweder $I(\zeta) = 0$ oder $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0$. Hieraus folgt: die Variabeln x, k_1, k_2 sind eindeutige Functionen des Werthvorrathes V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ.

In der That sind diese Functionen x, k_1, k_2 vermittelst der Thetafunction als eindeutige Functionen von ξ, η, ζ darstellbar.

(Fortsetzung folgt.)

Die Functionen des Centralnervensystems der wirbellosen Thiere.

Von Prof. Dr. I. Steiner
in Köln.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

Um ein übersichtliches Bild der Functionen des Centralnervensystems der wirbellosen Thiere entwerfen zu können, werde ich mir erlauben, nicht allein über das Resultat meines diesjährigen Aufenthaltes in Neapel zu berichten, sondern ich will im Zusammenhange das Wesentliche aus meinen Arbeiten der letzten drei Jahre über diesen Gegenstand mittheilen, wovon einzelne nackte Thatsachen, aus dem Zusammenhange heraus, auf der Naturforscher-Versammlung in Wiesbaden (1887) von mir vorgetragen worden sind.

Das Centralnervensystem derjenigen Evertebraten, von denen wir hier sprechen wollen, besteht aus einer grösseren oder kleineren Anzahl mit einander durch Längs- und Quercommissuren zu einer Kette verbundener Ganglien, von denen das vorderste in der Reihe dorsal auf dem Schlunde liegt, während die übrigen sämmtlich ventral gelegen sind. Diese ventrale Kette bezeichnet man deshalb auch als Bauchganglienkette. Ihre Verbindung mit dem dorsalen Schlundganglion wird durch zwei Längscommissuren hergestellt, die, zu beiden Seiten den Schlund umfassend, im Verein mit jenem Ganglion und dem ersten Bauchganglion den sogenannten »Schlundring« bilden, welcher in der Morphologie stets eine grosse Bedeutung gehabt hat.

Entsprechend der Bildung eines Kopfes, der ohne Zweifel besonders bei den höheren Wirbellosen vorhanden ist, hat man, in Anlehnung an die Wirbelthiere, von Seiten der Morphologie schon lange die Frage aufgeworfen, welcher Theil des Centralnervensystems der Wirbellosen als Gehirn zu bezeichnen wäre. Die Discussion, welche sich an die Frage knüpfte, blieb unentschieden, denn noch heutigen Tages nennen die Einen das dorsale Schlundganglion allein das Gehirn (Gegenbaur), während Andere dafür den ganzen

Schlundring in Anspruch nehmen (Fr. Leydig). Die Morphologie reicht hier mit ihrer Methode nicht aus, und die Physiologie, welche sich an der Lösung dieser Aufgabe hätte betheiligen müssen, war vollauf mit anderen Problemen beschäftigt. Freilich war jene Frage nur unter der Voraussetzung zu beantworten, dass es gelingen würde, für das Gehirn der Wirbelthiere eigenartige und charakteristische Functionen zu finden, d. h. Functionen, durch welche das Wirbelthiergehirn eindeutig zu definiren wäre, was indess bisher niemals geglückt war.

Als ich die Leistungen des Gehirns der Fische, der Amphibien und Reptilien vergleichend zusammenstellte, ergab sich eine überraschend einfache Definition des Gehirns der Wirbelthiere, welche folgendermaassen lautet[1]: »Das Gehirn ist definirt durch das allgemeine Bewegungscentrum in Verbindung mit den Leistungen wenigstens eines der höheren Sinnesnerven.«

Die Definition hat neben ihrer grossen Einfachheit noch einen weiteren Vortheil, dass sie nämlich durch einen einzigen Versuch befriedigt wird, insofern als von den beiden Elementen, aus welchen die Definition sich zusammensetzt, das eine Element stets anatomisch gegeben ist. Das ist der höhere Sinnesnerv, dessen Anwesenheit auch seine Function verbürgt. Der eine nothwendige Versuch, welcher anzustellen ist, hat den Nachweis zu führen, dass neben dem Sinnesapparat auch noch das allgemeine Bewegungscentrum vorhanden ist. Dieser Nachweis ist dann erbracht, wenn die einseitige Abtragung des betreffenden nervösen Centraltheiles die Richtung der Bewegung des Thieres so ändert, dass aus der gradlinigen eine kreisförmige Bewegung hervorgeht; eine Bewegungsform, welche unter der landläufigen Bezeichnung »Zwangsbewegung« allgemeiner bekannt ist.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, treten wir nun an die Frage heran, ob die Wirbellosen ein Gehirn besitzen und im Bejahungsfalle, welcher Theil des Centralnervensystems als solches zu bezeichnen ist, wobei noch als selbstverständlich vorausgesetzt werden muss, dass dieses etwaige Gehirn der Wirbellosen identisch mit jenem der Wirbelthiere sein müsse, andernfalls hätte diese Bezeichnung keinen Sinn. Statt jedes einzelne der zahlreichen Ganglien der Kette auf die Anwesenheit des allgemeinen Bewegungscentrums zu untersuchen, verweist uns unsere Definition von vornherein auf das dorsale Schlundganglion, welches allein — wenigstens bei den höheren Wirbellosen — (mit Ausnahme einiger weniger Fälle) die Sinnesnerven trägt.

---

[1] I. Steiner, die Functionen des Centralnervensystems und ihre Phylogenese. Zweite Abtheilung: Die Fische. Verlag von Vieweg u. Sohn. Braunschweig 1888.

Wir beginnen mit den Crustaceen, unter denen der gemeine Flusskrebs, *Astacus fluviatilis*, ein sehr geeignetes Object der Untersuchung darstellt.

Die halbseitige Abtragung des dorsalen Schlundganglions führt ausnahmslos zu einer Kreisbewegung, welche stets nach der unverletzten Seite hin gerichtet ist, so dass also nach rechtsseitiger Abtragung die Bewegung nach links erfolgt und umgekehrt. Es ist nützlich zwei Exemplare in entgegengesetztem Sinne zu operiren, um diese absolute Constanz der einmal eingeschlagenen Richtung in der Bewegung vergleichend betrachten zu können. So operirte Krebse konnten in fliessendem Wasser drei Wochen und länger in ihren Kreisbewegungen beobachtet werden.

Es war vorauszusagen, dass die einseitige Durchschneidung der dorso-ventralen Commissur dasselbe Resultat der Kreisbewegung erzeugen müsse, was in der That ebenso ausnahmslos der Fall ist. Dieser Versuch ist sogar dem ersten bei Weitem überlegen und seine Resultate sind auch klarer, weil er, da die Commissur nur die Leitungsbahnen enthält, einfachere und reinere Verhältnisse darbietet.

Es hatte kein Interesse, dem Flusskrebs sehr nahe stehende Formen, wie den Hummer, die Languste u. a. zu untersuchen, welche ohne Zweifel sich ebenso verhalten würden, wie der Krebs selbst. Dagegen musste die Gruppe der Brachyuren, der sogenannten ungeschwänzten Krebse, unsere Aufmerksamkeit deshalb besonders fesseln, weil hier die ganze Bauchkette in e i n grosses Ganglion zusammengeflossen ist, sodass das ganze Centralnervensystem gewissermaassen nur durch einen Schlundring dargestellt wird.

Zu den Versuchen dienten die in Neapel sehr häufigen Formen von *Carcinus maenas* und *Maja verrucosa*. Sowohl die halbseitige Abtragung des dorsalen Schlundganglions, als die einseitige Durchschneidung der Dorsoventralcommissur gaben ausnahmslos Kreisbewegungen nach der unverletzten Seite. Die Beobachtungen wurden in der Regel nach acht Tagen abgebrochen.

Von niedriger stehenden Krebsen konnte in gleicher Weise für die Mauerassel (*Oniscus murarius*) nachgewiesen werden, dass die einseitige Abtragung des dorsalen Schlundganglions ebenfalls Kreisbewegungen nach der gegenüberliegenden Seite auslöst.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass das dorsale Schlundganglion der genannten Krebse, da es das allgemeine Bewegungscentrum und die Ursprungsstätte höherer Sinnesnerven (Auge, Ohr u. a.) enthält, das Gehirn ist. Wir können erwarten, dass dieses Resultat sich für alle Crustaceen wiederholt.

Wir kommen zu den Insecten. Unter diesen ist *Blatta orientalis* (Schwabenkäfer) ein sehr handliches und leicht zu beschaffendes Material. Die einseitige Abtragung des Dorsalganglions geschieht in der Weise, dass man durch einen scharfen Scheerenschnitt die eine Seite des Kopfes abträgt, wobei man den Schnitt nach hinten etwas schief verlaufen lässt. Auf der Schnittfläche sieht man das durchschnittene Ganglion. Diese Operation führt ausnahmslos zu Kreisbewegungen nach der gegenüber liegenden Seite.

Von Käfern wurden mit demselben Resultate noch untersucht der Goldkäfer *(Carabus auratus)*, der Todtenkäfer *(Blaps mortisaga)*, der Rosskäfer *(Geotrupes vernalis)* und manche andere.

Von den Fliegen die gemeine Stubenfliege *(Musca domestica)* und die Wespe *(Vespa vulgaris)*.

Unter den Schmetterlingen dienten dem Versuche der Kohlweissling *(Pieris brassica)* und der Schwalbenschwanz *(Papilio Machaon)*. Alle diese Thiere machten nach einseitiger Abtragung des Kopfes Kreisbewegungen nach der unverletzten Seite.

Da das dorsale Schlundganglion also das allgemeine Bewegungscentrum enthält und der Träger von Sinnesnerven ist, so folgt, dass die untersuchten Insecten sämmtlich ein Gehirn besitzen, welches durch das dorsale Schlundganglion repraesentirt wird.

Myriapoden zu untersuchen war mir nur dadurch möglich, dass mein Freund Prof. Grassi in Catania mir von dort eine Anzahl *Julus terrestris* sandte, von einer Grösse, wie man sie hier nicht kennt. Die Thiere sind äusserst zierlich und in ihren Bewegungen hinreichend lebhaft und bestimmt, um Störungen derselben ganz sicher beurtheilen zu können.

Unter Verzicht auf die halbseitige Abtragung des Dorsalganglions selbst, versuchte ich die Dorsoventralcommissur zu durchschneiden. Wie die anatomische Lage dieser Commissur voraussagen lässt, geschieht dies mit Sicherheit, wenn man die eine Branche einer feinen Scheere in die Mundöffnung schiebt und das Kopfsegment seitlich und horizontal durchschneidet. Eine grössere Anzahl dieser Thiere, bald auf der einen, bald auf der anderen Seite in der angegebenen Weise operirt, lehrte, dass sie ebenfalls in Kreisbewegungen gingen und zwar mit ausserordentlicher Regelmässigkeit nach der unverletzten Seite hin, d. h. genau so, wie die anderen Arthropoden und die Wirbelthiere.

Es folgt daraus, dass auch die Myriapoden in ihrem dorsalen Schlundganglion ein echtes Gehirn besitzen.[1]

[1] Über die Arachniden kann ich keine Mittheilung machen, weil merkwürdigerweise keine unserer Hausspinnen bisher die Operation überlebt hat.

Das Bauchmark der Arthropoden ist dem Rückenmarke der Wirbelthiere analog. Versuche, die ich am Bauchmarke der Crustaceen gemacht habe, sollen als weniger wesentlich in der ausführlichen Mittheilung zur Darstellung gelangen. Indess will ich hier hervorheben, dass man im Unterschlundganglion der Crustaceen auf eine Kreuzung von Nervenbahnen stösst, welche vollkommen identisch mit der Pyramidenkreuzung im Nackenmarke der Wirbelthiere ist. Durch einfache Folgerung lässt sich weiter ableiten, dass diese Kreuzung bei den übrigen Gliederthieren ebenso vorhanden sein muss.

Indem wir zu den Mollusken übergehen, bemerke ich, dass bei denselben die ganze Bauchkette durch ein einziges Ganglion vertreten wird, welches Pedalganglion genannt wird, weil von demselben die bewegenden Nerven zu dem Locomotionsorgane, dem sogenannten Fusse oder einem diesem aequivalenten Organe (z. B. Flosse) ausgesandt werden.

Ein für unsere Zwecke geradezu ideales Object ist eine pelagische Schnecke, *Pterotrachea mutica*, wovon mir zahlreiche Exemplare von etwa 10^{cm} Länge zu Gebote standen. Das Thier ist vollkommen durchsichtig, so dass man die beiden uns interessirenden Ganglien, sowie die sie verbindenden Nervenfasern ganz direct ohne jede Praeparation sehen und mit glühender Nadel vernichten kann. Dazu kommt, dass diese Thiere gegen alle Erwartung hinreichend resistent sind, einige Misshandlung ertragen und sich nicht, wie fast alle Mollusken, contrahiren, wenn sie berührt werden, ein Umstand, der vivisectorische Eingriffe unter Umständen ganz verbietet.

Unsere Schnecke hat den gewöhnlichen Schneckenfuss in eine Flosse umgewandelt, welche durch seitliches Schlagen abwechselnd nach rechts und nach links das Thier in rasche Bewegung versetzt. Einen zweiten, weit kräftigeren Modus der Locomotion erzeugt das Thier durch peristaltische Bewegungen des ganzen Leibes.

Wenn man nun die sehr leichte Operation ausführt und mit einer glühenden Nadel das grosse dorsale Schlundganglion, welches zwischen den grossen Augen liegt, halbseitig zerstört, so wird weder die eine noch die andere der beiden genannten Bewegungsformen irgendwie verändert. Das dorsale Schlundganglion hat also keine unmittelbare Einwirkung auf die Locomotion und ist demnach auch nicht Träger des allgemeinen Bewegungscentrums. Daher kann man auch kurzweg den Kopf des Thieres abtragen, ohne seine Beweglichkeit irgendwie zu verändern oder zu stören. In der That ist dieses Experiment den Fischern sehr gut bekannt, da solche geköpfte Thiere, welche draussen auf der See auf irgend eine Weise um ihren Kopf gekommen sind, öfter von der See hereingebracht werden, und der

Verlust ihres Kopfes keinen Defect in ihrer Beweglichkeit bedeutet. Sobald man aber mit der glühenden Nadel das Pedalganglion zerstört hat, ist, wie vorauszusehen war, sogleich und für immer alle Locomotion aufgehoben. Also das Pedalganglion allein hat die Herrschaft über die gesammte Locomotion dieses Thieres.

Von anderen Mollusken kommen natürlich nur nackte Schnecken in Betracht, an denen es im Golfe von Neapel nicht fehlt. Aber obgleich solche von sehr ansehnlicher Grösse, bis zu der einer Mannesfaust, zu haben sind, bieten sie dem Experimente grosse Schwierigkeiten durch die allseitige Contraction, wenn sie irgendwo angegriffen werden. Eine solche Schnecke ist z. B. *Pleurobranchea Meckelii*, ebenso *Aplysia depilans*; beide sehr gewöhnlich und bekannt im Golfe von Neapel.

Einer allein ist hier nicht im Stande erfolgreich aufzutreten, aber unter Mithülfe der sehr sachkundigen Hand des Hrn. Dr. Schiemenz, Assistenten der Station, der seit Jahren Mollusken-Anatomie studirt, war es nicht schwer, die Operation auszuführen. Wir erleichterten uns die Ausführung, bei der Alles auf sehr grosse Geschwindigkeit ankommt, noch dadurch, dass wir anstatt das dorsale Schlundganglion einseitig zu zerstören, die davon abgehende Commissur, d. h. die sogenannte Dorsalventralcommissur durchschnitten. Das Resultat war das gleiche wie bei *Pterotrachea*, denn auch hier blieben die Bewegungen geradlinig.

Wir schliessen daher, dass bei den genannten Mollusken das dorsale Schlundganglion, obgleich es Sinnesnerven trägt, doch kein Gehirn ist, weil es kein allgemeines Bewegungscentrum besitzt.

Dieses neue Verhältniss wird sehr anschaulich dargestellt, wenn wir das Resultat den Versuchen an den Krabben gegenüberstellen, mit denen sehr grosse morphologische Ähnlichkeit, sogar Gleichheit in der äusseren Anordnung des Centralnervensystems besteht: Bei beiden ist sozusagen nur ein Schlundring vorhanden, d. h. ein Dorsal- und ein Ventralganglion, welche durch zwei seitliche Commissuren verbunden sind. Dort ist die halbseitige Abtragung des dorsalen Schlundganglions von Kreisbewegungen gefolgt, das Ganglion ist also Gehirn: hier aber lässt die halbseitige Abtragung desselben Ganglions die geradlinige Bewegung fortbestehen, das Ganglion ist also nicht Gehirn, sondern nur Sinnescentrum.

Wenn das Pedalganglion, wie oben gezeigt, das Ganglion der Bewegung ist, so müsste seine einseitige Zerstörung eine Kreisbewegung erzeugen. Dieser Versuch, dessen Ausführung aus mancherlei Gründen wünschenswerth erscheinen musste, kann an den gewöhnlichen Schnecken wegen technischer Schwierigkeiten nicht ausgeführt werden.

Obgleich bei *Pterotrachea* das Pedalganglion als Ganzes sehr leicht zu erreichen ist, habe ich mich vergeblich bemüht, dasselbe mit Sicherheit einseitig zu zerstören. Dagegen gelingt der Versuch vortrefflich bei einer anderen, reizenden pelagischen Schnecke, der *Cymbulia Peronii*, welche in poetischer Weise von den Franzosen als »*Papillon de mer*« bezeichnet wird. Die einseitige Zerstörung des Pedalganglions erzeugt eine Kreisbewegung um den gelähmten Flügel, d. h. um die verwundete Seite herum. Diese Bewegung ist zwar ebenfalls eine Zwangsbewegung, aber eine unächte, weil sie mit peripherer Lähmung des Bewegungsorgans einhergeht.

Ein besonderes Interesse unter den Mollusken beansprucht die Gruppe der Cephalopoden, welche auch für die Morphologie seit langer Zeit schon Gegenstand lebhafter Discussion gewesen ist. Am geeignetsten für das Experiment ist der gemeine Krake, *Octopus vulgaris*, sowohl wegen seines häufigen Vorkommens, als auch wegen seiner ausserordentlichen Resistenz gegenüber operativen Eingriffen.

Das Centralnervensystem der Cephalopoden, obgleich principiell gleich dem der übrigen Mollusken, weicht doch im Einzelnen ein wenig in seinem Bau ab und bedarf deshalb einiger Erläuterungen. Wir haben hier ebenfalls ein dorsales Schlundganglion und ein ventrales Ganglion; letzteres aber besteht aus drei deutlich gesonderten Ganglien, welche von vorn nach hinten gezählt sind das Brachial-, das Pedal- und das Visceral-Ganglion. Auf jeder Seite befinden sich zur Verbindung der dorsalen mit der ventralen Ganglienmasse zwei Commissuren, nämlich die dorso-brachiale und dorso-pedale Commissur. Die ganze Nervenmasse liegt in einer Knorpelkapsel, welche durchaus analog dem Schädel der Wirbelthiere ist. Ausserhalb dieser Kapsel liegt dann noch in der Augenhöhlenkapsel ein grosses Opticusganglion, welches durch eine kurze Commissur mit dem unteren Theile der dorso-pedalen Commissur zusammenhängt. Andere Theile des Nervensystems interessiren uns hier nicht weiter.

Trägt man das Dorsalganglion einseitig ab oder durchschneidet die beiden Commissuren der einen Seite, so wird in den Lebensäusserungen des Thieres auch nicht die geringste Veränderung erzeugt, denn es bewegt sich spontan, wie vorher, überfällt mit grossem Geschick seine Beute *(Carcinus maenas)* und verzehrt sie. Anders aber wird das Bild, wenn man das dorsale Ganglion ganz abträgt. Zwar ist die Beweglichkeit des Thieres in ihrer doppelten Form erhalten, denn es kriecht mit Hülfe seiner Arme oder schiesst pfeilschnell durch die Fluthen, wenn der Trichter sich rhythmisch entleert, aber diese Bewegungen erfolgen nicht mehr spontan, sondern nur auf Reiz, und ebensowenig nimmt er spontan seine Nahrung. Während

der Krake, mit hervorragenden Geisteskräften unter seinesgleichen ausgerüstet, sonst mit grosser Aufmerksamkeit seine Umgebung beobachtet, sitzt er jetzt theilnahmlos, wie blödsinnig da, und nur die regelmässigen Athemzüge zeugen von erhaltenem Leben. Auch sein Gesicht ist erhalten, denn er weicht zurück, wenn man mit einem Stab auf sein Auge zugeht.

Gehirn ist das Dorsalganglion nicht, aber es ist Grosshirn, denn es trägt alle jene Functionen, welche wir sonst nur in dem Grosshirn der Wirbelthiere zu finden gewohnt sind. Kein Gehirn zu besitzen, aber ein Grosshirn, klingt befremdlich und sogar paradox, aber vielleicht nur, weil wir einen solchen Fall bisher noch nicht erlebt haben. Es ist indess nicht schwer, den Mechanismus einer solchen Bildung an der Hand früherer Versuche und Beobachtungen zu begreifen.

In dem zweiten Theile meiner »Functionen des Centralnervensystems« (S. 100) habe ich den folgenden Satz abgeleitet: Das Grosshirn der Wirbelthiere hat sich phylogenetisch aus dem Riechcentrum entwickelt. Wenn aber ein Sinnescentrum, argumentirte ich weiter, eine solche Differenzirung einzugehen vermag, so muss man diese Möglichkeit auch jedem anderen Sinnescentrum z. B. dem Sehcentrum, zusprechen. Das heisst aber nichts Anderes, als dass, wo ein Sinnescentrum vorhanden ist, unter geeigneten Bedingungen daraus ein Grosshirn sich abzweigen kann.

Unser *Octopus* hat aber Sinnescentren, also war vollauf Gelegenheit zur Bildung eines Grosshirns gegeben. Von den beiden, beim *Octopus* nachgewiesenen Sinnen, dem Gesichts- und Gehörsinn, ist es wahrscheinlich der erstere, welcher bei der Mächtigkeit seiner Entwickelung dem Grosshirn zum Ursprung gedient hat.

Nebenbei war es hier möglich, durch das Experiment eine Frage zu entscheiden, welche in der Morphologie wohl bearbeitet, aber nicht zum Austrag gebracht werden konnte. Es handelt sich um die Arme der Cephalopoden, welche in Analogie zu ähnlichen, wenn auch kleineren Bildungen anderer Evertebraten als dem Kopfe angehörig betrachtet wurden, während man sie andererseits auch dem Fusse zurechnen kann. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Ansichten liegt in dem Nachweis des letzten Ursprungs der Tentakelnerven. Sichtbar entstammen diese Nerven dem Brachialganglion, aber sie können entweder in demselben selbst wurzeln oder sie können im Dorsal- oder Pedalganglion ihren letzten Ursprung finden. Dass sie im Dorsalganglion nicht wurzeln, geht aus den obigen Versuchen schon hervor, in denen weder einseitige noch totale Abtragung desselben die Beweglichkeit des Thieres beeinträchtigte. Macht man aber einseitige Schnitte

in das Brachial- oder Pedalganglion, so bekommt man auch in letzterem Falle Kreisgang mit Lähmung der vier Arme der verwundeten Seite, d. h. also, die Nerven der Tentakel wurzeln im Pedalganglion und die Tentakel gehören demnach dem Fusse, nicht dem Kopfe an. Dieses Resultat dürfte ein definitives sein, da auch von morphologischer Seite auf der zoologischen Station in Neapel in dieser Zeit der Ursprung der Tentakelnerven mit Hülfe von Serienschnitten bis in das Pedalganglion hinein verfolgt werden konnte.[1]

Wir kommen zu den Anneliden oder Ringelwürmern, einer an Arten sehr reichen Gruppe. Zu dem dorsalen Schlundganglion tritt eine Bauchkette, welche so viele Ganglien enthält, als Leibessegmente vorhanden sind. Da diese letzteren sehr zahlreich auftreten, so ist auch die Bauchkette langgestreckt und aus vielen Ganglien zusammengesetzt.

Es standen mir folgende Formen zu Gebote: *Ophelia*, *Eunice*, *Diopatra napoletana* und *Nephthys scolopendroides*. Auch hier handelte es sich wieder darum, das dorsale Schlundganglion halbseitig abzutragen. Wenn man bedenkt, dass dieses Ganglion nicht grösser ist, als der Kopf einer Insectennadel, so wird man verstehen, dass ich längere Zeit vergeblich mich um die Ausführung dieses Versuches bemühte, um endlich zu der Überzeugung zu kommen, dass der Versuch in der bei den anderen Thieren geübten Methode unausführbar ist. Denn man hat nicht allein die Operation zu machen, sondern auch durch die Section den Nachweis zu liefern, dass die Operation in dem gedachten Sinne ausgeführt worden ist. Nachdem ich diese Überzeugung gewonnen hatte, verfielen wir[2] auf einen sehr einfachen Ausweg, nämlich statt des Dorsalganglions, die abgehende Dorsoventralcommissur der einen Seite zu durchschneiden und den Nachweis der Durchschneidung durch Anfertigung von Schnittserien zu führen. An der Hand vorhandener Abbildungen liess sich genau der Zug bestimmen, welchen das schneidende Instrument am Kopfsegmente der genannten Anneliden nehmen musste, um mit grösster Wahrscheinlichkeit die Commissur und nur diese einseitig zu durchschneiden.

Wir begannen mit *Ophelia*. Die Commissur wurde theils rechts, theils links bei einigen Exemplaren durchschnitten. Hatte man sie in's Wasser zurückgebracht und ihnen einige Zeit der Erholung gegönnt, so war keine Veränderung in ihren Bewegungen wahrzunehmen.

[1] G. Jatta: La innervazione della braccia dei Cefalopodi. Bollettino della Società di Naturalisti in Napoli. 1889. p. 129—132.

[2] Ich hatte mich bei diesen Versuchen der freundlichen Unterstützung von Dr. Ed. Meyer zu erfreuen, der diese Anneliden grösstentheils aus eigener Anschauung kennt.

Bei diesem Annelid ist es möglich, die Controle über die Durchschneidung noch unter der Lupe auszuführen. Die sorgfältige und vorsichtige Praeparation ergiebt die wohlgelungene Durchschneidung beispielsweise der rechten Commissur: man sieht in der Schnittwunde deren beide Stümpfe zum Dorsalganglion einerseits und andererseits zum ersten Bauchganglion verlaufen, während die linksseitige Commissur unversehrt ist. Hieraus folgt, dass die einseitige Durchschneidung der Dorsoventralcommissur bei *Ophelia* keine Kreisbewegung hervorruft.

An diesem Versuche wäre etwa auszusetzen, dass die Bewegungen dieser Thiere nicht lebhaft genug sind, um ein endgültiges Urtheil zu gestatten. Ohne die Berechtigung dieses Einwandes direct zuzugeben, können die weitgehendsten Wünsche in dieser Richtung durch die Versuche an *Nephthys* befriedigt werden. Die schlangenartigen Bewegungen dieses Wurmes sind nicht allein von ausserordentlicher Zierlichkeit, sondern auch von einer Behendigkeit, die ich den Bewegungen der Schlangen an die Seite stellen möchte, wie ich sie zur Zeit in Sicilien im Freien gesehen habe.

An mehreren Exemplaren wurde auch hier die eine oder die andere Commissur durchschnitten: an keinem dieser Exemplare konnte irgend eine Veränderung ihrer zierlichen und lebhaften Bewegungen beobachtet werden. Die Zerlegung in Serien lieferte bei diesen Thieren den Nachweis, dass die Operation vollkommen correct ausgeführt war. Daraus aber folgt, dass auch bei *Nephthys* die einseitige Durchschneidung der Dorsoventralcommissur keine Zwangsbewegungen erzeugt.

Derselbe Versuch wurde bei *Eunice* und *Diopatra napoletana* ausgeführt. Namentlich von letzterer Art wurden 12—15 Exemplare operirt, ohne dass auch nur ein einziges Mal irgend welche Veränderung in ihrer geradlinigen Fortbewegung beobachtet worden wäre. Die Controle der Durchschneidung konnte bei diesen Anneliden wegen des harten Chitinkiefers nicht gemacht werden, an dem jedes Messer erlahmte. Doch ist an dem Gelingen der Durchschneidung nicht zu zweifeln, da die Lage der Commissur von aussen ganz genau bestimmbar ist.

Da den untersuchten Anneliden ein allgemeines Bewegungscentrum fehlt, so ist das Dorsalschlundganglion ebensowenig Gehirn, sondern nur Sinnescentrum.

Unter den unsegmentirten Würmern hat der Leberegel *(Distoma hepaticum)* das einfachste Centralnervensystem, welches aus einem dorsal auf dem Schlunde gelegenen Ganglion besteht, das nach vorn die Sinnesorgane versorgt, nach hinten zwei lange Nerven entsendet, welche die Musculatur innerviren. Mit unseren bisher gewonnenen

Kenntnissen können wir mit Sicherheit die Erscheinungen vorausbestimmen, welche der einseitigen Zerstörung dieses Ganglions folgen müssen; nämlich Kreisbewegung nach der verletzten Seite mit Lähmung nach derselben. Den Versuch selbst auszuführen, musste ich mir aus Mangel an Material versagen.

Das Resultat der Versuche lässt sich in kurzen Sätzen folgendermaassen zusammenfassen:

1. Die Arthropoden haben ein echtes Gehirn wie die Wirbelthiere, welches durch das dorsale Schlundganglion repraesentirt wird.

2. Die übrigen Wirbellosen haben kein Gehirn. Unter ihnen hat man zu unterscheiden

a) Mollusken und Anneliden, bei denen das dorsale Schlundganglion nach unseren augenblicklichen Kenntnissen nur Sinnescentrum ist.

b) Unsegmentirte Würmer (Typus: *Distoma hepaticum*), bei denen das dorsale Schlundganglion das gesammte Centralnervensystem ausmacht: einerseits primäres Centrum der Bewegungsorgane, zugleich aber auch Sinnescentrum ist.

Ob zu diesen drei ganz distincten Typen von Nervensystemen ein vierter durch die tiefer stehenden Wirbellosen, wie Echinodermen und Coelenteraten, hinzutreten wird, kann erst eine weitere Untersuchung lehren, wofür vielleicht genügend experimentelles Material in früheren Versuchen vorliegt.

Indem ich diesen Bericht schliesse, drücke ich der Akademie meinen ergebensten Dank für die mir gewährte Unterstützung aus, sowie der Grossherzoglich Badischen Regierung in Karlsruhe für die gütige Überweisung ihres Arbeitsplatzes auf der zoologischen Station in Neapel.

Ausgegeben am 16. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



1890.
III.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

16. Januar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Conze las über die attischen Grabreliefs.

Die Mittheilung wird an einem anderen Ort erscheinen.

2. Die physikalisch-mathematische Classe hat bewilligt: 1500 Mark Hrn. Prof. Dr. Matthiessen in Rostock zu einer Reise nach den Fangstationen der Walfische am nördlichen Eismeer behufs ophthalmologischer Untersuchungen an Cetaceen; 1800 Mark dem Privatdocenten Hrn. Dr. Rohde in Breslau zu Untersuchungen über das Centralnervensystem der Haifische und Echinodermen auf der zoologischen Station in Neapel; 600 Mark Hrn. Dr. Schellong in Königsberg zur Bearbeitung des von ihm auf Neu-Guinea gesammelten anthropologischen Materials.

3. Die philosophisch-historische Classe hat bewilligt: 500 Mark Hrn. Prof. Dr. Winkler in Breslau zu einer Reise nach Petersburg zur Ausbeutung der dortigen Materialien für die Samojedische, Tungusische und Türkische Sprache.



Sehsphaere und Augenbewegungen.

Von Hermann Munk.

Nach gemeinschaftlich mit Hrn. Dr. Obregia aus Bucarest ausgeführten Versuchen.

(Vorgetragen am 21. November 1889 [s. diese Berichte. 1889. S. 1037].)

Je heftiger der Widerspruch gewesen ist, welchen meine Ermittelungen über die Sehsphaeren der Säugethiere von gewissen Seiten fanden, und je länger es gedauert hat, ehe der Widerspruch überwunden wurde, desto mehr werden, glaube ich, diese Ermittelungen jetzt als ein sicherer Erwerb gelten dürfen. Nur ein wesentlicher Punkt macht noch eine Ausnahme. Man ist wohl darüber einig, dass jeder Sehsphaere beim Affen (und Menschen) die gleichseitigen Hälften beider Netzhäute, beim Hunde etwa das laterale Viertel der gleichseitigen Netzhaut und die medialen drei Viertel der gegenseitigen Netzhaut zugehören. Aber für die festen Beziehungen, welche ich weiter zwischen den Netzhautbezirken einerseits und den Rindenbezirken der Hinterhauptslappen andererseits auffand, für die sogenannte Projection der Netzhäute auf die Sehsphaeren steht die Anerkennung noch aus. Diese Anerkennung zu fördern, wird die Aufgabe der vorliegenden Mittheilung sein.

Die erste Kenntniss des Sachverhaltes habe ich schon auf einer frühen Stufe meiner Untersuchungen gewonnen. Exstirpirte ich ein beliebiges, nicht zu kleines Stück der Rinde eines Hinterhauptslappens, so traten Sehstörungen auf, welche nur verständlich waren, wenn jetzt gewissermaassen ein zweiter blinder Fleck an der einen Netzhaut bestand[1]. Fällt danach mit der Exstirpation einer zusammenhängenden Rindenpartie immer die Wahrnehmung für eine zusammenhängende Partie der lichtempfindlichen Netzhautelemente aus, so kann es, wie ich sagte, nicht anders sein, als dass die centralen Elemente

[1] Über die Functionen der Grosshirnrinde. Gesammelte Mittheilungen. Berlin 1881. S. 31—4; 38.

der Sehsphaere, in welchen die Opticusfasern enden und die Gesichtswahrnehmung statthat, regelmässig und continuirlich angeordnet sind wie die lichtempfindlichen Netzhautelemente, von welchen die Opticusfasern entspringen, derart dass benachbarten Netzhautelementen immer benachbarte wahrnehmende Rindenelemente entsprechen. Aber die ohnehin zarten Beobachtungen waren bei diesen Versuchen noch dadurch erschwert, dass die Störungen sehr vergänglicher Natur waren, indem das Thier auch den neuen blinden Fleck bald vernachlässigen lernte. Ich habe deshalb später in systematischer Untersuchung am Hunde grosse und passend gewählte Stücke einer Sehsphaere entfernt, abwechselnd die vordere und die hintere, die mediale und die laterale Hälfte u. s. w., und durch die nunmehr andauernd zu beobachtenden Sehstörungen die Beziehungen der Netzhäute zu den Sehsphaeren genauer bestimmt[1]. Die Netzhaut war danach derart auf die Sehsphaere projicirt zu denken, dass der obere Netzhautrand dem vorderen Sehsphaerenrande, der untere Netzhautrand dem hinteren Sehsphaerenrande, der mediale Netzhautrand dem medialen Sehsphaerenrande, endlich, soweit die Netzhaut der einen und die Sehsphaere der anderen Seite überhaupt zusammengehören, der laterale Netzhautrand dem lateralen Sehsphaerenrande entspricht. Schliesslich habe ich auch noch mit ebensolchen Partialexstirpationen der einen Sehsphaere Totalexstirpationen der zweiten Sehsphaere am Hunde verbunden, so dass bloss ein einziger zusammenhängender Rest von den Sehsphaeren erhalten blieb[2]: diese Versuche waren am schwierigsten auszuführen, aber dafür, wo sie gelangen, die vorermittelte Projection auf's einfachste und klarste zu erkennen. Beim Affen habe ich der Untersuchung nicht die gleiche Ausdehnung gegeben. Hier zeigt, auf Querschnitten durch den Hinterhauptslappen, die Faltung von dessen Rinde, im Gegensatze zu ihrer grossen Einfachheit beim Hunde, eine ansehnliche Verwickelung; und damit waren Schwierigkeiten gegeben, welche sich nicht überwinden liessen. Ich habe mich deshalb damit begnügt, durch verschiedene grössere Partialexstirpationen festzustellen, dass, wie zu erwarten, im Princip dieselbe Projection beim Affen wie beim Hunde besteht[3].

Eine Wiederholung meiner Untersuchung ist während des Jahrzehntes nicht erfolgt, und man hat von der Projection einerseits wie von einer grossen Entdeckung, andererseits fast wie von einer Fabel gesprochen. Sie musste ja wenig gelten, wo man die Abhängigkeit

---

[1] Ebenda, S. 79—94.
[2] Ebenda, S. 104.
[3] Ebenda, S. 38; 126—7. — du Bois-Reymond's Archiv, 1881. S. 457—9.

des einfachsten Sehens vom Grosshirn, vollends die Sehsphaeren bestritt; und nur ebenso natürlich war es, dass man ebendort die zarten Stützen nicht auffand, welche schon jede grössere Exstirpation im Bereiche der Hinterhauptslappen für die Projection darbietet. Auch sind pathologische Erfahrungen am Menschen, während sie für meine übrigen Ermittelungen bezüglich der Sehsphaeren reichlich sich einstellten, nur spärlich zu gunsten der Projection beigebracht worden, wohl weniger infolge der Seltenheit der Krankheitsfälle, als infolge der Schwierigkeit der Beobachtungen. Bloss ein einzelnes Versuchsergebniss ist schliesslich für die Projection eingetreten. Von zwei Affen, welchen die HH. Sanger Brown und E. A. Schäfer die beiden Hinterhauptslappen abgetragen hatten, war der eine für die Dauer ganz blind, der andere jedoch nur fast blind, indem hier ein kleiner Theil des Gesichtsfeldes erhalten war, so dass hoch vorgehaltene Gegenstände gesehen wurden; und es zeigte sich, dass im letzteren Falle die Exstirpation an der unteren Fläche der Hemisphaeren nicht so weit nach vorn sich erstreckte wie im ersteren Falle[1]. Indessen haben sich mir selber bei meinen zahlreichen Sehsphaeren-Exstirpationen ungesucht immer neue Bestätigungen der Projection zugefunden in Fällen, in welchen die beabsichtigte Totalexstirpation beider Sehsphaeren an der einen oder der anderen Sehsphaere nicht vollkommen gelungen war. Einfachere und leichtere beweisende Versuche, als ich beschrieben, habe ich jedoch nicht aufzufinden vermocht.

Neuerdings hat nun ein anderer Weg wieder auf die Projection geführt. Hr. Schäfer[2] fand beim Affen, dass durch Reizung mit Inductionsströmen von der ganzen Rinde des Hinterhauptslappens aus associirte Augenbewegungen herbeigeführt werden. Die Augen gehen immer nach der dem gereizten Lappen entgegengesetzten Seite; und sie gehen zugleich nach unten, wenn die Reizung in der oberen (oder vorderen), nach oben, wenn sie in der unteren (oder hinteren) Zone des Hinterhauptslappens erfolgt, beidemal am stärksten, wenn die Elektroden der medialen Oberfläche des Lappens oder deren Nachbarschaft angelegt sind. Die intermediäre Zone, von welcher aus reine Seitenbewegungen erhalten werden, ist aussen breit und verengt sich nach innen, so dass sie auf der medialen Oberfläche des Lappens nur schmal ist. Gewöhnlich war die Aufwärtsbewegung der Augen von einer Hebung, die Abwärtsbewegung von einer Senkung der oberen Augenlider begleitet; aber diese Augenlidbewegungen waren

[1] Philos. Transact. of the R. Soc. of London, Vol. 179 (1888), B, p. 315—7; 321—3. — Brain: a Journal of Neurology, Vol. X (1888), p. 370—1; Vol. XI, p. 1.

[2] Brain, Vol. XI, p. 1—6. — Ich führe hier alles wesentliche möglichst wortgetreu an.

bei den Versuchen ebensowenig regelmässig, wie die Veränderungen der Pupillen, welche manchmal die Augenbewegungen begleiteten. Soweit sich beobachten liess, blieben die Sehaxen immer parallel, wenn nur eine Hemisphaere gereizt wurde. Einmal, als die Elektroden auf correspondirende Punkte der medialen Oberflächen beider Hemisphaeren gesetzt waren, kam es zu einer schwachen Convergenz der Sehaxen; aber dieser Erfolg war nicht ausgesprochen oder constant genug, um viel Gewicht darauf legen zu lassen. Nehmen wir an, sagt Hr. Schäfer, dass diese verschiedenen Augenbewegungen die Folge oder Begleiterscheinungen subjectiver Gesichtsempfindungen sind, welche die Reizung herbeiführt, und dass die Bewegungen die Richtung dorthin nehmen, wohin jene Empfindungen nach aussen gesetzt werden, so zeigen die Versuche eine gewisse Verbindung zwischen den Theilen der Hirnsehfläche und der Netzhäute an: eine Verbindung, welche dahin sich bestimmen lässt, dass 1. die ganze Sehfläche einer Hemisphaere verbunden ist mit der gleichseitigen Hälfte beider Netzhäute; 2. die obere Zone der Sehfläche einer Hemisphaere mit dem oberen Theile, die untere Zone mit dem unteren Theile, die intermediäre Zone mit dem mittleren Theile der gleichseitigen Hälfte beider Netzhäute verbunden ist.

Man hat hier eine vollkommene Übereinstimmung mit meinen Ermittelungen. Aber dabei hält sich Hr. Schäfer nicht auf, sondern er fährt folgendermaassen fort: »Wir können diese Beziehungen schematisch darstellen, indem wir die Sehflächen beider Hemisphaeren an der grossen Längsfissur vereinigt annehmen und jede Netzhaut ausgebreitet und in ihrer natürlichen Lage auf die vereinte Fläche projicirt denken. Dann übersieht man, dass die identischen Punkte beider Netzhäute einer und derselben Stelle der Hirnrinde entsprechen; dass die obere Hälfte jeder Netzhaut auf den oberen und die untere Hälfte auf den unteren Theil der vereinten Sehfläche fällt, dass die innere Hälfte der einen und die äussere Hälfte der anderen Netzhaut auf dieselbe Hemisphaere fallen, und dass eine senkrechte Zone, welche die Centren beider Netzhäute enthält, dem medialen Theile der vereinten Sehfläche entspricht. Das würde die Theile der Netzhaut, welche beim directen oder centralen Sehen betheiligt sind, mit einem Theile der medialen Oberflächen der Hinterhauptslappen verknüpfen, der wahrscheinlich ein Stück der Lobuli quadrati einschliesst. Dieses Verbindungsschema zwischen den Netzhäuten und Hinterhauptslappen weicht in mehreren Punkten von dem bekannten Schema ab, das H. Munk (Über die Functionen u. s. w., 5. Mittheilung) auf grund von Exstirpationsversuchen, hauptsächlich an Hunden, aber zum Theil an Affen formulirt hat. Die wichtigsten Unterschiede betreffen die

Ausdehnung der Sehfläche[1] und den Theil der Hinterhauptsrinde, der mit dem centralen Theile der Netzhaut (Macula lutea) verbunden ist. Die Sehfläche (Sehsphaere) von Munk ist auf die Hinterhauptslappen beschränkt[1], und die Maculae luteae sind mit der Mitte

[1] Um das Verständniss zu ermöglichen, muss ich bemerken, dass Schäfer's »Sehfläche« nicht bloss auf den Hinterhauptslappen, sondern auch auf dessen nächste Nachbarschaft nach vorn und nach aussen sich erstreckt. Für die Projection, um welche es sich in meiner vorliegenden Mittheilung handelt, ist das ohne Bedeutung, und deshalb komme ich im Texte nicht weiter darauf zu sprechen. Aber im Interesse der Sache liegt es, dass ich diesen »wichtigsten Unterschied« doch hier beiläufig kurz beleuchte.

In den Phil. Transact. Vol. 179 (1888), B, tritt das Ergebniss, zu welchem Schäfer durch seine (u. S. Brown's) Exstirpationsversuche gelangt war, in folgenden Sätzen hervor: »Die zwei Versuche, bei welchen die Abtragung eines bezw. beider Hinterhauptslappen vollkommen war, bestätigen ganz die bezüglichen Angaben von Munk, der behauptet, dass volle und andauernde Blindheit durch die Abtragung der Hinterhauptslappen allein, ohne die Betheiligung (implication) der Gyri angulares, herbeigeführt wird, und dass die Entfernung eines Hinterhauptslappens volle und andauernde Hemianopsie verursacht« (S. 321); und wiederum »diese zwei Versuche scheinen einen vollkommenen Beweis zu liefern für die Vorstellung, dass an der centralen Perception der Gesichtseindrücke dieser Lappen, und dieser Lappen allein von der Grosshirnhemisphaere des Affen betheiligt ist« (S. 322). Denselben Standpunkt nimmt Schäfer im Brain, Vol. X, 1888, p. 362—72 ein. Wenn zeitweilige Hemiopie, heisst es dann dort zum Schlusse, infolge ausgedehnter Verletzungen des Schläfenlappens und einmal auch des Gyrus angularis erhalten wurde, so sind diese vorübergehenden Symptome wohl eher der Circulationsstörung im Hinterhauptslappen und dem zeitweiligen Verluste der Unterstützung, welche die Nachbartheile dem Lappen gewähren, zuzuschreiben, als dem Umstande, dass sich die Sehfläche der Rinde vom Hinterhauptslappen aus über die angrenzenden Hirntheile verbreitet. »Wäre dies der Fall beim Affen, so müsste immer etwas Sehvermögen nach der Entfernung der Hinterhauptslappen allein zurückbleiben; während Munk sowohl, wie wir selber gefunden haben, dass keine Spur von Sehvermögen erhalten ist ... Es ist jedoch auch möglich, dass Fasern, welche mit der Rinde der angrenzenden Hirntheile und insbesondere des Gyrus angularis verbunden sind, rückwärts in den Hinterhauptslappen einbiegen und so mit diesem Lappen abgeschnitten werden. Verschiedene Thatsachen lassen sich zu gunsten dieser Vorstellung anführen, ... doch sind wir noch nicht in der Lage, zu einer bestimmten Entscheidung in der Sache zu kommen.« Nun beginnt die Mittheilung Schäfer's, von welcher oben im Texte die Rede ist, folgendermaassen: »Die Sehfläche der Grosshirnrinde beim Affen, soweit sie aus den Erfolgen der Exstirpation und der elektrischen Reizung bestimmbar ist, erstreckt sich über den ganzen Hinterhauptslappen. Sie schliesst vielleicht einen Theil des Gyrus angularis oder diesen ganzen Gyrus ein, obwohl die Exstirpationsergebnisse zu zeigen scheinen, dass die Rolle, welche die letztere Windung spielt, verhältnissmässig klein ist. Abtragung beider Hinterhauptslappen führt völlige und andauernde Blindheit herbei, während auf die Zerstörung der Rinde beider Gyri angulares keine merkliche (appreciable) Sehstörung folgt. Doch veranlasst, wie sich jetzt zeigen wird, elektrische Reizung des hinteren Stückes des Gyrus angularis solche Augenbewegungen, wie sie die Reizung der angrenzenden Partie des Hinterhauptslappens liefert; es ist deshalb wahrscheinlich correct, wenigstens diese Partie des Gyrus angularis in die Sehfläche einzubeziehen.« Und dazu besagt eine Anmerkung: »Einen gleichen Erfolg erhält man auf Reizung des oberen Endes des Gyrus temporalis superior und der angrenzenden Portion des Gyrus temporalis medius. Das mag daher rühren, wie gewöhnlich angenommen wird, dass subjective Gehörsempfindungen herbeigeführt werden; doch darf man nicht die Möglichkeit übersehen,

der Convexität dieser Lappen verbunden (Ebenda, S. 127). Demgemäss sollte nach der Abtragung der Mitte beider Hinterhauptslappen das centrale Sehen vernichtet sein. Aber im Gegensatze zu Munk habe ich das nicht so bei Affen gefunden. Wirklich war es der geringe Effect dieser beiderseitigen Verletzung, was mich zuerst an der Richtigkeit von Munk's Schema zweifeln liess. Andererseits war bei einem Versuche, welchen ich nach den obigen Ergebnissen der Rindenreizung anstellte, ein ausgesprochener Defect des centralen Sehens herbeigeführt durch eine beiderseitige Verletzung beider medialen Oberflächen. Voller und andauernder Verlust des centralen Sehens resultirte nicht, aber es fand sich nach dem Tode, dass die Verletzung nicht soviel von der medialen Oberfläche der Sehfläche, besonders auf einer Seite, betraf, wie bei der Operation beabsichtigt war. Die Frage wird mittels der Exstirpationsmethode weiter verfolgt werden müssen, und das beabsichtige ich bald in Angriff zu nehmen; doch ist die Schwierigkeit, mittels localisirter Exstirpationen der Sehfläche zu sicheren Schlüssen zu kommen, enorm. Denn die Thiere nehmen bald die Gewohnheit an, locale Defecte im Gesichtsfelde durch schnelle Augenbewegungen zu compensiren, so dass alle Bemühungen, das Vorhandensein solcher Defecte festzustellen, vereitelt werden. Ich glaube, dass, um zu genaueren Schlüssen zu kommen, die Resultate perimetrischer Beobachtungen in Fällen von Hirnverletzung beim Menschen abgewartet werden müssen, und dass diese Versuche über die Sehfläche des Affen vornehmlich den Werth haben, dass sie Fingerzeige geben für die Art des Resultates, welches beim Menschen zu erwarten ist.«

Hrn. Schäfer war es danach offenbar hauptsächlich um die Abweichung von meinen Ermittelungen über die Projection zu thun.

---

dass auch diese Partie zur Sehfläche gehört, mit welcher sie in anatomischer Continuität ist«. Endlich heisst es noch S. 4: »Ich habe keinen Erfolg erhalten, wenn ich mit schwacher Faradisation das hintere Stück des Gyrus angularis reizte, selbst wenn gut ausgesprochene Ergebnisse mit einer bloss an der Zunge merklichen Stromstärke von den eben betrachteten Partien erhalten wurden« (über die »eben betrachteten« Partien ist keine Klarheit zu gewinnen; es ist wohl die Rinde des Hinterhauptslappens gemeint).

Ich habe damit das Material für die Würdigung des »wichtigsten Unterschiedes« vollständig vorgelegt, und ich brauche nichts hinzuzufügen. Schäfer hat wohl selber gewusst, dass die elektrischen Ströme, wenn die Elektroden vor den Grenzen des Hinterhauptslappens stehen, nicht an diesen Grenzen halt machen, und deshalb lässt sich die Aufgabe seines früheren richtigen Standpunktes nur durch den heftigen Streit erklären, in welchen er infolge seiner Bestätigung meiner Ermittelungen mit Ferrier gerathen ist (vergl. Brain, Vol XI, p. 7; 145). Ich meine aber nicht, dass, weil einmal Ferrier, wie jetzt von den verschiedensten Seiten anerkannt ist, ganz unbrauchbare Versuche gemacht hat, noch immer mehr Kräfte an die Widerlegung Ferrier's zu verschwenden seien.

Aber die Abweichung steht auf recht schwachen Füssen. Dass die Maculae luteae des Affen gerade mit der Mitte der Convexität der Hinterhauptslappen verbunden seien, habe ich gar nicht angegeben. Ich habe sie schon zuerst in der Mittheilung vom Jahre 1880, welche Hr. SCHÄFER citirt, nur derjenigen Rinde zugeordnet sein lassen, welche ungefähr die Mitte der Convexität jedes Hinterhauptslappens einnimmt[1]. Sodann aber habe ich in einer Mittheilung[2] vom Jahre 1881, welche Hrn. SCHÄFER entgangen ist, als »recht interessante neue Erfahrungen« betreffend die den Maculae luteae correspondirende Rinde zwei Versuche am Affen hervorgehoben, welche den SCHÄFER'schen Versuchen mindestens die Wage halten, zwei Versuche, bei deren einem ungefähr die Mitte der Convexität jedes Hinterhauptslappens exstirpirt war, bei deren anderem die ebensogrossen Exstirpationsstellen mehr nach hinten und auch etwas mehr nach innen gelegen waren: beidemal hatte der Affe nach wie vor fixirt, aber im letzteren Falle hatte sich die Sehstörung beim Fixiren auffällig grösser ergeben als im ersteren Falle; und ich habe daraus geschlossen, dass die den Foveae centrales correspondirende Rinde jederseits in der hinteren Hälfte der Convexität gelegen ist. Der ganze Unterschied zwischen Hrn. SCHÄFER und mir läuft also darauf hinaus, dass ich mehr auf die Verschiebung nach hinten, als auf die nach innen Gewicht gelegt habe, Hr. SCHÄFER gerade die Verschiebung nach innen betont: und dem kommt um so weniger Bedeutung zu, als wir doch Beide anerkennen, dass unsere spärlichen Versuche am Affen eine genaue Bestimmung der Lage der fraglichen Rinde nicht ermöglichten. Wenn nun aber Hr. SCHÄFER bloss wegen der Verschiebung nach innen sein Schema so herstellt, dass er die Sehflächen beider Hemisphaeren an der grossen Längsfissur zu einer einzigen verbunden und auf diese Gesammtsehfläche jede Netzhaut in ihrer natürlichen Lage projicirt setzt, so ist sein Vorgehen nicht nur unbegründet, sondern auch unberechtigt. Denn er übersieht ganz die Faltung der Rinde am Hinterhauptslappen des Affen, insbesondere die der Oberfläche parallele Doppelschicht der Rinde mit der Umschlagstelle am medialen Rande des Lappens, daher diesem Rande gar nicht das mediale Ende der Rinde entspricht: er vergisst, dass ansehnliche und ungleich gelegene Bezirke der beiden Netzhäute am binocularen Sehen nicht betheiligt sind; er trägt nicht der Verschiedenheit Rechnung, welche Mensch, Affe, Hund u. s. w. im binocularen Sehen darbieten; er setzt sich über die Ergebnisse hinweg, welche die Exstirpationen seitlicher

[1] Über die Functionen u. s. w. S. 127.

[2] DU BOIS-REYMOND's Archiv, 1881. S. 458—9.

Sehsphaerenhälften beim Affen geliefert haben[1]. In Erwägung alles dessen, was Hr. Schäfer vernachlässigt hat, kann man nur dabei bleiben, dass, wie in der verticalen Richtung, bei welcher wir Hrn. Schäfer selber dafür eintreten sahen, so auch in der horizontalen Richtung im Princip dieselbe Projection beim Affen (und Menschen) wie beim Hunde besteht und nicht die identischen Punkte beider Netzhäute derselben Stelle der Hirnrinde entsprechen, sondern die äussere Hälfte jeder Netzhaut der äusseren Hälfte der gleichseitigen Sehsphaere und die innere Hälfte jeder Netzhaut der inneren Hälfte der gegenseitigen Sehsphaere zugeordnet ist. Ich habe übrigens auch inzwischen, was ich so oft beim Hunde fand, bei einem Affen beobachtet, bei welchem die beabsichtigte Abtragung beider Hinterhauptslappen nicht vollkommen gelungen war: der Affe war auf dem linken Auge völlig blind, während von einer sehr beschränkten medialen unteren Netzhautpartie des rechten Auges aus noch Lichtempfindung bestand.

Doch wenn ich auch Hrn. Schäfer's Abweichung nicht mit Stillschweigen habe übergehen dürfen, so tritt dieselbe doch zur Zeit, da es noch um die Anerkennung der Projection überhaupt sich handelt, an Bedeutung ganz zurück gegenüber seiner Übereinstimmung. Hrn. Schäfer's Ergebniss, wie es vorliegt, kann allerdings als neuer Beweis für die von mir aufgedeckte Projection nicht gelten, weil ihm die Annahme zugrundeliegt, dass durch elektrische Reizung der Rinde Sinnesempfindungen entstehen, eine Annahme, welche wohl schon von Hrn. Ferrier benutzt, aber bisher durch nichts bewiesen, ja nicht einmal wahrscheinlich gemacht ist. Hinzukommt, dass Hrn. Schäfer's Folgerung wenig Werth sich beimessen lässt, weil sie nur etwas entwickelt, was in seiner zweiten Annahme bereits enthalten ist, in der Annahme, dass die Augenbewegungen die Richtung dorthin nehmen, wohin die Gesichtsempfindungen nach aussen gesetzt werden. Aber will man nicht an den sonderbarsten Zufall glauben, so muss man doch eine gewisse Stütze für die Projection in der Übereinstimmung sehen, die Anzeige eines engen Zusammenhanges zwischen den Augenbewegungen und der Projection in der Übereinstimmung erkennen.

Ich habe deshalb, die Dinge aufzuklären, in Gemeinschaft mit Hrn. Dr. Al. Obregia aus Bucarest Versuche unternommen, und zwar am Hunde, weil bei diesem Thiere die Rinde des Hinterhauptslappens nur wenig und dabei übersichtlich gefaltet und die Sehsphaere am besten bekannt ist. Die Thiere waren für die Zeit der Freilegung des Hirns mit Äther betäubt und unterlagen danach ohne jede Nar-

[1] Über die Functionen u. s. w. S. 126—7. — du Bois-Reymond's Archiv, 1881, S. 456—7.

kose der Prüfung. Hr. Obregia wird die Versuche an einem anderen Orte ausführlich mit allen Einzelheiten darlegen. Ich beschränke mich hier auf eine Übersicht der Versuche und erörtere die Ergebnisse. Für die Ortsbestimmungen halte ich mich an die Abbildung vom Hundehirn, welche ich in meiner vierten Mittheilung vom J. 1878 gab[1], und welche seitdem eine weite Verbreitung gefunden hat. Die Windungen der Convexität zähle ich von der grossen Längsfissur aus, so dass es die vierte Windung ist, welche die Fissura Sylvii umgiebt.

Wie es Hrn. Schäfer's sehr verdienstliche Ermittelung beim Affen voraussehen liess, führt auch beim Hunde Reizung mit Inductionsströmen von der Sehsphaere aus associirte Augenbewegungen nach der der Reizung entgegengesetzten Seite herbei, und gehen die Augen zugleich nach unten, wenn die Reizung in der vorderen, nach oben, wenn die Reizung in der hinteren Zone der Sehsphaere erfolgt. Die intermediäre Zone, von welcher aus es zu reinen Seitenbewegungen kommt, ist nur schmal und meist noch nicht halb so breit wie die Stelle A_1, von welcher etwa der mittlere Theil in diese Zone fällt. Die Aufwärtsbewegung erfolgt am stärksten von der zweiten Windung aus und nimmt mit der Annäherung der Elektroden an die grosse Längsfissur ab; die Abwärtsbewegung zeigt unter der gleichen Veränderung der Elektrodenstellung keine Abnahme, sondern öfters sogar eine Zunahme. Die Stromstärken, deren man für die erfolgreiche Reizung bedarf, sind von gleicher Ordnung mit denjenigen, durch welche es von den bekannten anderen Hirnrindenstellen aus zu Bewegungen der Extremitäten kommt; für die Aufwärtsbewegung sind sie etwas kleiner als für die Abwärtsbewegung. Vielfach verbinden sich mit den Augenbewegungen Bewegungen der oberen Augenlider und Erweiterungen der Pupillen, deren nähere Betrachtung hier unterbleiben darf. Geht man mit der Reizung etwas über die vordere Grenze der Sehsphaere hinaus in die Region F hinein oder über die laterale Grenze der Sehsphaere hinaus in die Hörsphaere B hinein, so bleiben, wenn man nicht ungebührlich die Stromstärken vergrössert, die Augenbewegungen aus.

Die Augenbewegungen, welche nach allem angeführten unzweifelhaft die Folgen örtlich begrenzter Reizungen der Sehsphaerenpartien sind, haben keineswegs eine geringe Grösse und sind sogar oft, gerade auch von der hinteren Sehsphaerenzone aus, recht auffallend. Dass sie trotzdem so lange der Beobachtung entgingen, dass selbst Experimentatoren, welche ihr besonderes Augenmerk darauf richteten, als hintere Grenze für die Herbeiführung von Augenbewegungen die vor-

[1] Über die Functionen u. s. w. S. 62. — du Bois-Reymond's Archiv, 1878. S. 552.

derste Sehsphaerenpartie angaben, kann den nicht verwundern, der die Entwickelung der Lehre von der Reizbarkeit der Grosshirnrinde im ganzen überschaut; und die möglichen Ursachen alle zu erwägen, würde ohne Nutzen sein. Im vorliegenden Falle darf man es übrigens als einen glücklichen Umstand bezeichnen, dass die richtige Erkenntniss sich so verspätete. Denn wären nicht ein vorderer motorischer und ein hinterer nicht motorischer Theil der Grosshirnrinde zu unterscheiden gewesen, so hätte den Fritsch-Hitzig'schen Ermittelungen das grob Überzeugende und die Gegner zunächst Bekehrende gefehlt; und die später erworbene Einsicht in die Sinnessphaeren der Grosshirnrinde wäre bei der Kurzsichtigkeit, mit welcher man alle Rindenstellen, deren Reizung Bewegungen lieferte, zu motorischen Centren machte oder zu einem grossen motorischen oder psychomotorischen Rindengebiete zusammenfasste, auf einen noch viel grösseren Widerstand gestossen, als es ohnedies schon der Fall war.

Jetzt handelt es sich darum, wie mit unserer bisherigen wohlbegründeten Kenntniss der Sehsphaeren die neuen Erfahrungen zu vereinigen sind. Wir finden den Weg, indem wir uns der Folgen erinnern, welche die Totalexstirpation beider Sehsphaeren mit sich bringt. Das Thier ist vollkommen blind; aber seine Augenbewegungen sind ungeschädigt, die sogenannten willkürlichen ebenso wie die unwillkürlichen, natürlich die gerade vom Sehen abhängigen Bewegungen ausgenommen, die ja am blinden Thiere fehlen müssen. Diese meine alte Erfahrung habe ich im Laufe der Jahre vielfach wieder machen können, und ich habe mich noch neuerdings an rindenblinden Hunden und Affen ganz besonders davon überzeugt, dass die Augenbewegungen sich fortsetzen, auch wenn das Thier im übrigen vollkommen in Ruhe verharrt und jede äussere Einwirkung auf seine verbliebenen Sinne fortgefallen ist. Mit den vom Sehen unabhängigen Augenbewegungen des Thieres hat also die Sehsphaere gar nichts zu schaffen — weder erfolgt deren Anregung von der Sehsphaere aus, noch führt die Leitungsbahn vom Orte ihrer Anregung zur Peripherie durch die Sehsphaere hindurch —; und daher lassen sich die Augenbewegungen, welche die elektrische Reizung der Sehsphaere herbeiführt, nur zu denjenigen Augenbewegungen des Thieres in Beziehung setzen, welche die Folgen seines Sehens sind.

Als nächstliegende Auffassung bietet sich dann die folgende dar. Ausserhalb der Sehsphaere und im sogenannten motorischen Gebiete, in meiner Fühlsphaere sind zwei Rindenstellen bekannt, deren elektrische Reizung Augenbewegungen nach sich zieht, die eine Stelle im vorderen Theile der Region *F*, die andere im vorderen Theile der Region *H* gelegen; und nach den Einen von der ersteren, nach den

Anderen von der letzteren Stelle aus werden bei den Eigenbewegungen des Thieres die Augenmuskeln in Thätigkeit versetzt, gerade so wie von benachbarten Rindenstellen in *D* oder *C* aus die Arm- bezw. Beinmuskeln. Wenn ein Thier infolge dessen, dass es etwas sieht, Bewegungen macht, hat man demgemäss anzunehmen, dass die durch die Sehnervenfasern zur Sehsphaere geleitete Erregung in der Sehsphaere auf Associationsfasern übertragen wird, welche dieselbe mit der Fühlsphaere verbinden, das eine Mal auf diese, das andere Mal auf jene Associationsfasern je nach der Art der Bewegung, und dass so die Erregung durch gewisse Associationsfasern zur Rindenstelle in *D* bezw. *C* gelangt, wenn Arm- bezw. Beinbewegungen, durch andere Associationsfasern zur Rindenstelle in *F* oder *H*, wenn Augenbewegungen eintreten. Entsprechend kommt es in unserem Falle durch die Reizung mit Inductionsströmen von der Sehsphaere aus zu Augenbewegungen, indem die durch die elektrischen Reize herbeigeführte Erregung in den Associationsfasern, welche von der Sehsphaere zur Rindenstelle in *F* oder *H* verlaufen, zu dieser Rindenstelle sich fortpflanzt, sei es dass in den centralen Elementen der Sehsphaere, sei es dass in den bezeichneten Associationsfasern selber, wo sie an der Sehsphaere endigen, die Erregung durch die Reize entsteht.

Aber gegen diese Auffassung muss sogleich Bedenken erregen, dass der elektrischen Reizung immer nur Augenbewegungen oder höchstens noch die gewissermaassen zugehörigen Bewegungen der Augenlider und der Iris folgen, nie jedoch Bewegungen einer anderen Kategorie, z. B. Arm- oder Beinbewegungen. Man könnte dafür freilich zunächst noch eine Erklärung finden. Aus guten Gründen hält man dafür, dass, wenn auch die Erregung einer Stelle des Centralnervensystems alle von dieser Stelle ausgehenden Bahnen betritt, doch ihrer Fortpflanzung auf den verschiedenen Bahnen ein verschiedener Widerstand sich entgegenstellt und unter sonst gleichen Umständen ein desto geringerer Widerstand, je ausgeschliffener, wie man es nennt, die Bahnen sind, je häufiger sie schon vorher von der Erregung durchlaufen waren. Unter allen Associationsbahnen zwischen der Sehsphaere und der Fühlsphaere würde danach der geringste Widerstand den Bahnen für die Augenbewegungen sich zuschreiben lassen, da diese Bewegungen viel öfter als alle anderen im Leben mit dem Sehen verknüpft sind. Und darin könnte man das Hervortreten der Augenbewegungen bei unseren Versuchen begründet annehmen, indem diese Versuche, weil es auf eine räumlich möglichst eingeengte Reizung ankam, auf schwache Reize sich beschränkten, auf Reize, die kaum über die Grösse hinausgingen, bei welcher zuerst Bewegungen sich einstellten. Doch wenn mit der Erklärung das Richtige getroffen wäre,

müssten stärkere Reizungen auch auf den widerstandreicheren Bahnen zu Bewegungen führen, und das ist durchaus nicht der Fall. Man kann, nachdem die Augenbewegungen zur Beobachtung gekommen sind, wenn die Elektroden an der vorderen Sehsphaerenzone sich befinden, noch recht ansehnlich und wenn die Elektroden auf der mittleren oder vollends der hinteren Sehsphaerenzone stehen, sogar sehr beträchtlich die Inductionsströme verstärken, ehe unter der übermächtigen und mehr und mehr ausgebreiteten Reizung ein epileptischer Anfall entsteht, und bis dahin bleibt es immer bei den Augenbewegungen allein. Will man nicht zu den willkürlichsten Annahmen greifen, muss man so erkennen, dass den Augenbewegungen eine Sonderstellung zukommt, wie sie mit unserer Auffassung sich nicht verträgt.

Eine weitere Prüfung stellt denn auch auf ganz anderem Wege[1]

[1] Über Versuche ähnlicher Art ist uns, seitdem wir im Frühjahr 1889 die Untersuchung ausführten, Folgendes bekannt geworden, mit dessen Zusammenstellung wir uns begnügen dürfen. An einem Affen hat Schäfer (Internat. Monatsschr. f. Anat. u. Physiol. 1888, Bd. V, Heft 4) erst den einen, dann den andern Stirnlappen vor der Fissura Rolandi abgetragen und dazu noch den Balken durchschnitten: elektrische Reizung des Hinterhauptslappens führte auch dann associirte Augenbewegungen nach der der Reizung entgegengesetzten Seite herbei. »Es ist also klar — sagt Schäfer — dass diese hinteren reizbaren Regionen die in Rede stehende Bewegung nicht nothwendig so herbeiführen, dass sie die graue Substanz der Stirnrinde in Thätigkeit setzen, und das Centrum, durch welches sie nach der Entfernung jener grauen Substanz operiren, in einer tieferen Partie des Hirns (höchstwahrscheinlich in der grauen Substanz der Vierhügel) zu suchen ist. Damit ist nicht bewiesen, dass sie nicht, wenn die Stirnrinde unversehrt ist, durch dieses Centrum operiren,« d. h., wie aus dem Vorhergehenden und Nachfolgenden sich ergiebt, durch das vordere (motorische) Centrum in der Stirnrinde. Ferner hat Danillo in einer vorläufigen Mittheilung (Wratsch, 1888, Nr. 48) — welche uns nach den Referaten wie nach der Übersetzung, die wir aus dem Russischen anfertigen liessen, mehrfach unklar geblieben ist — angegeben, dass die associirten Augenbewegungen nach der der Reizung entgegengesetzten Seite, welche er durch elektrische Reizung der weissen Substanz des Hinterhauptslappens bei ganz jungen Hunden und Katzen erhielt, bestehen blieben, sowohl wenn er die Rinde der vorderen motorischen Region abtrug, wie wenn er durch einen $1^1/_2{}^{cm}$ tiefen Querschnitt den vorderen Hirntheil von dem hinteren trennte, wie auch wenn er ebenso tiefe Längsschnitte parallel dem medialen Rande der Hemisphaere längs der ersten Occipitalwirkung und auch im Bereiche des Gyrus angularis führte. Danillo schliesst daraus, dass die Centren für die associirten Augenbewegungen weder in der motorischen noch in der Hinterhauptsregion der Grosshirnrinde, sondern tiefer gelegen sind. Diesen Schluss bestreitet dann Bechterew (Neurolog. Centralbl. 1889, Nr. 18, S. 518 Anmerkung). Nach ihm befinden sich solche Centren sowohl in der motorischen wie in der Occipitalgegend; ihr Vorhandensein im Occipitallappen könne man, wie er glaube, »schon daraufhin für bewiesen ansehen, dass nach Schnitten, die entsprechend der Lage dieser Centra die Rinde von den tiefer gelegenen Theilen trennen, ihre Reizung nicht mehr die gewohnten Bewegungen auslöst.« Dafür citirt er seine russisch geschriebene »Physiologie der motorischen Hirnrindenzone« im russischen Archiv für Psychiatrie 1886 und 1887, eine Mittheilung, über welche sonst keine Notiz zu finden ist. Endlich hat P. Rosenbach (Neurolog. Centralbl. 1889, Nr. 9, S. 255)

die Auffassung als unzutreffend heraus. Führt man am vorderen Rande der Sehsphaere einen Frontalschnitt durch die Hemisphaere, wie ich ihn neulich für die Sehsphaeren-Exstirpation empfahl[1], nur tiefer, so dass er den Ventrikel eröffnet und sein unteres Ende horizontal vom Balkenrande zu dem Punkte geht, in welchem nach meinen Abbildungen der vordere und der laterale Rand der Sehsphaere zusammenstossen, so erhält man, wofern man nicht die Elektroden gerade in der Nähe der Schnittfläche aufsetzt, durch die elektrische Reizung von der Sehsphaere aus nach dem Schnitte die Augenbewegungen wie vor dem Schnitte. Auch ändert sich darin nichts, wenn man noch einen zweiten Schnitt hinzufügt, der in verticaler Fortsetzung des ersten von dessen vorderem lateralen Ende aus vor dem absteigenden Horne des Seitenventrikels längs der Convexität der Hemisphaere bis zur Spitze des Schläfenlappens verläuft und unter Schonung der dem Thalamus opticus aussen anliegenden 1—2^{mm} dicken Schicht (sie enthält das sagittale Marklager des Hinterhauptslappens[2]) Rinde und Mark durchtrennt. Hier sind nach allem, was wir über die Lage der Associationsfasern wissen, schon durch den ersten Schnitt und vollends durch die beiden Schnitte die Associationsbahnen unterbrochen worden, welche die Sehsphaere mit der Rindenstelle in F oder H verbinden, und daher können diese Bahnen nicht dabei betheiligt sein, wenn durch die elektrische Reizung der Sehsphaere Augenbewegungen entstehen.

Den Commissuren- oder Balkenfasern, welche von der Sehsphaere ausgehen, kann aber erst recht keine Bedeutung dabei zukommen, weil unter solcher Annahme schon nicht einmal eine Vorstellung von dem Vorgange zu gewinnen ist, die sich nicht ohne weiteres als unhaltbar erwiese. Zum Überfluss braucht man nur den hinteren Theil des Balkens der Länge nach zu durchschneiden, an dem unversehrten Hirn oder nachdem die vorbeschriebenen Schnitte ausgeführt sind, und man sieht ferner noch der Reizung die Augenbewegungen nachfolgen. Somit bleibt allein übrig, dass diese Augenbewegungen zustandekommen, indem die durch die elektrischen Reize herbeigeführte Erregung in Radiärfasern des Stabkranzes zu niedereren (subcorticalen) Hirntheilen sich fortpflanzt, sei es dass die Erregung in den centralen Elementen der Sehsphaere, sei es dass sie in den Radiärfasern, wo

---

angegeben, dass »die mit Beständigkeit vom Occipitallappen, am besten von einem bestimmten Punkte der Munk'schen Sehsphaere aus zu erzielende seitliche Ablenkung der Augäpfel in allen Fällen auch nach völliger Zerstörung der motorischen Region bestehen bleibt.«

[1] Diese Berichte, 1889. S. 616.

[2] Vergl. Wernicke, Lehrbuch der Gehirnkrankheiten, Bd. I. S. 87 Fig. 45 *s*.

diese von der Sehsphaere abgehen, durch die Reize entsteht. Und dass dem so ist, erweist auch der Versuch. Führt man am lateralen Rande der Sehsphaere einen Horizontalschnitt durch die Hemisphaere, wie ich ihn für die Sehsphaeren-Exstirpation empfahl[1], so bleiben fortan die Augenbewegungen nach der elektrischen Reizung der Sehsphaere aus. Man kann den Versuch zu allen Zeiten machen, aber am besten stellt man ihn an der noch unversehrten Hemisphaere an; denn der Blutverlust und die Störung des Blutumlaufes im Hinterhauptslappen lassen sich dann nicht für den Erfolg verantwortlich machen, weil sie in der Regel viel kleiner sind, als wenn man den erstbesprochenen Frontalschnitt ausführt oder gar mehrere der vorbehandelten Schnitte nach einander anlegt. Eine recht interessante Abänderung des Versuches bietet sich noch dar, wenn man am unversehrten Hirn den Horizontalschnitt nicht mit etwas schräg nach oben gerichtetem Scalpell ausführt, wie es für den Zweck der Sehsphaeren-Exstirpation erforderlich war[2], sondern mit etwas schräg nach unten gerichtetem Scalpell, so dass dessen Spitze ein wenig unterhalb des Balkens dahinzieht: alsdann sind die Associations- wie die Balkenfasern erhalten, die Radiärfasern getrennt, und die Augenbewegungen auf Reizung sind fortgefallen. Bringt auch in diesem Falle die Blutung in den Ventrikel eine Verwickelung mit sich, so ist doch deren Bedeutungslosigkeit daraus zu entnehmen, dass die gleiche Blutung im Falle des Frontalschnittes und seiner Verlängerung sich unschädlich erweist.

Zu unserer alten Kenntniss von der Sehsphaere als centralem Organe für das Sehen kommt also neu hinzu die Einsicht in gewisse Verbindungen, welche die Sehsphaere mit anderen Centralorganen eingeht, in diejenigen Verbindungen, welche die Bewegungen vermitteln, welche Folgen des Sehens sind. Man durfte bezüglich des Zustandekommens dieser Bewegungen annehmen, dass von den dem Sehen dienenden centralen Elementen der Sehsphaere aus die Erregung durch Associationsfasern zu anderen Rindengebieten und von hier aus zu niedereren (subcorticalen) Hirntheilen sich fortpflanzt. Jetzt wissen wir, dass der Stabkranz der Sehsphaere ausser den Sehnervenfasern, deren centralwärts zur Sehsphaere geleitete Erregung das Sehen bedingt, auch Radiärfasern enthält, deren von der Sehsphaere aus peripherwärts zu niedereren (subcorticalen) Hirntheilen geleitete Erregung Bewegungen veranlasst; dass jedoch bloss Augenbewegungen infolge des Sehens (mit zugehörigen Augenlid- und dergl. Bewegungen)

[1] Diese Berichte, 1889. S. 616.
[2] Ebenda.

auf diesem Wege entstehen; und dass alle anderen Bewegungen, welche Folgen des Sehens sind, der Vermittelung von Associationsfasern und anderen Rindengebieten bedürfen. Unsere Erfahrungen schliessen nicht die Möglichkeit aus, dass auch auf die letztere Weise Augenbewegungen infolge des Sehens herbeigeführt werden: aber sicher ist, dass gewisse Augenbewegungen vor allen übrigen Bewegungen, welche Folgen des Sehens sind, dadurch ausgezeichnet sind, dass sie auf dem nächsten und kürzesten Wege durch Radiärfasern der Sehsphaere zustandekommen.

Über die Art der so bevorzugten Augenbewegungen kann dann kein Zweifel sein. Meine letzte Mittheilung gab mir Anlass hervorzuheben, wie Retinareflexe und Sehreflexe beim Thiere auseinanderzuhalten sind. Dass auf Lichteinfall in das Auge die Pupille sich verengt, ist ein Retina- oder Opticusreflex, eine gemeine Reflexbewegung, für welche es der Lichtempfindung nicht bedarf, und welche ohne das Grosshirn unter der Vermittelung niederer Hirntheile zustandekommt. Dagegen sind es, wie ich sagte, Sehreflexe, Sinnesreflexe, welche unter Mitwirkung der Sehsphaere sich vollziehen, wenn — ohne Zuthun der Aufmerksamkeit und Überlegung — auf die Annäherung der Hand das Auge blinzelt oder das Thier in Bewegung dem Hinderniss ausweicht. Für diese Sehreflexe muss die Erregung, wie wir nunmehr hinzufügen können, den Weg von der Sehsphaere aus durch Associationsfasern zu anderen Rindengebieten und erst durch deren Radiärfasern zu den niederen Centren nehmen. Aber die angezogenen Beispiele, ebenso das Zurücktreten vor der geschwungenen Peitsche, das Sichducken vor dem geworfenen Steine, das Pariren mit dem vorgestreckten Arme u. dergl. m. sind schon Sehreflexe höherer Ordnung: Reflexe, welche bei aller sonstigen Mannigfaltigkeit das gemein haben, dass sie nicht angeboren, sondern erworben sind, und dass für das anfängliche Auftreten der Bewegungen — unter Mitwirkung von Aufmerksamkeit und Überlegung — Gesichtsvorstellungen und noch weitere Vorstellungen entstehen mussten. Daneben finden wir bei den Thieren noch eine dritte Art von Reflexen, welche gewissermaassen in der Mitte zwischen den beiden ersteren Arten steht, Sehreflexe niederster Ordnung, welche angeboren sind und zu keiner Zeit Gesichtsvorstellungen, sondern bloss Lichtempfindungen oder Gesichtswahrnehmungen zur Voraussetzung haben: die unwillkürlichen Augenbewegungen, welche den Blick wandern und vorher undeutlich Gesehenes fixiren lassen. Diese Reflexe, ausschliesslich Augenbewegungen in unmittelbarer und nächster Folge des Sehens, müssen es sein, für welche die durch Radiärfasern zur Sehsphaere geleitete Erregung unmittelbar wieder durch Radiärfasern der Sehsphaere zu den niedereren (subcorticalen) Centren gelangt.

Alle die Einsicht hat uns, wie wohl zu beachten ist, die Verfolgung der Nervenbahnen, welche von der Sehsphaere abgehen, verschafft, ohne dass wir von den Folgen der elektrischen Reizung der Sehsphaere mehr als das blosse Auftreten von Augenbewegungen in's Auge fassten und ohne dass wir es zu entscheiden brauchten, ob infolge der elektrischen Reizung die Erregung in den centralen Elementen der Sehsphaere oder in den Associations- bezw. Radiärfasern, wo diese von der Sehsphaere abgehen, entstand. Nun versteht es sich aber zugleich, dass die Augenbewegungen infolge der elektrischen Reizung der Sehsphaere nicht bloss, wie wir zuerst fanden, Augenbewegungen des Thieres, welche die Folgen seines Sehens sind, sondern im besonderen denjenigen Augenbewegungen entsprechen, welche den Blick wandern und vorher undeutlich Gesehenes fixiren lassen. Aus den Richtungen der Augenbewegungen, welche wir bei der Reizung der Sehsphaere beobachteten, ist dann zu schliessen, dass jeder Sehsphaere die gleichseitigen Stücke beider Netzhäute diesseits der Stelle des deutlichsten Sehens zugehören und der vorderen, mittleren, hinteren Zone der Sehsphaere bezw. die oberen, mittleren, unteren Bezirke jener Netzhautstücke zugeordnet sind. So fällt uns die Projection, zu welcher Hr. Schäfer beim Affen mit Hülfe seiner Annahmen gelangt ist, auf unserem Wege beim Hunde als das Ergebniss der Untersuchung zu.

Doch ist das Ergebniss nur einwandsfrei, wenn man anerkennt, was als das Einfachste und Natürlichste allen meinen bisherigen Betrachtungen über die Sehsphaere zugrundelag, dass die Sehnervenfasern nach ihrem Eintritte in die Sehsphaere zunächst und unmittelbar mit den centralen Elementen, welche der Lichtempfindung dienen, in Verbindung treten. Gerade hier könnte man das bestreiten wollen; man könnte annehmen, dass die Sehnervenfasern ihre nächste Verbindung in der Sehsphaere mit centralen Elementen der gewöhnlichen Art, wie sie die niedereren Hirntheile und das Rückenmark enthalten, eingehen und von diesen gemeinen Reflexcentren aus einerseits Verbindungsfasern zu den der Lichtempfindung dienenden centralen Elementen ziehen, andererseits die Radiärfasern der Sehsphaere, welche die Erregung peripherwärts leiten, entspringen. Die Folgen der elektrischen Reizung der Sehsphaere würden dann gar nicht Augenbewegungen des Thieres, welche Folgen des Sehens sind, zu entsprechen brauchen, demzufolge auch nicht die Projection beweisen, sondern sie würden, gleichviel ob sie auf der Erregung der gemeinen Reflexcentren oder der Radiärfasern beruhten, immer nur darthun, dass die beiden Sehsphaeren und ihre Zonen — für vorläufig unbekannte Zwecke — in verschiedenen Beziehungen zu den verschiedenen Augenbewegungen

stehen. Diesem Einwande zu begegnen, müssen wir nochmals den Reizungen der Sehsphaere uns zuwenden.

Die Augenbewegungen, welche ich oben S. 61 beschrieb, sind die gewöhnlichen und regelmässigen Reizerfolge, welche man bei der groben Untersuchung findet: und wenn hin und wieder einmal bei der Durchmusterung der Sehsphaere ein abweichender Erfolg sich einstellt, ist man geneigt, ihn einer Eigenbewegung des Thieres zuzuschreiben oder anderen uncontrolirbaren Zufällen, an welche man bei derlei Untersuchungen immer denken muss. Sieht man indess näher zu, so ordnen sich die anscheinend regellosen Ausnahmen allmählich mehr und mehr zusammen; und schliesslich stellt es sich als eine strenge Gesetzmässigkeit heraus, dass unter gewissen Bedingungen, in Abhängigkeit vom Orte der Reizung und von der Stellung der Augen zur Zeit der Reizung, keine associirten Augenbewegungen eintreten. Reizt man die Mitte der Stelle A_1, sagen wir der linken Sehsphaere, so bleiben, wenn der Hund gerade fixirt, beide Augen ganz unbewegt, oder es geht das linke Auge etwas nach rechts, während das rechte Auge ein wenig nach rechts oder links sich wendet; und wenn der Hund nicht fixirt, bewegt sich das linke Auge immer stark nach rechts, während das rechte Auge auch hier ganz in Ruhe verharrt oder nur ein wenig nach rechts oder links sich wendet. Dass dabei überall das obere Augenlid sich hebt und die Pupille eine rasch vorübergehende Erweiterung erfährt, giebt für den Fall der Ruhe oder der nur spurweisen Bewegung des Auges die erwünschte Sicherheit, dass die Reizung wie sonst sich vollzog. Reizt man ferner in der Nähe des vorderen lateralen Endes der Sehsphaere, indem die Elektroden auf der zweiten Windung lateralwärts von der dieselbe hälftenden Furche oder ebendort und auf der dritten Windung stehen, so gehen zwar beide Augen nach rechts und zugleich mehr oder weniger nach unten, wenn der Hund fixirt; sie convergiren aber anselmlich, wenn der Hund nicht fixirt.

Noch mehr derartige Versuchsergebnisse haben wir erhalten, aber ihre Bedingungen bisher nicht mit der gleichen Sicherheit ermitteln können. Denn die Untersuchung ist dadurch erschwert, dass manche Hunde, nachdem sie aus der für die Operation eingeleiteten Äthernarkose erwacht sind, in steter Aufregung bleiben und unausgesetzt bald auf dies, bald auf jenes achten, das vor ihren Augen ist. Vollkommen brauchbar sind hier nur die anderen Hunde, welche von vorneherein geduldig oder nach kurzer Dauer des Versuchs beruhigt sind, so dass sie, je nachdem man sich mit ihnen beschäftigt oder nicht, abwechselnd bei gespannter und bei mangelnder Aufmerksamkeit sich prüfen lassen. An solchen Hunden sind die angeführten

Erfahrungen alle bequem zu machen, und sie genügen, um den Einwurf zurückweisen zu lassen, der uns beschäftigt. Ihm liess sich früher nichts entgegenstellen, weil in den associirten Augenbewegungen nach rechts, nach links, nach oben, nach unten, welche Hr. Schäfer beim Affen fand und wir oben zunächst für sich allein vom Hunde angegeben haben, nichts enthalten ist, was sie von Bewegungen, wie sie als gemeine Reflexbewegungen vorkommen, unterschiede. Aber aus dem Rahmen solcher Bewegungen heben die neuen Erfahrungen mit den alten vereinigt die Reizerfolge heraus. Denn dass auf eine und dieselbe Reizung die Augen das eine Mal in Ruhe bleiben und das andere Mal sich bewegen, das eine Mal associirte und das andere Mal Convergenzbewegungen machen, ist nicht denkbar, wenn ausschliesslich von der Erregung von Nervenfasern oder gemeinen Nervenzellen der Erfolg abhängig ist. Es ist bloss verständlich und stimmt dann auch mit dem zu Erwartenden überein, wenn Sinnesempfindungen bestimmend für den Erfolg sind, wenn Lichtempfindungen die Einstellung der Augen veranlassen.

Ebenso widerlegen den Einwurf andere Versuchsergebnisse. Verstellt man, von der Mitte der Stelle A_1 ausgehend und immer wieder nur schwache Reize, welche eben erfolgreich sind, verwendend, die Reizelektroden nach vorn und nach hinten, am besten indem man auf der zweiten Windung medialwärts von der dieselbe hälftenden Furche bleibt, so nimmt, je weiter vorn man reizt, die Abwärtsbewegung, je weiter hinten, die Aufwärtsbewegung der Augen zu; und ausnahmslos ist die stärkste Abwärtsbewegung, die sich überhaupt erzielen lässt, kleiner als die stärkste Aufwärtsbewegung. Um alles das zu erklären, ohne der Lichtempfindung zu bedürfen, müsste man zu einer Anzahl der willkürlichsten und unwahrscheinlichsten Annahmen seine Zuflucht nehmen. Dagegen versteht es sich auf grund von Augenbewegungen, welche zur Fixation des vorher undeutlich Gesehenen führen, ganz einfach und vollkommen, da die Stelle des deutlichsten Sehens beim Hunde im oberen äusseren Quadranten der Netzhaut gelegen ist, dort wo das Tapetum die grösste Höhe hat, ungefähr in der Mitte dieser grössten Höhe. Man kann daher nicht wohl in der Entscheidung schwanken; und dass sie richtig gefallen, erhärten auch weitere Erfahrungen. Man findet nämlich bei manchen Hunden die stärkste Abwärtsbewegung nicht bloss kleiner, sondern auffällig kleiner als die stärkste Aufwärtsbewegung; und wie die Section herausstellt, sind das immer Hunde, deren Tapetum bei normaler Grösse ungewöhnlich hoch gelegen ist. Bei solchen Hunden verläuft der untere Rand des Tapetums in ansehnlichem Abstande von dem horizontalen Meridiane oder der Papilla optica, während er

sonst die letzteren erreicht, hin und wieder sogar sie etwas nach unten hin überschreitet. Wir haben, seitdem wir die richtige Einsicht erlangt hatten, regelmässig nach den Reizerfolgen die Lage des Tapetums voraussagen können: so fest ist das grössere oder geringere Zurückbleiben der stärksten Abwärtsbewegung gegen die Aufwärtsbewegung an die höhere oder tiefere Lage der Stelle des deutlichsten Sehens geknüpft.

Auf dem eingeschlagenen Wege lässt sich also mittels der Folgen der elektrischen Reizung der Sehsphaere ein selbständiger Beweis der Projection erbringen, ganz unabhängig von dem Nachweise, den ich früher für dieselbe lieferte. In der wissenschaftlichen Schätzung kommt unzweifelhaft dem alten Nachweise die höhere Stellung zu, weil die damals geübte Methode der Exstirpationen geradesweges zu dem Ziele führt, welches mittels der Methode der Reizungen nur auf Umwegen, erst mit Zwischengliedern, wenn diese auch gesichert sind, zu erreichen ist. Hinwiederum bietet der neue Beweis den Vortheil dar, dass die leichteren und weniger umständlichen Reiz- und Schnittversuche, nach der bisherigen Vorliebe weiter Kreise zu urtheilen, eher Wiederholung finden dürften, als die in Ausführung wie Beobachtung gleich schwierigen und mindestens Monate erfordernden Exstirpationsversuche. Jedenfalls aber ist es von nicht zu verkennendem Werthe, dass die Übereinstimmung der Ergebnisse nach beiden Methoden die Sicherheit der gewonnenen Einsicht verbürgt. Und noch weiter sogar erstreckt sich die Übereinstimmung, als ich sie bisher habe in's Auge fallen lassen. Denn die Ergebnisse, welche die Reizung des vorderen lateralen Endes der Sehsphaere liefert, sind erst vollkommen verständlich, wenn mit jenem Ende die vordere laterale Partie der gleichseitigen Netzhaut in Verbindung ist, und die Reizerfolge von der Mitte der Stelle A_1 aus, wenn dieser Stelle die Stelle des deutlichsten Sehens der gegenseitigen Netzhaut zugehört; man hat bei den letzteren Reizungen die bezeichnete Hirnstelle genau getroffen, wenn beide Augen in Ruhe bleiben oder nur ein Auge sich bewegt, nicht ganz genau, wenn beide Augen sich bewegen. Hrn. Schäfer's Unternehmen, die von mir gefundene Projection, soweit sie die horizontale Ausdehnung von Sehsphaere und Netzhaut betrifft, zu berichtigen, erfährt auch hier, wie man sieht, durch die Thatsachen seine Verurtheilung.

Naturgemäss aber hat der neue Streifzug in ein jungfräuliches Gebiet zugleich auch neuen Erwerb gebracht. Dass auf zweierlei Bahnen die Bewegungen infolge des Sehens zustandekommen und auf dem kürzesten Wege durch Radiärfasern der Sehsphaere die niedersten Sehreflexe, vertieft unseren Einblick in Aufbau und Leistungen nicht

bloss der Sehsphaere, sondern, wie sich in der Folge zeigen wird, der Grosshirnrinde überhaupt. Die Projection der Netzhäute auf die Sehsphaeren tritt als das Substrat für die Localzeichen der Gesichtsempfindungen jetzt in ihrer vollen Bedeutung hervor, da die durch die Radiärfasern vermittelten unwillkürlichen Augenbewegungen die nothwendige Ergänzung liefern. Reihenfolge und gegenseitige Lage der Objecte im v. Helmholtz'schen Sehfelde sind durch die Projection gegeben: dazu verhelfen die Empfindungen, welche die unwillkürlichen Augenbewegungen mit sich bringen, zu leichter Orientirung über oben, unten, rechts und links: und so gestatten Projection und Augenbewegungen zusammen die rasche und sichere Kenntnissnahme des Sehfeldes, welche wir bei den Thieren beobachten und welche ganz unmöglich wäre, würde für alle Einzelheiten des Sehfeldes die Erfahrung zu Hülfe kommen müssen. Der anatomischen Forschung wird durch die neuen Radiärfasern der Sehsphaere die Möglichkeit entzogen, alles was nach dem Verluste der Sehsphaere peripherwärts dem Untergange verfällt, ohne weiteres als optische Leitungswege anzusprechen: aber dafür eröffnet sich ihr die anziehende Aussicht, auf grund der Verknüpfung einerseits der Radiärfasern mit den lichtempfindenden centralen Elementen, andererseits der Associationsfasern mit den Vorstellungselementen, die beiderlei centralen Elemente auch ihrerseits unterscheiden und ihre morphologische Verschiedenheit nachweisen zu können.

Unser Ergebniss, dass die lichtempfindenden centralen Elemente durch die elektrische Reizung der Sehsphaere in Erregung gerathen, steht übrigens, wie bemerkt zu werden verdient, nicht isolirt da. Für die Bewegungen, welche der elektrischen Reizung der Fühlsphaere folgen, ist bereits nach vielen Verhandlungen und Versuchen entschieden[1], dass sie von der Erregung der grauen Rinde oder der »Rindenelemente« herrühren, weil, wenn die Elektroden der unversehrten Oberfläche anliegen, es schwächerer Ströme für den Erfolg bedarf, als wenn die durch Abtragung der Rinde freigelegte weisse Substanz der Reizung unterliegt, weil ferner die Bewegungen im ersteren Falle später nach der Reizung eintreten und länger andauern als im letzteren Falle, und weil endlich an Hunden, die mit Chloral oder stark mit Morphium narkotisirt sind, auf Reizung der Oberfläche, nicht auf Reizung der weissen Substanz die Bewegungen ausbleiben. Entsprechende Beobachtungen macht man aber auch an der Seh-

[1] Franck et Pitres, Travaux du laboratoire de M. Marey, ann. 1878—79. Paris 1880. p. 429—47; Arch. de Physiologie, 3. sér. t. V. 1885. p. 7. — Bubnoff und Heidenhain, Pflüger's Arch. Bd. 26. 1881. S. 140—70. — François-Franck, Leçons sur les fonctions motrices du cerveau. Paris 1887. p. 29; 35; 318.

sphaere. Auch hier findet man nach Abtragung der Rinde stärkere Ströme erforderlich, um die associirten Augenbewegungen zu erzielen[1], als wenn die Elektroden auf die unversehrte Oberfläche gesetzt sind; und auch hier zeigt sich an Hunden, die stark mit Morphium narkotisirt oder durch grosse Blutverluste geschwächt sind, die Reizung von der Oberfläche her, so lange man nicht übermächtige Ströme in Anwendung zieht, erfolglos, während die Reizung der freigelegten weissen Substanz in der gewöhnlichen Weise wirksam ist. Demgemäss sind auch die Bewegungen infolge der elektrischen Reizung der Sehsphaere von der Erregung der Sehsphaere selbst oder ihrer »Rindenelemente« abzuleiten. Nun brauchte man freilich dafür, dass gerade centrale Elemente der Rinde durch die Reizung in Erregung gerathen, einen strengen Beweis durch alle jene Erfahrungen noch nicht geliefert zu sehen; man könnte, da die Nervenfasern, welche nach der Abtragung der Rinde den Erfolg der Reizung der weissen Substanz geben, alle auch in der Rinde, von deren Ganglienzellen ausgehend, enthalten sind, die Unterschiede, welche sich in den Ergebnissen der Reizung von der Oberfläche und von der Tiefe her darbieten, bloss darauf zurückführen wollen, dass die Nervenfasern in Rinde und Mark hinsichtlich ihres Baues, ihrer Empfindlichkeit u. dergl. m. verschieden seien. Indess ist doch das Gezwungene und Widernatürliche einer solchen Auffassung nicht zu verkennen, wo eine unzweifelhafte und grobe Verschiedenheit in den gangliösen Elementen einerseits und den Nervenfasern andererseits vorliegt, und wo es nur zu gut begreiflich ist, dass die ganglιösen Elemente schon durch schwächere Ströme erregbar und durch Narcotica oder unzureichende Blutzufuhr leichter verletzlich sind als die Nervenfasern. Auch aus den vorgeführten Erfahrungen ist deshalb zu entnehmen, dass durch die elektrische Reizung der Sehsphaere centrale Elemente derselben erregt werden; und damit stellt sich, was unsere Untersuchung oben auf andere Weise darthat, die Erregung der lichtempfindenden centralen Elemente durch die elektrische Reizung der Sehsphaere, nur als der nächste Fortschritt in der Erkenntniss dar.

[1] Dass auch infolge der elektrischen Reizung der freigelegten weissen Substanz des Hinterhauptslappens associirte Augenbewegungen nach der der Reizung entgegengesetzten Seite eintreten, haben schon DANILLO und P. ROSENBACH (s. o. S. 64 Anm.) angegeben. DANILLO hat die Bewegungen an ganz jungen, noch nicht zwei Monate alten Hunden und Katzen beobachtet, bei welchen die Reizung des unversehrten Hinterhauptslappens noch erfolglos war, und geschlossen, dass danach FERRIER's Annahme, die Augenbewegungen infolge von Rindenreizung beruhten auf subjectiven Gesichtsempfindungen, unhaltbar sei. DANILLO's Schluss ist jedoch unrichtig, wie jetzt keiner weiteren Ausführung bedarf; werden ja bei der Reizung der weissen Substanz die Radiärfasern der Sehsphaere, welche die Erregung peripherwärts leiten, getroffen.

Ich muss zum Schluss die Übereinstimmung hervorheben, welche sich zwischen meinen früheren Ermittelungen durch die Exstirpationen und den jetzigen durch die Reizungen ergeben hat. Sie geht über die Projection, welche der Gegenstand unserer Untersuchung war, hinaus. Wir sind geradezu überrascht gewesen, jedesmal dass wir die Stelle der Sehsphaere gefunden hatten, bei deren Reizung, wenn der Hund fixirte, beide Augen in Ruhe verharrten und wenn der Hund nicht fixirte, das gegenseitige Auge unbewegt blieb, wie genau diese Stelle der Mitte der Stelle A_1 entsprach, also der Mitte derjenigen Sehsphaerenpartie, durch deren Exstirpation ich Seelenblindheit herbeigeführt und welche ich später als der Netzhautstelle des directen Sehens und ihrer Umgebung zugehörig erwiesen hatte[1]. Nicht anders aber verhielt es sich bezüglich der Grenzen der ganzen Sehsphaere, zog man in Betracht, wie für solche Bestimmungen sowohl die Exstirpations- wie die Reizungsmethode, eine jede in ihrer Art, naturgemäss Ungenauigkeiten mit sich bringt. Nach dem Gesammteindrucke, welchen ich von den Reizungen erhielt, möchte ich nur den vorderen Rand der Sehsphaere an seinem medialen Ende, im Bereiche der ersten Windung, ein wenig weiter nach vorn gelegen glauben, als ihn meine Abbildungen zeigen; es würde damit auch im Einklang stehen, dass ich in den Fällen, in welchen die beabsichtigte Totalexstirpation der Sehsphaere nicht vollkommen gelungen war, den stehengebliebenen Sehsphaerenrest besonders häufig am vorderen medialen Ende der Sehsphaere zu suchen hatte. Dagegen hat, wie sich vermuthen liess, der ungefähr dreieckige Zipfel, welchen nach meinen Abbildungen der vordere und der laterale Rand der Sehsphaere von der dritten Windung abschneiden, aus der Sehsphaere auszuscheiden; offenbar ist nur für die Totalexstirpation der Sehsphaere die Mitnahme des Zipfels erforderlich, damit von der Rinde der zweiten Windung in der Furche zwischen dieser und der dritten Windung nichts zurückgelassen werde.

[1] Über die Functionen u. s. w. S. 89—91; 107—8.

Ausgegeben am 23. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1890.
IV.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

23. Januar. Öffentliche Sitzung zum Gedächtniss Friedrich's II. und zur Vorfeier des Geburtsfestes S. M. des regierenden Kaisers und Königs.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

Der Vorsitzende eröffnete die Sitzung, welcher der vorgeordnete Herr Minister DDr. von Gossler Exc. beiwohnte, mit einer Festrede.

Alsdann wurden die folgenden Berichte über die fortlaufenden grösseren wissenschaftlichen Unternehmungen der Akademie und über die mit derselben verbundenen Stiftungen und Institute erstattet.

Sammlung der griechischen Inschriften.
Bericht von Hrn. Kirchhoff.

Der Druck des ersten Bandes der nordgriechischen Inschriften hat in dem verflossenen Jahre ungestörten Fortgang genommen und ist bis etwa zur Hälfte gediehen; gleichzeitig ist die Herstellung der Scheden zum zweiten Bande weiter gefördert worden. Der Druck der griechischen Inschriften von Italien und Sicilien ist beendigt; es ist indessen zweckmässig erschienen, die griechischen Inschriften Frankreichs, Deutschlands, Spaniens und Englands, welche wegen ihrer geringen Anzahl eine Zusammenstellung in einem besonderen Bande nicht rechtfertigen würden, in Gestalt eines Anhanges diesem Bande hinzuzufügen, welcher alsdann die sämmtlichen griechischen Inschriften des Westens befassen würde. Der Druck dieses Anhanges hat bereits begonnen, und auch die Arbeit an den Indices erscheint so weit ge-

fördert, dass der Vollendung und Ausgabe des ganzen Bandes noch vor Ablauf dieses Jahres entgegengesehen werden kann. Dagegen haben sich der Herstellung der Indices und Supplemente zur zweiten Abtheilung der attischen Inschriften Schwierigkeiten in den Weg gestellt, von denen sich zur Zeit noch nicht übersehen lässt, wie bald sie werden beseitigt oder überwunden werden können.

Sammlung der lateinischen Inschriften.

Bericht der HH. Mommsen und Hirschfeld.

Die Drucklegung der vierten Abtheilung des stadtrömischen Bandes (VI) ist von Hrn. Hülsen in Rom bis zum 340. Bogen gefördert worden; der Abschluss des Bandes in diesem Jahre ist von dem Herausgeber in sichere Aussicht gestellt. Für die umfangreichen Addenda und die Indices zu dem ganzen Bande sind die Vorarbeiten in Angriff genommen worden.

Die stadtrömischen Ziegelinschriften (XV) sind von Hrn. Dressel vollständig dem Druck übergeben worden. Die späteren Abtheilungen dieses Bandes gedenkt der Herausgeber sofort nach Rückkehr von einer behufs Vervollständigung des Materials zu unternehmenden Reise zur Drucklegung zu bringen.

Die Inschriften von Umbrien (XI,2) sind von Hrn. Bormann in Wien bis zum 96. Bogen zum Satze gebracht worden.

Das Material für die den ersten Theil des dreizehnten Bandes bildenden Gallischen Inschriften ist von Hrn. Hirschfeld auf einer zweimonatlichen Reise in Frankreich revidirt und ergänzt worden; die Drucklegung derselben wird voraussichtlich noch in diesem Jahre beginnen. Der Druck des zweiten die Inschriften von Germanien umfassenden Theils desselben Bandes hat mit den von Hrn. Mommsen bearbeiteten helvetischen Inschriften begonnen; an dieselben werden sich die von Hrn. Zangemeister in Heidelberg grossentheils druckfertig gemachten Inschriften Deutschlands anschliessen.

Von den Supplementararbeiten ist der Text des Supplementes zu den Spanischen Inschriften (II) von Hrn. Huebner vollständig im Satze fertig gestellt; die Indices befinden sich in Vorbereitung. Die Ausgabe des Bandes wird demgemäss im Laufe dieses Jahres erfolgen können.

Von dem Supplement des dritten Bandes ist das erste, die griechische Reichshälfte einschliesslich Moesia inferior umfassende Heft in der Bearbeitung der HH. Mommsen und von Domaszewski in Heidelberg zur Ausgabe gelangt. Die Inschriften von Dacia, Moesia superior

und Dalmatia in der Bearbeitung der HH. von Domaszewski und Hirschfeld befinden sich im Satz. Die Ausgabe dieses zweiten Fascikels steht noch in diesem Jahre zu erwarten.

Das Material für das Supplement zu Band IV ist von Hrn. Zangemeister in diesem Sommer in Neapel vervollständigt worden: die Drucklegung desselben wird jedoch erst nach weiterer Förderung von Band XIII,2 begonnen werden können.

Von dem Supplement zu den Africanischen Inschriften (VIII) haben die HH. Schmidt in Giessen und Cagnat in Paris zwanzig Bogen zum Satz gebracht.

Von der Neubearbeitung des ersten Bandes ist der Text und Commentar zu den Consular- und Triumphalfasten, nach Vornahme einer letzten Revision, von Hrn. Hülsen in Rom im Satz vollendet worden. Es steht zu hoffen, dass die Fortführung dieses Bandes nach Überwindung der mit diesem Theile verbundenen erheblichen Schwierigkeiten jetzt einen ungestörten Verlauf nehmen werde.

Die Aufsicht über das epigraphische Archiv in der Königlichen Bibliothek hat auch in diesem Jahre Hr. Dessau geführt. Die Benutzung desselben ist, unter den durch die Beschaffenheit der Sammlung und die bibliothekarischen Verhältnisse gebotenen Cautelen, den Gelehrten jeden Dienstag von 11—1 Uhr gestattet.

Prosopographie der römischen Kaiserzeit.

Bericht von Hrn. Mommsen.

Die HH. Klebs, Dessau und von Rohden haben die in dem alphabetischen Theil noch gebliebenen Lücken, namentlich hinsichtlich des neu hinzugekommenen inschriftlichen Materials ergänzt und die Ausarbeitung des zweiten die Listen umfassenden Theils in Angriff genommen. Drei Druckbogen des Werkes sind probeweise hergestellt worden.

Ausgabe der Aristoteles-Commentatoren.

Bericht der HH. Zeller und Diels.

Im verflossenen Jahre ist von den Commentaren des Aristoteles nichts veröffentlicht worden, da der Druck der umfänglichen Bände I und II 2 (Alexanders Metaphysik und Topik) trotz regelmässigen Fortschreitens noch nicht zum Abschluss gekommen ist. Inzwischen ist das handschriftliche Material für die in Vorbereitung begriffenen

Bände IV 3—5, V 5, VII, X, XII 1, XVIII 1.2, XX, Supplementum Aristotelicum II 2 vermehrt und zugleich die Bearbeitung der Texte soweit gefördert worden, dass der Druck jener Bände ohne Unterbrechung wird in Angriff genommen werden können.

Corpus nummorum.

Bericht von Hrn. Mommsen.

Die Sammlung der antiken Münzen Nordgriechenlands ist unter der Leitung des Hrn. Imhoof-Blumer in Winterthur weiter gefördert worden, wobei die im vorigen Bericht erwähnten Hindernisse allerdings auch noch fortwirkten. Hr. Svoronos hat im Laufe dieses Jahres die Untersuchung des Pariser Cabinets beendigt und die der Cabinette von Amsterdam (Six), Haag, London, Oxford, Cambridge, Durham (Greenwell), Glasgow und München durchgeführt, Hr. Pick neben der Fortführung der litterarischen Vorarbeiten die Cabinette von Arolsen, Gotha, Dresden, Braunschweig (Löbbecke), Hamburg und einen Theil des Wiener Cabinets für diese Sammlung aufgenommen.

Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen.

Bericht der HH. von Sybel und Schmoller.

In der Commission für die Herausgabe der »Politischen Correspondenz Friedrich's des Grossen« ist gegen das Vorjahr keine Veränderung eingetreten. Mit den Arbeiten für die Veröffentlichung war nach wie vor Hr. Albert Naudé betraut gewesen, der sich inzwischen auch an hiesiger Universität als Privatdocent habilitirt hat.

Seit dem Bericht, den wir am 24. Januar vorigen Jahres erstattet haben, ist der 17. Band neu erschienen, der 18. ist im Manuscript weit vorgeschritten und zur Hälfte bereits gedruckt. Beide Bände, der Zeit des siebenjährigen Krieges angehörend, bringen wiederum neben der diplomatischen auch den wichtigsten Theil der militärischen Correspondenz, die von dem politischen Briefwechsel zu trennen sich als schwer durchführbar erwies. Der 17. Band umfasst den Feldzug des Jahres 1758, der 18. soll die Ereignisse des ganzen Jahres 1759 enthalten, er wird voraussichtlich einen stärkeren Umfang als die letzterschienenen Bände annehmen.

Auch für die beiden neuen Bände wurden neben dem Berliner Geheimen Staatsarchiv die Acten des Königlichen Hausarchivs und noch mehr diejenigen des Kriegsarchivs des Grossen Generalstabes herangezogen; unter den letzteren erwiesen sich von erheblicher Be-

deutung die in den letzten Jahren in Folge des Aufrufs Sr. Excellenz des Grafen MOLTKE an den Grossen Generalstab eingesandten Archivalien, einerseits die Acten der preussischen Festungscommandanturen, andererseits die nachgelassenen Papiere namhafter preussischer Heerführer, deren Benutzung auch für unsere Zwecke von Seiten des Königlichen Kriegsarchivs mit grösster Bereitwilligkeit und Liberalität uns gestattet wurde. Leider sind nicht wenige unter diesen eigenhändigen Briefen FRIEDRICH's des Grossen an ihren früheren ungeeigneten Aufbewahrungsorten durch Feuchtigkeit und andere Einflüsse derart mitgenommen, dass sie jetzt bei der Berührung z. Th. wie Zunder auseinanderfallen und ähnlich wie ältere Handschriften bei der Veröffentlichung vielfache Conjecturen erforderlich machen; um so mehr ist den Bemühungen Sr. Excellenz des Hrn. Grafen MOLTKE Dank zu wissen, dass diese für die preussische Kriegsgeschichte werthvollen Papiere jetzt an einen sicheren Ort und in sorgfältigere Behandlung gelangt sind. — Von fremden Archiven wurde vor allem das Kaiserlich Königliche Kriegsarchiv in Wien benutzt: zahlreiche aufgefangene Briefe des Königs, u. a. die gesammte Correspondenz mit seinem Freunde General FOUQUÉ fanden sich hier vor. Die nachgelassenen Papiere des preussischen Unterhändlers in Paris, des Freiherrn VON EDELSHEIM, wurden uns durch Se. Excellenz den Grossherzoglich Badischen Hofmarschall Freiherrn VON EDELSHEIM und durch das General-Landesarchiv in Karlsruhe zur Verfügung gestellt, die Papiere des Prinzen MORITZ von Dessau durch das Herzogliche Haus- und Staatsarchiv zu Zerbst, die des »Dictators« General WEDELL durch Se. Excellenz den Hrn. Minister des Königlichen Hauses VON WEDELL, diejenigen von ZIETEN durch den Hrn. Grafen ZIETEN-SCHWERIN, diejenigen des berühmten Reitergenerals VON SEYDLITZ durch die VON WALLENBERG'sche Bibliothek in Landshut; endlich die nachgelassenen Papiere des dem Könige besonders nahestehenden General-Adjutanten VON WOBERSNOW hatten die Grossherzogliche Hofbibliothek zu Darmstadt und Hr. Landrath VON RUNKEL in Neuwied die Gefälligkeit zur Benutzung uns anzuvertrauen. Je mehr während der unruhigen Zeit des siebenjärigen Krieges die regelmässige geordnete Kanzleithätigkeit des Königlichen Cabinets aufhört, die Herstellung von Concepten und Abschriften für die Cabinetsordres des Königs der drängenden Ereignisse wegen unterbleiben musste, desto mehr sind wir auf die an Generale, Minister und Gesandte abgegangenen Ausfertigungen — als der einzig vorhanden gewesenen Niederschrift der Ordre — angewiesen. Diese zu einem guten Theil eigenhändigen Ausfertigungen sind allein unter dem Nachlass der Empfänger aufzufinden, während in den Cabinetsacten des Staatsarchivs von eben diesen Ordres fast nichts sich findet —

denn die heute die Regel bildende Zurücklieferung der amtlich empfangenen Schriftstücke erfolgte im 18. Jahrhundert nur in Ausnahmefällen; zumeist blieben die Cabinetsordres im Privatbesitz der Familien, wo sie dann nur allzu oft widrigen Geschicken ausgesetzt waren. Für die Menge der so verloren gegangenen Correspondenzen bleibt häufig als einziger, aber verhältnissmässig auch nur seltener Ersatz die Entzifferung der jetzt nach mehr als 100 Jahren stark verblassten Bleinotizen, die auf dem Rande oder der Rückseite des abgegangenen Berichts von den Secretären mit flüchtiger Schrift, mit starken unregelmässigen Abkürzungen und zum Theil stenographisch hingeworfen werden, sobald der König während des Vortrages des Berichts mündlich Weisungen ertheilt für die nachher aufzusetzende Antwort.

Aus dem Inhalt der beiden neuen Bände seien nur einige Hinweise gegeben auf mehrere neu aufgeklärte, besonders anziehende Gegenstände. Wir nennen die Stellung des Königs zu dem englischen Staatsleiter William Pitt, die Pläne zur Saecularisation geistlicher Güter in Deutschland, und zu Erwerbungen für Preussen im Fall eines glücklichen Ausgangs des mährischen Feldzuges, die Versuche den russischen Oberfeldherrn Grafen Fermor im Frühjahr 1759 zur Unthätigkeit zu veranlassen durch die Aussicht auf Übernahme in den preussischen Dienst und auf Ernennung zum preussischen Feldmarschall; weiter die geheimen Unterhandlungen des Markgrafen von Baireuth in Frankreich, die Projecte zu einem ungarischen Aufstande in Siebenbürgen, die Bestrebungen, durch Agenten in Schweden zu Gunsten der Monarchie eine Revolution gegen die französisch gesinnte Senatspartei herbeizuführen; ferner die Unterhandlungen für ein preussisch-türkisches Bündniss gegen Russland, die einem günstigen Ergebniss schon ganz nahe sind, aber durch den Einspruch der Engländer gehemmt werden; die ersten Versuche zu einer Verbindung Preussens und Sardiniens, wobei der Sohn des berühmten Cocceji als preussischer Emissär thätig ist; die Mission des Lord Marschall in Spanien zur Herbeiführung einer spanischen Vermittelung; die geheimen Verbindungen mit der oranischen Partei im Haag; die Unterhandlungen mit Dänemark, welcher Macht der König von Preussen Subsidien anbietet; die Beziehungen des Königs zu dem jungen Hofe zu Dresden, insbesondere der Churprinzessin Marie Antonie. Wir weisen ferner hin auf die Vorgänge bei der Belagerung von Olmütz; auf den glänzend durchgeführten Marsch nach Böhmen, die Aussichten auf eine Schlacht bei Königgrätz und bei Chlum und das Memoire des Königs über die zu liefernde Schlacht; auf die Operationen vor der Zorndorfer Schlacht und die Beweggründe, die den König von einer zweiten Schlacht, von einer vollen Ausnutzung des Erfolges

zurückhalten: auf die Unternehmungen gegen Daun und Loudon im September 1758, wo besonders durch eine Reihe neu aufgefundener, undatirter und hier eingeordneter Briefe an den Prinzen Heinrich die Correspondenz mit diesem wesentlich ergänzt wird; auf die Kriegsrüstungen in den Winterquartieren, den Übergang des Königs zu einem System defensiver Kriegsführung, den erfolgreichen Einbruch des Prinzen Heinrich in Böhmen und Franken, den Zug des Generals Wobersnow nach Posen im März, und den der Österreicher nach der Lausitz im Mai 1759. Wir machen endlich aufmerksam auf die rühmende Anerkennung, die der österreichischen Armee und mehreren ihrer Generale, so dem Vertheidiger von Olmütz, zu Theil wird; während Daun, die »dicke Excellenz von Kolin«, der vom Papst mit geweihtem Degen und Hut beschenkte, mit oft recht drastischem Hohn und Spott überschüttet wird; weiter seien erwähnt die herzlichen Beziehungen des Königs zu seinen Geschwistern, die insbesondere in den Briefen an den Prinzen Heinrich, die Markgräfin von Baireuth, und den erkrankten Prinzen Ferdinand hervortreten, — endlich auch in diesen Bänden wieder die so oft scharf ausgesprochene Abneigung des Königs gegen die Kriegsführung und das unstäte Leben, die Sehnsucht nach Frieden, nach friedlicher Thätigkeit, und trotzdem die unerschütterte Ausdauer, die Hoffnungsfreudigkeit, das feste Vertrauen auf einen glücklichen Ausgang im Gegensatz zu fast allen Generalen und Ministern, die bei dem unmöglich erscheinenden Widerstand gegen so zahlreiche Feinde oft genug den Muth sinken lassen und zur Pflichterfüllung erst gemahnt werden müssen durch die entschiedenen Befehle und die zuversichtlichen Schreiben des Königs. —

Über die preussischen Staatsschriften aus der Zeit Friedrich's des Grossen ist im Anschluss an die Berichterstattung des letzten Jahres nur zu bemerken, dass der dritte von Dr. Krauske hergestellte, im vorigen Jahre näher beschriebene Band, welcher auf die Jahre 1756 und 1757 sich bezieht, im Drucke begriffen ist, und in einigen Monaten der Öffentlichkeit wird übergeben werden können. Derselbe wird vorläufig der letzte sein, da die Fortführung dieser Publication zunächst nicht beabsichtigt wird.

Acta Borussica.

Bericht der HH. von Sybel und Schmoller.

I. Der erste Band, Acten der Centralverwaltung, welchen Hr. Dr. Krauske bearbeitet, die Zeit von 1713 bis zur Schaffung des General-Directoriums umfassend, ist soweit gefördert, dass die dies-

bezüglichen Actenbestände des Berliner Staatsarchivs durchgearbeitet, die Abschriften und Regesten hergestellt sind; ausserdem ist das Düsseldorfer Staatsarchiv im Frühjahr 1889 von Dr. Krauske auf einige Wochen benutzt worden. Es wird sich nun noch darum handeln, die übrigen preussischen Staats- und Regierungsarchive zu bereisen. Es ist so Hoffnung, dass dieser erste Band der allgemeinen Verwaltung in 1 bis $1^1/_2$ Jahren druckfertig gestellt sein wird.

II. Die Bearbeitung der preussischen Seidenindustrie der östlichen Provinzen durch Dr. O. Hintze war schon im Frühjahr 1889 so weit gefördert, dass nur noch die Bereisung der Archive von Königsberg, Breslau, Dresden, Leipzig, Magdeburg, Hamburg übrig blieb. Auf dieser Reise ist leider Hr. Dr. Hintze ernstlich erkrankt; es entstand so eine Verzögerung von mehreren Monaten, indem erst im October Dr. Hintze seine Arbeiten wieder aufnehmen konnte. Die Übersendung wichtiger älterer Schriften über die Lyoner Seidenindustrie zur hiesigen Benutzung verdankt die Commission der seltenen, durch Hrn. Prof. E. Blondel in Paris vermittelten Gefälligkeit des Hrn. S. Pariset aus Lyon, des dortigen Historikers der Seidenindustrie. Der Druck des Bandes wird in einigen Wochen beginnen können.

III. Die von Dr. W. Naudé im Januar 1889 begonnene Bearbeitung der preussischen Getreidehandelspolitik des 18. Jahrhunderts ist in eifrigem Fortschritt begriffen. Neben der Benutzung des Berliner hat schon die des Stettiner Staatsarchivs stattgefunden. Es wird bald so weit sein, dass an die Benutzung des Archivs des K. Kriegsministeriums gegangen werden kann.

IV. Über eine Reihe Vorarbeiten von Dr. Schmoller für spätere Bände wird künftighin zu berichten sein.

Neue Ausgabe der Werke akademischer Mathematiker.

Der erste Band der von Hrn. Kronecker besorgten Ausgabe der Werke G. Lejeune-Dirichlet's ist, 82 Bogen stark, im October v. J. erschienen. Der Druck des zweiten, letzten, Bandes, welcher voraussichtlich von etwas geringerm Umfange sein wird, ist bis zum 10. Bogen vorgerückt.

Humboldt-Stiftung.

Bericht von Hrn. E. du Bois-Reymond.

Das Curatorium der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen erstattet statutenmässig Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Wie schon im vorjährigen Bericht angezeigt wurde, hatte die Akademie beschlossen, die durch Ersparnisse für Stiftungszwecke zur Verfügung stehende grössere Summe von 24600 Mark dem Professor der Physiologie in Kiel, Hrn. Hensen, zu dem Zwecke zu überweisen, auf eigens dazu gechartertem Dampfschiff in Begleitung mehrerer Naturforscher eine Seefahrt im atlantischen Ocean zu unternehmen, in deren Verlauf die Art und Menge der im Meere treibenden kleinen Lebewesen, des Planktons, wie Hr. Hensen es nennt, bestimmt werden sollte.

Die Wichtigkeit dieser Untersuchung, wodurch die ungewöhnlichen dafür gebrachten Opfer gerechtfertigt werden, erhellt aus folgender Betrachtung. Der Kreislauf der organischen Materie durch die Gesammtheit der Lebewesen besteht bekanntlich darin, dass die grünen Pflanzentheile unter der Einwirkung des Sonnenlichtes die von den Thieren wesentlich zu Kohlensäure und Wasser verbrannte organische Materie wieder aufbauen, wobei Sauerstoff für die Athmung der Thiere wieder frei wird. Diese längst gewonnene Einsicht passte indess zunächst nur auf die Land- und Luftthiere und -Pflanzen, allenfalls auf die der süssen Gewässer und der Meeresküsten. Dagegen war bis zur neuesten Zeit die Frage kaum aufgeworfen worden, woher für die unermessliche Fülle thierischer Lebewesen im Ocean die pflanzliche Nahrung herkomme, mit anderen Worten wie im Weltmeere der Kreislauf der organischen Materie sich vollziehe.

Bei Gelegenheit von Untersuchungen, welche die Ministerial-Commission zur wissenschaftlichen Erforschung der deutschen Meere im Interesse der Fischerei seit dem Jahre 1882 ausgeführt hatte, war Hr. Hensen darauf aufmerksam geworden, dass besonders an der Oberfläche des Meeres eine ungleich massenhaftere Bevölkerung kleinster Lebensformen sich finde, als man früher sich vorstellte. Die Gesammtheit dieser Wesen, gleichviel ob thierischer oder pflanzlicher Natur, welche gegen die Bewegung der See machtlos, mit Wellen und Strömungen treibt, erhielt von ihm den Namen des Halyplanktons oder kurz des Planktons. Er schuf eine Methodik, mittels welcher das Plankton qualitativ und quantitativ mit überraschender Schärfe bestimmt werden kann, und führte auf Fahrten in Ost- und Nordsee bis zu den Hebriden derartige Bestimmungen in überzeugender Weise aus.

So entstand bei ihm die Vermuthung, dass das Plankton des Weltmeeres das Räthsel der Urnahrung der Seethiere zu lösen geeignet sei, und damit zugleich Wunsch und Plan, diese Vermuthung durch eine grössere Expedition wo möglich zu bewahrheiten. Es handelte sich darum, die Kosten einer auf mehrere Monate berechneten Forschungsreise im atlantischen Ocean aufzubringen, was die für

wissenschaftliche Zwecke in Deutschland verfügbaren Mittel weit zu übersteigen schien.

Das Königliche Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, welches sich für dies Unternehmen lebhaft interessirte, fasste dessen Verwirklichung näher in's Auge, nachdem die Akademie ihre Bereitwilligkeit erklärt hatte, die glücklicherweise gerade aufgesparte grössere Summe von 24600 Mark aus den Mitteln der Humboldt-Stiftung dafür herzugeben. Der thatkräftigen Vermittelung Seiner Excellenz des Hrn. Ministers von Gossler haben wir es zu verdanken, dass Seine Majestät der Kaiser und König selber der Plankton-Expedition Allerhöchstihre Theilnahme zuzuwenden, und unter dem 23. Januar v. J. den erforderlichen Zuschuss bis zum Höchstbetrage von 70000 Mark aus Allerhöchstihrem Dispositionsfonds bei der Generalstaatskasse zur Verfügung zu stellen Allergnädigst geruhten, was der Hr. Minister der Akademie mit dem besonders erfreulichen Zusatz anzeigte, dass mit Rücksicht auf § 24 des Stiftungsstatuts die Expedition darum nicht minder als eine selbständige Unternehmung der Stiftung angesehen werden solle. Zu den so zusammengeflossenen Mitteln kamen noch hinzu von der Section für Küsten- und Hochseefischerei des deutschen Fischereivereins 10000 Mark für besondere Prüfung des Vorkommens der Fische, und von ungenannter privater Seite ein Beitrag von 1000 Mark für Mitnahme eines Marinemalers, so dass im Ganzen 105600 Mark bereit standen.

Es konnte nun zu den Vorbereitungen der Expedition geschritten werden. Unter sachkundiger Berathung wurde von den Rhedern Paulsen und Ivers in Kiel der neugebaute Schraubendampfer 'National', 600 Registertonnen *netto* gross, für drei Monate gechartert, und ausser mit den sonst nöthigen Vorräthen mit allen wünschenswerthen Einrichtungen für Planktonfang, Tiefseefischerei und Lothung, für sofortige Beobachtung und für Aufbewahrung der verschiedenen Lebensformen, überdies für alle auf solchen Expeditionen üblichen und ausführbaren Meeresforschungen ausgestattet. Der Hr. Minister erlaubte die Mitnahme von Büchern und Instrumenten des Kieler physiologischen Instituts, die Kaiserliche Marine half mit wichtigen und kostspieligen Vorrichtungen aus, der Director der Kaiserlichen Seewarte, Hr. Neumayer, stellte einen vollständigen meteorologischen Apparat zur Verfügung. Der Vertreter der HH. Siemens und Halske in Kiel, Hr. von Bremen, ermöglichte durch die günstigsten Bedingungen die höchst nützliche elektrische Beleuchtung, und lieh seinen Taucherapparat, während Hr. A. Steinheil und Hr. Zeiss besondere optische Hülfsmittel herstellten.

Neben dem Allen musste der Dampfer für den Aufenthalt der

Mitglieder der Expedition, im Ganzen sieben an der Zahl, eingerichtet werden. Als solche reihten sich Hrn. Hensen zunächst an der Professor der Zoologie, Hr. Brandt und der Privatdocent der Botanik, Hr. Dr. Schütt, welche sich schon mit Hrn. Hensen an den ersten Schritten zur Betreibung des Unternehmens betheiligt hatten; ferner der Privatdocent Hr. Dr. Dahl als zweiter Zoologe, Hr. Prof. Krümmel als Geograph, Hr. Prof. Fischer als Arzt und Bakteriologe, sämmtlich von der Kieler Universität; endlich der Marinemaler Hr. Richard Eschke. Hr. Hensen wurde von zuständiger Seite zum verantwortlichen wissenschaftlichen Leiter der Expedition bestellt. In nautischer Beziehung befehligte sie Kapitain Heeckt.

Durch Vermittelung des vorgeordneten Ministeriums und durch die schon oft bei ähnlichen Gelegenheiten erprobte Dienstfertigkeit des Auswärtigen Amtes wurde an allen Plätzen, welche die Expedition voraussichtlich anlaufen sollte, deren Ankunft gemeldet, und es wurden sowohl die Kaiserlich Deutschen Consulate, wie auch durch die Grossbritannische Regierung die Englischen Behörden auf den Bermudas und Ascension, und durch die Portugiesische Regierung deren Behörden auf den Capverdischen Inseln angewiesen, der Expedition die Erreichung ihrer Zwecke auf jede Weise zu erleichtern. Bei der Rückkehr des Schiffes war das Kieler Zollamt durch den Hrn. Finanzminister mit ähnlichen Weisungen versehen.

Am 15. Juli Mittags verliess der 'National' den Kieler Hafen. Am 19. Juli erreichte er die nördliche Atlantik. Hier zeigte sich leider alsbald, dass das beladene Schiff die für gewöhnliches gutes Wetter gewährleistete Geschwindigkeit von $8^1/_2$ Knoten gegenüber der im Ocean fortwährend gehenden Dünung nicht innehalte, woraus sich auf die zu durchlaufende Strecke von 16000 Seemeilen ein Zeitverlust von 9 Tagen berechnen liess, welche, bei gegebener Dauer der Fahrt, von den für die Fischerei bei stillliegendem Schiff in Aussicht genommenen 18—20 Tagen abgezogen werden mussten. Der Plan der Reise wurde demgemäss etwas verändert, es traten aber Zufälle ein, welche schliesslich die ursprünglich beabsichtigte Reisedauer von 100 bis 110 Tagen doch noch um sechs Tage verlängerten.

Die Fahrt ging zuerst in die kalte Strömung Grönlands. Bei Cape Farewell gerieth das Schiff in Treibeis. Ein Nordweststurm verhinderte weiteres Vordringen nach Westen, und zwang den Curs auf New Foundland zu nehmen. Von dort gelangte der 'National', durch Nebel im Golfstrom aufgehalten, am 6. August nach den Bermudas, wo die Expedition wohl aufgenommen und erfolgreich beschäftigt bis zum 10. August verweilte. Weiter ging die Fahrt quer durch das Sargassomeer, den Nordaequatorialstrom schneidend, nach St. Vincent

auf den Capverdischen Inseln (28. August); dann durch den Guineastrom über den Aequator fort nach Ascension (10. September). Abermals durchquerte die Expedition die Atlantik in dem Südaequatorialstrom nach Pará an der Mündung des Amazonas, in welchen eine Fahrt gemacht werden sollte (24. September).

Von hier ab traf sie jedoch verschiedenes Missgeschick. Die Schraube war schadhaft geworden und musste, da in Pará keine hinreichend grosse Werft sich fand, im Strom am schwimmenden Schiff ausgebessert werden. Zur Fahrt den Amazonas hinauf wurden zwei von der dortigen Stromdampfschifffahrtsgesellschaft empfohlene Lootsen genommen, welche aber am 3. October Morgens den 'National' bei höchster Fluth mit voller Geschwindigkeit auf eine Sandbank setzten, von welcher er erst am 5. October Nachts wieder loskam. Unter diesen Umständen verzichtete Hr. Hensen auf Weiterfahrt stromaufwärts; aber selbst bei der Rückkehr nach Pará wurde das Schiff nochmals auf einer Sandbank festgefahren.

So wurde denn am 7. October Nachmittags von Pará aus die Heimreise angetreten. Allein von Neuem stellte sich, glücklicherweise in der Nähe der Azoren, ein Fehler an der Schraube ein, welcher die Expedition zwang, den nächsten Hafen, Ponta Delgada auf der Insel San Miguel, aufzusuchen. Erst am 27. October konnte die Reise fortgesetzt werden. Der Herbst war nun zuweit vorgerückt, und es war zuviel Zeit verloren worden, um noch solche Operationen an Bord vorzunehmen, welche, wie Tiefseefischerei, einen bedeutenden Aufenthalt verursachen, und man musste sich fortan auf Planktonfänge beschränken. Am 7. November traf der 'National' wieder in Kiel ein.

Abgesehen von einem dem zweiten Steuermann zugestossenen Unfall, war während der 116 Tage dauernden Fahrt an Bord Alles wohl gewesen. Es waren 15649 Seemeilen durchlaufen worden; die Mitglieder befanden sich 88 Tage auf See und 28 Tage an Land, davon 12 Tage in Folge nothwendiger Ausbesserungen. Auf See wurde 105 Mal zum Fischen Halt gemacht, verzeichnet wurden 403 Fänge, unter denen 127 mit dem Planktonnetz für Auszählung der Fänge, und 30 mit dem Schliessnetz zur Bestimmung des Planktongehaltes grösserer Tiefen. Die übrigen Fänge wurden ausgelesen und je nach den Thierarten in besonderen Gläsern aufbewahrt.

Über die wissenschaftlichen Ergebnisse der Expedition kann erst nach etwa drei Jahren vollständige Auskunft gegeben werden. Wie von einer astronomischen Arbeit, für die soeben mit vieler Mühe und grossen Kosten das nöthige Material zusammengebracht wurde, noch kein Ergebniss mittheilbar ist, sondern nun erst die eigentliche Arbeit beginnt, nach deren Vollendung die Ergebnisse abgeleitet werden

können, so verhält es sich auch mit den Früchten der Planktonfahrt. Die kunstgemäss aufbewahrten Planktonfänge sind durch eine ebenso mühsame und einförmige wie zeitraubende Arbeit von mehreren kundigen und geübten Beobachtern auszuwerthen, ehe etwas Sicheres über die Verbreitung des Planktons im atlantischen Ocean ausgesagt werden kann. Für jetzt kann im Grunde nur gesagt werden, dass das gewünschte Material glücklich gewonnen und ohne Verlust geborgen ist. Immerhin lassen sich schon, unter ausdrücklichem Vorbehalt etwaiger späterer Berichtigung, einige Anschauungen und Ansichten darlegen, was Hr. Hensen in einem besonderen Bericht an die Akademie zu thun beabsichtigt. Dort wird er auch den Plan des ausführlichen, von ihm und seinen Begleitern zu bearbeitenden Gesammtwerkes über die Expedition entwickeln.

Nur ein Hauptergebniss mag hier vorweg genommen werden. Allen aus theoretischen Gründen gehegten Erwartungen entgegen zeigte sich in den tropischen Gewässern die Menge des Planktons überraschend gering. Damit stellt sich eine Frage, welche, wenn sie auch im Augenblick noch unbeantwortet bleibt, doch geeignet ist, das mächtige Interesse und die tiefgreifende Bedeutung dieser Art von Forschung in's Licht zu setzen, die Frage, wie Hr. Hensen sie formulirt, »ob das Feuer der Sonne, Luft und Salzwasser allein genügen, um Organismen zu erzeugen und zu erhalten, oder ob dazu noch ein Viertes, das feste Land erforderlich sei; mit anderen Worten, ob unser Planet lebende Wesen tragen würde, wenn seine Oberfläche überall mit einer Wasserschicht von der Tiefe des Oceans bedeckt wäre.«

Mit den von Kriegsschiffen ausgeführten wissenschaftlichen Weltumseglungen, mit einer Challengerexpedition, kann unsere Planktonfahrt natürlich nicht sich messen. Doch nimmt sie, in ihren bescheidenen Grenzen, durch die Neuheit und Schönheit ihrer wohlumschriebenen Aufgabe eine eigenartige Stellung ein, und die Humboldt-Stiftung darf stolz darauf sein, in erster Linie zu ihrer Ausführung beigetragen zu haben.

Das Capital der Stiftung hat im Jahre 1889 keinen Zuwachs erhalten. Die für das genannte Jahr zu Stiftungszwecken verwendbare Summe von 7350 Mark hat die Akademie beschlossen zur Ausführung eines grösseren Unternehmens aufzubewahren. Die für das laufende Jahr verwendbare Summe beläuft sich ordnungsmässig abgerundet auf 16650 Mark.

Bopp-Stiftung.

Für den 16. Mai, als den Jahrestag der Stiftung, ist im vorigen Jahre der zur Disposition stehende Jahresertrag von 1888 im Ge-

sammtbetrage von 1350 Mark derartig getheilt worden, dass die Hauptrate von 900 Mark dem Prof. Dr. Zachariae in Greifswald zur Förderung seiner Ausgabe von Hemacandra's Anekârthasaṃgraha, die zweite Rate von 450 Mark dem Dr. W. Prellwitz in Königsberg i. Pr. zur Fortsetzung seiner sprachwissenschaftlichen Studien zuerkannt ward — beides nach §. I, 2 des Statuts.

Der Gesammtertrag der Stiftung beläuft sich zur Zeit auf 1638.50 Mark.

Die vorberathende Commission der Bopp-Stiftung.

Weber. Joh. Schmidt. Dillmann. Steinthal. Zupitza.

Savigny-Stiftung.

Die Arbeit am Wörterbuche der classischen Rechtswissenschaft schreitet langsam, aber stetig vorwärts. Sie ist im letzten Jahre dadurch verzögert worden, dass einige Änderungen am Index verborum vorgenommen werden mussten, um ihn für die Benutzung handlicher zu machen.

Für die Vorarbeiten zur Ausgabe der libri feudorum hat Hr. Professor Dr. Karl Lehmann in Rostock mehrere in Deutschland befindliche Handschriften verglichen.

Die Herstellung des Ergänzungsbandes der Acta nationis germanicae universitatis Bononiensis hat Hr. Dr. Knod, Oberlehrer am Gymnasium zu Schlettstadt, in Angriff genommen, nachdem ihm das Ministerium für Elsass-Lothringen zu diesem Zwecke auf Ansuchen der Akademie einen halbjährigen Urlaub gewährt hatte.

Königliches Historisches Institut in Rom.

Bericht der HH. von Sybel und Wattenbach.

Auf den Antrag der Akademie der Wissenschaften hat durch Erlass des vorgeordneten Herrn Ministers die Königliche historische Station in Rom den ihrer Aufgabe und den römischen Verhältnissen in jeder Beziehung besser entsprechenden Titel »Königliches Historisches Institut in Rom« erhalten. An ihren Einrichtungen und Arbeiten wird dadurch nichts geändert.

Die Entwickelung des Instituts ist in den fünf Vierteljahren seit dem Beginne seiner Thätigkeit am 1. October 1888 in fortdauerndem erfreulichem Wachsthum geblieben.

Neben den dirigirenden Secretär, Prof. SCHOTTMÜLLER und den ersten Assistenten Prof. FRIEDENSBURG ist als zweiter Assistent im vorigen Winter Dr. PAUL MARIA BAUMGARTEN, und nach dessen Ausscheiden am 1. October 1889 Dr. JOSEPH HANSEN, Archivassistent in Münster, getreten. Ausserdem haben die Provinzialstände von Ostpreussen und Posen zur Erforschung ihrer Territorialgeschichte den Archivar EHRENBERG aus Königsberg nach Rom gesandt und seine Arbeiten der Leitung des Instituts unterstellt. Zu gleichem Zweck und in gleicher Weise haben die westpreussischen Stände den Oberlehrer Dr. DAMUS aus Danzig, und die Brandenburger den Dr. KRETZSCHMAR aus Leipzig nach Rom abgeordnet. Die beiden ersten Herren haben ihre Studien im October, der letzte am 4. November 1889 begonnen. Nach einer Mittheilung des Senats der freien Stadt Bremen ist von dieser ein gleicher Auftrag dem dortigen Staatsarchivar Dr. VON BIPPEN für das Jahr 1890 gegeben worden. Es werden also in diesem Jahre die Arbeiten von acht deutschen Gelehrten unter der unmittelbaren Leitung des Instituts ihren Fortgang haben.

Nach §. 7 des Statuts sollen die Beamten des Instituts auf wissenschaftliche Anfragen deutscher Gelehrten Auskunft ertheilen und in Rom selbst deren Forschungen nach Kräften unterstützen. Die Bekanntmachung dieses Paragraphen hat dankbare Aufnahme gefunden. 64 Personen haben in Rom selbst die Einführung in Archive oder gelehrte Kreise erbeten und erhalten; 37 haben auf schriftliche Anfrage »allgemeine Auskunft« über die wissenschaftlichen Verhältnisse in Rom empfangen; 176 haben Auskunft, Vermittlung oder Unterstützung für specielle wissenschaftliche Arbeiten begehrt. Hiervon blieben 23 Gesuche, als dem Wirkungskreise des Instituts völlig fremd, ohne Berücksichtigung; 41 der gewünschten Nachforschungen, Collationen u. s. w. wurden von den Mitgliedern des Instituts selbst besorgt, für die übrigen wurde die geeignete Hülfe oder die begehrte Abschrift vermittelt.

Das Alles ist mit Freuden geleistet worden, und hat durch ganz Deutschland dem jungen Institut einen wohlbegründeten Ruf verschafft. Allerdings haben diese Besorgungen, Besuche und Correspondenzen einen sehr beträchtlichen Theil der Arbeitszeit und Arbeitskraft der Mitglieder in Anspruch genommen und somit den eigenen Forschungen derselben entzogen, so dass die Anstellung eines, vornehmlich für diese Dinge bestimmten, dritten Assistenten vollständig motivirt wäre. Um so dringender ist hier der Wunsch auszusprechen, nicht, wie es sehr häufig geschehen ist, auch blosse Vergnügungsreisende, gleichviel ob gelehrte oder ungelehrte, dem Institute empfehlend zuzuweisen. Was von solchen erwartet wird, könnte ohne schweren Schaden für

unsere Hauptaufgabe nicht geleistet werden: Das Institut ist für wissenschaftliche Arbeit, aber nicht als Cicerone für Touristen gegründet.

Über die Ergebnisse der von dem Institute geleiteten historischen Arbeiten ist Folgendes zu berichten.

Der Secretär, Prof. Schottmüller, ist von Anfang an damit beschäftigt gewesen, einen gewissen Einblick in das römische Archivwesen, und damit eine vorläufige Kenntniss von den sowohl für die bereits in Angriff genommenen, als die weiterhin vorzunehmenden Aufgaben vorhandenen Materialien zu gewinnen. Dank dem stets bethätigten Entgegenkommen der Archivbeamten, wo an erster Stelle der ebenso durch Gelehrsamkeit wie durch Humanität ausgezeichnete Sottoarchivista Dr. Denifle zu nennen ist, lässt sich schon jetzt ein für eine Reihe von Jahren gesichertes, wichtige und interessante Früchte verheissendes Arbeitsfeld bezeichnen.

Im Einzelnen hat Prof. Schottmüller im Anschluss an frühere Studien sowohl im vaticanischen wie in den Archiven von Venedig, Bologna, Mailand und Florenz eine grosse Anzahl ungedruckter Urkunden und Berichte zur Geschichte des Templerordens zusammengebracht. Die Arbeit ist soweit vorgeschritten, dass im Herbste d. J. die Herausgabe eines Bandes erfolgen wird.

Ebenso ist durch den Secretär die Herausgabe eines Miscellenbandes vorbereitet, in welchem eine Anzahl kleinerer interessanter Actenstücke vereinigt und ebenfalls, wie wir hoffen, im Laufe des Jahres veröffentlicht werden sollen.

Der erste Assistent Prof. Friedensburg ist fortdauernd mit der Sammlung der Berichte der von 1520 bis 1564 nach Deutschland entsandten päpstlichen Nuntien beschäftigt, und darin während des letzten Sommers von Dr. Baumgarten erfolgreich unterstützt worden. Das vaticanische Archiv hat dafür eine sehr reiche, wenn auch vielfach lückenhafte Ausbeute geliefert; Prof. Friedensburg hat dazu höchst erwünschte Ergänzungen in den Archiven von Trient, Modena, Venedig, Florenz und Neapel gefunden. Ein erster Band der Edition wird sich voraussichtlich bis Ostern 1891 fertig stellen lassen, welchem dann mehrere andere in kurzen Zwischenräumen folgen können.

Der zweite Assistent Dr. Hansen hat zunächst eine früher begonnene Sammlung von Quellenmaterial für die rheinisch-westfälische Geschichte in den letzten Decennien des 15. Jahrhunderts aus den Schätzen des vaticanischen Archivs vervollständigt, und wird diese Documente in einer ihm übertragenen Publication der Preussischen Staatsarchive erläutern und veröffentlichen.

Sodann ist er mit der Bearbeitung päpstlicher Nuntiaturberichte aus Deutschland, in den ersten Jahren der Regierung Kaiser Rudolf's II,

1576 bis 1585 beschäftigt, wo das vaticanische Archiv eine Fülle lehrreicher Documente darbietet. Mit dem Vorstande des römischen Instituts der Görres-Gesellschaft, Hrn. Dr. Kirsch, ist Abrede genommen worden, durch welche hinsichtlich der Herausgabe der Nuntiaturberichte das Jahr 1585 als Grenze des beiderseitigen Arbeitsfeldes bezeichnet ist.

Endlich hat Dr. Hansen mehrere kleinere Actenstücke, Tagebücher, Briefschaften u. dergl. aus dem 15. und 17. Jahrhundert aufgefunden, welche sich zur Aufnahme in den oben erwähnten Miscellenband eignen.

Die HH. Ehrenberg, Damus und Kretzschmar sind bisher wesentlich mit den Vorarbeiten zu einer allgemeinen Orientirung beschäftigt. Diese wird ihnen in erheblicher Weise dadurch erschwert, dass sie von ihren betr. Provinzialbehörden die bestimmte Instruction erhalten haben, ihre Forschungen streng auf die Geschichte ihrer Provinz zu beschränken. Deren Grenzen sind aber weit verschieden von den Grenzen der alten Kirchenprovinzen, nach welchen die vaticanischen Archivbestände geordnet und katalogisirt sind. So muss jeder der Arbeiter eine grosse Reihe von Bänden vollständig durchsehen, welche an verschiedenen Stellen einzelne Urkunden aus mehr als einer Provinz enthalten. Wenn die Instructionen der drei Herren ihnen etwas freiere Hand liessen, so würde durch eine, den Beständen angemessene Arbeitstheilung und nachherigen Austausch der Funde ein ungleich rascheres und fruchtbareres Zusammenwirken erreichbar sein.

Immerhin haben bereits die wenigen Monate ihrer Thätigkeit auch unter jenen erschwerenden Umständen vielfach lohnenden und belangreichen Gewinn ergeben, so dass die Hoffnung auf einen schliesslichen bedeutenden Erfolg begründet erscheint.

Die Berichte über die Monumenta Germaniae historica und das Kaiserliche Archaeologische Institut werden später mitgetheilt, sobald die bevorstehenden Jahressitzungen der leitenden Centraldirectionen stattgefunden haben werden.

Zum Schluss berichtete der Vorsitzende über die seit dem letzten Friedrichs-Tage im Personalbestande der Akademie eingetretenen Veränderungen.

Die Akademie verlor durch den Tod das ordentliche Mitglied der philosophisch-historischen Classe: Hrn. Julius Weizsaecker; die correspondirenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe: Ole Jacob Broch in Christiania, Michel-Eugène Chevreul in Paris, Heinrich von Dechen in Bonn, Franz Cornelius Donders in Utrecht, Friedrich August von Quenstedt in Tübingen; die correspondirenden Mitglieder der philosophisch-historischen Classe: Wilhelm von Giesebrecht in München, Wilhelm Studemund in Breslau, Jean de Witte in Paris, William Wright in Cambridge.

Gewählt wurden im verflossenen Jahre:

zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe die HH. Karl Weinhold und Georg von der Gabelentz;

zum auswärtigen Mitgliede das bisherige correspondirende Mitglied der philosophisch-historischen Classe Hr. Rudolph von Roth in Tübingen;

zu correspondirenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe die HH. Ferdinand Cohn in Breslau, Archibald Geikie in London, Julius Hann in Wien, Heinrich Hertz in Bonn, Wilhelm Pfeffer in Leipzig, Eduard Strasburger in Bonn, Adolf Wüllner in Aachen;

zu correspondirenden Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe die HH. Hans von der Holst in Freiburg i. B., Rudolf von Jhering in Göttingen, Konrad Maurer in München und der kurz nach seiner Wahl verstorbene oben schon aufgeführte Hr. Studemund in Breslau.

Ansprache an Seine Majestät den Kaiser und König.

Aus Anlass des Todes Ihrer Majestät der Kaiserin und Königin Augusta von der Akademie beschlossen in der Gesammtsitzung vom 16. Januar.

Allerdurchlauchtigster, Grossmächtigster Kaiser und König,
Allergnädigster Kaiser, König und Herr!

Kaum hat, unter Eurer Kaiserlichen und Königlichen Majestät starker und sicherer Hut, das preussische, das deutsche Volk nach den schmerzlichen Erschütterungen des vorletzten Jahres sich beruhigt, so regt schon wieder durch alle deutschen Gauen Trauergeläut alle vaterländisch gesinnten Herzen wehmüthig auf, und tausend thränenfeuchte Blicke sind auf das abermals von einem herben Verluste betroffene geliebte Herrscherhaus gerichtet.

Von den Gefühlen zu reden, welche an dieser neuen Gruft Eurer Kaiserlichen und Königlichen Majestät Gemüth bewegen, ziemt der ehrfurchtsvollst unterzeichneten Akademie der Wissenschaften nicht. Den Antheil rühmend zu erwägen, welchen die hohe Entschwundene, als Lebensgenossin des Ersten Deutschen Kaisers, an der Wiederaufrichtung des Deutschen Reiches gehabt hat, ist weniger unseres Berufes. So bleibt es auch anderen Stimmen vorbehalten, die liebevolle Sorge zu preisen, welche Allerhöchstdieselbe nicht müde ward, der Pflege der Leidenden in Krieg und Frieden zu widmen. Was die Akademie sich gedrungen fühlt, Eurer Kaiserlichen und Königlichen Majestät bei diesem Anlass auszusprechen, das ist der tiefe unauslöschliche Dank, den sie der Kaiserin und Königin Augusta schuldet und zollt für das verständnissvolle Wohlwollen, welches Allerhöchstdieselbe ihr und ihren Bestrebungen stets bewies. Nicht nur fand jede wissenschaftliche Bemühung, jeder Forscher in seinem Gebiete, bei der aus einem Brennpunkte deutschen Geisteslebens hervorgegangenen Fürstin freundliches Entgegenkommen. Sondern an der Seite des Königs Wilhelm, oder begleitet vom Kronprinzen oder der Frau Kronprinzessin erschien die erlauchte Frau sogar in unseren öffentlichen Sitzungen, und verlieh unseren bescheidenen Räumlich-

keiten Glanz und Würde auch in Augen, die für den Reiz der Wissenschaft blind sind. In der Geschichte unserer Körperschaft wird dies stets eine ihrer theuersten Erinnerungen bleiben.

Allerdurchlauchtigster Kaiser und König!

In dem Hause Hohenzollern pflanzt sich seit Menschenaltern der hohe erleuchtete Sinn fort, der in der Dahingeschiedenen so lebendig war. Die Akademie blickt zu Eurer Kaiserlichen und Königlichen Majestät als zu ihrem erhabenen Schirmherrn mit dem festen Vertrauen empor, dass sie bei Allerhöchstdenselben jederzeit die gleiche Huld und hülfreiche Gesinnung finden werde, wie bei Allerhöchstderen Vorgängern auf dem Preussischen Königsthrone. Mit dieser beglückenden, in unseren Arbeiten uns stärkenden Zuversicht verharren wir in tiefster Ehrfurcht

Eurer Kaiserlichen und Königlichen Majestät
allerunterthänigste und allergetreueste
Akademie der Wissenschaften
zu Berlin.

Ausgegeben am 30. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1890.
V.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

30. Januar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

1. Hr. von Sybel gab Mittheilungen über Hassenpflug.

2. Hr. Conze machte Mittheilungen über die bei Vurwa und Velanidésa in Attika neu aufgedeckten Grabmäler.

3. Hr. Vahlen legte eine Mittheilung des Hrn. Prof. Dr. Wilhelm Meyer aus Speyer vor: Die Berliner Centones der Laudes Dei des Dracontius.

Die Mittheilung erscheint in einem der nächsten Berichte.

Ausgegeben am 6. Februar.



1890.
VI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

30. Januar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

Hr. Kronecker machte eine Mittheilung zur Theorie der elliptischen Functionen.

Ein Theil folgt umstehend, das Übrige in einem der nächsten Stücke.



Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 4. April 1889, XIX.)

XX.

Die Entwickelungen elliptischer Functionen, welche ich in den vorhergehenden Abschnitten gegeben habe, zeigen einen von den bisher bekannten Darstellungsweisen durchaus verschiedenen Charakter; sie entspringen auch einer Auffassung der elliptischen Functionen, welche von der bisher üblichen wesentlich verschieden ist. Ich habe nun in den letzten Wochen durch eben diese Auffassung neue, höchst elegante Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen erlangt, welche ich heute der Classe vorlegen will, nachdem ich sie bereits gestern meinem Freunde Kummer in einem ihm zum achtzigsten Geburtstage gewidmeten handschriftlichen Aufsatze mitgetheilt habe. Um aber mit den erwähnten Reihenentwickelungen selbst auch die leitenden Ideen, durch welche ich dazu geführt worden bin, darlegen zu können, muss ich — unter Hinweis auf die Worte, mit denen ich in der Sitzung vom 19. April 1883 die Reihe meiner auf die Theorie der elliptischen Functionen bezüglichen Mittheilungen eingeleitet habe[1] — einige Bemerkungen über allgemeine Invarianten vorausschicken.

Mit dem von Hrn. Sylvester glücklich gewählten, sinnentsprechenden Ausdruck »Invarianten« sind zwar ursprünglich nur rationale Functionen der Coefficienten von Formen bezeichnet worden, welche bei gewissen linearen Transformationen der Variabeln der Formen ungeändert bleiben, aber derselbe Ausdruck ist seitdem schon auf mancherlei andere, bei Transformationen ungeändert bleibende Bildungen übertragen worden. Diese vielfache Anwendbarkeit des Invariantenbegriffs beruht darauf, dass derselbe einer weit allgemeineren abstracteren Ideensphaere angehört. In der That wird der Invariantenbegriff, wenn er von der unmittelbaren formalen Beziehung auf ein Transformationsverfahren losgelöst und vielmehr an den allgemeinen

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1883, Stück XX.

Aequivalenzbegriff geknüpft wird, in die allgemeinste Denksphaere erhoben. Denn jede Abstraction, z. B. die von gewissen Verschiedenheiten, welche eine Anzahl von Objecten darbietet, statuirt eine Aequivalenz, und der aus der Abstraction hervorgehende Begriff, z. B. ein Gattungsbegriff, bildet die »Invariante der Aequivalenz«. Jede wissenschaftliche Forschung geht darauf aus, Aequivalenzen festzustellen und deren Invarianten zu ermitteln, und für jede gilt das Dichterwort:

»der Weise«
»sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht.«

Bezeichnet man, wie im art. XXX meines Aufsatzes[1] »Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme« Systeme von $\mathfrak{n}$ Grössen $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ kurz durch $(\mathfrak{z})$, und setzt man für solche Systeme irgend welche Aequivalenzen fest, welche der dort angegebenen Voraussetzung entsprechen, dass aus dem Bestehen der Aequivalenzen:

$$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'), \; (\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'')$$

die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$$

folgt, so können alle einander aequivalenten Systeme:

$$(\mathfrak{z}'), \; (\mathfrak{z}''), \; (\mathfrak{z}'''), \ldots$$

zu einer und derselben »Classe« vereinigt werden. Bestehen nun für eine eindeutige Function der Systems-Elemente $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$, welche mit $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ bezeichnet werden möge, die Gleichungen:

$$J(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \ldots \mathfrak{z}_n') = J(\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \ldots \mathfrak{z}_n'') = J(\mathfrak{z}_1''', \mathfrak{z}_2''', \ldots \mathfrak{z}_n''') = \ldots,$$

so soll $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ »die Invariante der Aequivalenz«:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'') \sim (\mathfrak{z}''') \sim \ldots$$

oder auch »die Invariante der durch die Systeme gebildeten Classe« heissen. Dabei soll die Invariante $J(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ als »rationale«, »algebraische«, »arithmetische«, »analytische« Invariante bezeichnet werden, je nachdem sie durch rationale, algebraische, arithmetische oder analytische Operationen aus den Elementen gebildet oder abgeleitet wird, und unter analytischen Operationen werden hierbei solche verstanden, bei denen der Limesbegriff zur Anwendung kommt.

Hat man eine hinreichende Anzahl Invarianten $J_1, J_2, \ldots J_\nu$, so kann man die Bedingungen für die Aequivalenz:

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$$

vollständig durch die ν Gleichungen:

$$J_k(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \ldots \mathfrak{z}_n') = J_k(\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \ldots \mathfrak{z}_n'') \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

ausdrücken. Es erscheint deshalb wesentlich, die Invarianten in

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1888, Stück XXIV.

solcher Weise als Functionen der Systems-Elemente darzustellen, dass dabei die Aequivalenz-Bedingungen in Evidenz treten. Dies geschieht namentlich, wenn die Invariante als symmetrische Function der sämmtlichen einander aequivalenten Systeme dargestellt wird. So kann man z. B. für die Aequivalenz:

$$\mathfrak{z} \backsim \mathfrak{z} + 1$$

deren Invariante $\pi \cot \mathfrak{z}\pi$ durch den Grenzwerth:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{1}{\mathfrak{z}+k}$$

also durch den Grenzwerth der Summe der reciproken Werthe aller einander aequivalenten Grössen $\mathfrak{z}$ ausdrücken. Wenn man ferner die Aequivalenz zweier symmetrischen Systeme:

$$(\mathfrak{z}_{ik}) \backsim (\mathfrak{z}'_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

dadurch definirt, dass die beiden quadratischen Formen:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k\,, \quad \sum_{i,k} \mathfrak{z}'_{ik} z'_i z'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch irgend eine lineare Transformation mit der Substitutionsdeterminante *Eins* in einander übergehen sollen, so kann man die einzige Invariante dieser Aequivalenz, nämlich die Determinante:

$$|\mathfrak{z}_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

falls die Formen $\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k$ negativ sind, durch den reciproken Werth des Quadrates des $n$fachen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k}\, dz_1 dz_2 \ldots dz_n \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen, und bei dieser Darstellung tritt der Invariantencharakter wiederum deutlich hervor. Denn einerseits ist die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k}\, dz_1 dz_2 \ldots dz_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum_{i,k} \mathfrak{z}'_{ik} z'_i z'_k}\, dz'_1 dz'_2 \ldots dz'_n \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

vermöge der Bedingungen für die Aequivalenz $(\mathfrak{z}_{ik}) \backsim (\mathfrak{z}'_{ik})$, wie sie oben formulirt worden sind, vollkommen evident, da hiernach:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k = \sum_{i,k} \mathfrak{z}'_{ik} z'_i z'_k$$

und die Functionaldeterminante der n Grössen z' in Beziehung auf die n Grössen z gleich Eins ist; andererseits zeigt sich der Invariantencharakter jenes $n$fachen Integrals auch, wenn man dasselbe als Grenz-

werth einer $n$fachen Summe auffasst und alsdann die aus den verschiedenen Werthsystemen $z_1, z_2, \ldots z_n$ gebildeten Grössen $\sum_{i,k} \mathfrak{z}_{ik} z_i z_k$ als die Elemente:

$$\mathfrak{z}'_{11}, \quad \mathfrak{z}''_{11}, \quad \mathfrak{z}'''_{11}, \ldots$$

der verschiedenen einander aequivalenten Systeme betrachtet.

In den beiden angeführten Fällen handelte es sich darum, bekannte Invarianten als symmetrische Functionen aller aequivalenten Systeme darzustellen. Geht man andererseits von solchen Functionen aus, so kommt es darauf an, sie auf bekannte Functionen zurückzuführen oder wenigstens ihnen noch eine andere Bedeutung abzugewinnen. So war es unmittelbar klar, dass die für positive Werthe von ρ absolut convergirende unendliche Reihe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\rho}}$$

eine Invariante der ganzen Classe von Systemen $(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$ ist, welche der durch die Bedingungen $(\mathfrak{B}_0)$ des art. II definirten Aequivalenz[1]:

$$(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0) \infty (\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$

genügen, aber seine besondere Bedeutung erhielt dieses Resultat erst durch den Nachweis, dass sich für den Grenzwerth $\rho = 0$ die zweifache Summation mittels der ϑ-Functionen ausführen lässt. Indessen gewährt die Aufstellung von Invarianten in der Form unendlicher Reihen auch da, wo sich deren Summation noch nicht mittels bekannter Functionen bewirken lässt, ein gewisses Interesse; denn die Ermittelung der Eigenschaften und der gegenseitigen Beziehungen solcher Invarianten, die Heraushebung derjenigen, welche sich durch die einfachsten Eigenschaften auszeichnen, bietet der Forschung naturgemässe Probleme dar. Ich will desshalb hier noch eine Art von Invarianten angeben, zu welcher die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen führt.

Bezeichnet man, wie im §. 24 meiner Festschrift zu Hrn. Kummer's Doctorjubiläum, mit:

$$x', x'', x''', \ldots x^{(n)}$$

n ganze algebraische Zahlen, welche die Elemente irgend eines Fundamentalsystems des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ der Ordnung n bilden, so ist:

$$u'x' + u''x'' + u'''x''' + \ldots + u^{(n)}x^{(n)}$$

eine lineare Grundform des Bereichs $(\mathfrak{S})$, und man kann die sämmt-

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1883, Stück XX.

lichen linearen Grundformen desselben Art-Bereichs als einander aequivalent betrachten. Ist nun:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

irgend eine lineare Grundform desselben Art-Bereichs ($\mathfrak{S}$), so lässt sich nach §. 22, X. meiner citirten Festschrift die Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} x^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

dadurch erfüllen, dass man für die Unbestimmten der einen Form lineare ganzzahlige Functionen der Unbestimmten der andern substituirt. Nimmt man jetzt n Variabeln $v', v'', \ldots v^{(n)}$ hinzu, so kann das System:

$$(v_0', v_0'', \ldots v_0^{(n)};\ x_0', x_0'', \ldots x_0^{(n)})$$

als »aequivalent« dem Systeme:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)};\ x', x'', \ldots x^{(n)})$$

betrachtet werden, wenn auch der Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} v_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} v^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

genügt wird, indem man für die Unbestimmten u diejenigen linearen ganzzahligen Functionen $(u_0^{(k)})$ der Unbestimmten u substituirt, für welche die Gleichung:

$$\sum_k u_0^{(k)} x_0^{(k)} = \sum_k u^{(k)} x^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

befriedigt wird.

Bei diesen Festsetzungen können nun für die ganze »Classe« der mit dem System:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)};\ x', x'', \ldots x^{(n)})$$

aequivalenten Systeme Invarianten gebildet werden, indem man die quadratische Form der n Unbestimmten $u', u'', \ldots u^{(n)}$ zu Grunde legt, welche durch Summation aller conjugirten Ausdrücke:

$$\left|\sum_k u^{(k)} x^{(k)}\right|^2 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

entsteht. Bezeichnet man diese offenbar positive quadratische Form mit $\phi(u', u'', \ldots u^{(n)})$ und setzt zur Abkürzung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u^{(k)} v^{(k)} = \psi(u', u'', \ldots u^{(n)}),$$

so sind die Reihen:

$$\sum e^{-\mathfrak{p}\phi(m_1, m_2, \ldots m_n) + 2\pi i \psi(m_1, m_2, \ldots m_n)} \qquad (\mathfrak{p} > 0),$$

$$\sum \frac{e^{2\pi i \psi(m_1, m_2, \ldots m_n)}}{\phi(m_1, m_2, \ldots m_n)^{\mathfrak{q}}} \qquad (\mathfrak{q} > \tfrac{1}{2} n)$$

Invarianten der durch das System:

$$(v', v'', \ldots v^{(n)} \colon x', x'', \ldots x^{(n)})$$

repraesentirten Classe. Die Summationen sind dabei in der ersten Reihe auf alle ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, in der zweiten mit Ausschluss solcher, für welche $\phi(m_1, m_2, \ldots m_n)$ gleich Null wird. Die absolute Convergenz der ersten Reihe ist evident; dass auch die zweite absolut convergent ist, geht unmittelbar aus der Abhandlung hervor, welche Eisenstein im 35. Bande des Crelle'schen Journals (S. 153—184) veröffentlicht hat.[1]

Nimmt man in den beiden Reihen $v' = v'' = \ldots = v^{(n)} = 0$ und also $\psi = 0$, so hängen dieselben lediglich von den Coefficienten der »Fundamentalgleichung« ab, welcher die lineare Grundform des Bereichs ($\mathfrak{S}$):

$$u'x' + u''x'' + u'''x''' + \ldots + u^{(n)}x^{(n)}$$

genügt, aber nur so, dass sie ungeändert bleiben, wenn man die Coefficienten irgend einer andern Fundamentalgleichung dafür einsetzt. Die Reihen sind dann also »Invarianten des Art-Bereichs« selbst, aber zugleich so, dass sie für alle conjugirten Art-Bereiche denselben Werth behalten. Sie sind aber auch in diesem Sinne nicht immer »charakteristisch« für den Art-Bereich: denn wenn man z. B. $n = 2$, $x' = 1$, $x'' = \sqrt{\pm D}$ setzt und D positiv annimmt, so wird die quadratische Form $\phi(u', u'')$ in beiden durch das Vorzeichen von x''^2 verschiedenen Fällen gleich:

$$2u'^2 + 2Du''^2,$$

und die Werthe der beiden den Art-Bereichen $(1, \sqrt{D})$ und $(1, \sqrt{-D})$ entsprechenden Reihen stimmen also mit einander überein.

Das ebenso einfache als nützliche Princip der Bildung von Invarianten mittels symmetrischer Functionen der Elemente aequivalenter Systeme, welches in den angeführten Beispielen angewendet worden ist, habe ich schon in einer am 12. October 1868 gelesenen, aber noch nicht publicirten Abhandlung aus den Betrachtungen über allgemeine Invarianten hergeleitet und seitdem oftmals in meinen Universitätsvorlesungen auseinandergesetzt. Auf eben demselben Princip beruht die Bedeutung des im art. XIX durch die Gleichung (8) ausgedrückten Resultats, welche im Folgenden näher dargelegt werden soll.

---

[1] Der bezügliche Convergenzbeweis ist auf S. 157—165 gegeben.

§. 1.

Im art. II[1] ist, wie schon oben angeführt wurde, die Aequivalenz zweier Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \;,\; (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

durch die Bedingungsgleichungen:

$$(\mathfrak{B}_0) \quad \begin{aligned} &\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'' \;,\; \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1) \\ &a_0' = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2 \\ &b_0' = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta' \\ &c_0' = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2 \end{aligned}$$

definirt worden, in welchen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen bedeuten. Die Elemente des Systems $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ werden dabei als reell vorausgesetzt, die drei letzten Elemente a_0, b_0, c_0, überdies so, dass $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ wird. Zur Bestimmung des Systems genügen daher vier Elemente σ, τ, b_0, c_0 oder σ, τ, a_0, b_0, und es kann demnach auch die vierte oder die letzte der sechs Bedingungen $(\mathfrak{B}_0)$ weggelassen werden.

Es soll nun im Anschluss an die Begriffsbestimmungen, welche ich in meiner Abhandlung[2] »Über bilineare Formen von vier Variabeln« gegeben habe, die Aequivalenz:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \sim (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

als eine »*vollständige*« bezeichnet werden, wenn die beiden Zahlen α', β gerade sind. Alsdann bestehen, wenn, wie früher:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0} \;,\; w' = \frac{-b_0' + i}{2c_0'}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$w' = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'} \;,\; w = \frac{\beta' w' + \alpha'}{\beta w' + \alpha} \;,$$

$$\frac{\sigma + \tau w}{-\beta w + \beta'} = \sigma' + \tau' w' - \alpha'' - \beta'' w',$$

und die Transformationsgleichung (23) im art. XI[3]. §. 4 ergiebt, wenn man darin für:

$$w, \alpha, \qquad \beta, \qquad \gamma, \delta$$

beziehungsweise:

$$\tfrac{1}{2}w, \alpha, -\tfrac{1}{2}\alpha', -2\beta, \beta'$$

---

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1883, Stück XX.

[2] Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1883.

[3] Sitzungsberichte, Jahrgang 1886, Stück XXXIX.

substituirt, die einfache Relation:

$$(\mathfrak{C})\quad (-1)^{\alpha''}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau' w'), \tfrac{1}{2}w'\right) = i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1}\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right),$$

oder also:

$$(\mathfrak{C}')\qquad \mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau' w'), \tfrac{1}{2}w'\right).$$

Die vierte Potenz der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right)$ ist demnach

> eine Invariante der vollständigen Aequivalenz:
>
> $$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \sim (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$
>
> oder der Classe von Systemen, welche durch alle mit $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ vollständig aequivalenten Systeme gebildet wird.

Dieses aus der Theorie der Transformation folgende Hauptresultat wird nun aber durch den Ausdruck von $\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right)$, welchen die citirte Gleichung (8) des art. XIX liefert:

$$(\mathfrak{D})\quad \frac{\sum\limits_{\mathfrak{m}=-\infty}^{\mathfrak{m}=+\infty}\sum\limits_{\mathfrak{n}=-\infty}^{\mathfrak{n}=+\infty} i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)}\, e^{-\pi\left(a_0(\mathfrak{m}+\frac{1}{2})^2+b_0(\mathfrak{m}+\frac{1}{2})\mathfrak{n}+c_0\mathfrak{n}^2\right)+\left((2\mathfrak{m}+1)\sigma+2\mathfrak{n}\tau\right)\pi i}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)}\, e^{-\pi\left(a_0 m^2+b_0 mn+c_0 n^2\right)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}},$$

in vollkommen sachgemässer Weise dadurch in Evidenz gesetzt,

> dass jedes einzelne Glied der beiden Reihen im Zähler und Nenner in ein entsprechendes anderes Glied übergeht, wenn man für die Grössen $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ die eines aequivalenten Systems $(\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$ substituirt.

Wird nämlich:

$$\alpha(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2})+\beta\mathfrak{n} = \mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2}, \qquad \alpha'(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2})+\beta'\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$$

$$\alpha m+\beta n = m' \qquad\qquad \alpha' m+\beta' n = n'$$

gesetzt, so ist vermöge der Aequivalenzbedingungen $(\mathfrak{B}_0)$ offenbar:

$$a_0'(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2})^2+b_0'(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2})\mathfrak{n}+c_0'\mathfrak{n}^2 = a_0(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2})^2+b_0(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2})\mathfrak{n}'+c_0\mathfrak{n}'^2,$$

$$(\mathfrak{m}+\tfrac{1}{2})\sigma'+\mathfrak{n}\tau' = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}'+\tfrac{1}{2})(\sigma+\alpha'')+\mathfrak{n}'(\tau+\beta''),$$

$$i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)} = i^{(2\mathfrak{m}'+1)(\mathfrak{n}'-1)}\cdot i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'+\alpha-\alpha'-1},$$

$$a_0' m^2+b_0' mn+c_0' n^2 = a_0 m'^2+b_0 m'n'+c_0 n'^2,$$

$$m\sigma'+n\tau' = m'(\sigma+\alpha'')+n'(\tau+\beta''),$$

$$(-1)^{m(n-1)} = (-1)^{m'(n'-1)},$$

und also:

$$i^{(2\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}-1)}\, e^{-\pi\left(a_0'(\mathfrak{m}+\frac{1}{2})^2 + b_0'(\mathfrak{m}+\frac{1}{2})\mathfrak{n} + c_0'\mathfrak{n}^2\right) + \left((2\mathfrak{m}+1)\sigma' + 2\mathfrak{n}\tau'\right)\pi i}$$

$$= (-1)^{\alpha''}\, i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha' + \alpha - \alpha' - 1} \cdot i^{(2\mathfrak{m}'+1)(\mathfrak{n}'-1)}\, e^{-\pi\left(a_0(\mathfrak{m}'+\frac{1}{2})^2 + b_0(\mathfrak{m}'+\frac{1}{2})\mathfrak{n}' + c_0\mathfrak{n}'^2\right) + \left((2\mathfrak{m}'+1)\sigma + 2\mathfrak{n}'\tau\right)\pi i},$$

$$(-1)^{m(n-1)}\, e^{-\pi(a_0'm^2 + b_0'mn + c_0'n^2) + 2(m\sigma' + n\tau')\pi i}$$

$$= (-1)^{m'(n'-1)}\, e^{-\pi(a_0 m'^2 + b_0 m'n' + c_0 n'^2) + 2(m'\sigma + n'\tau)\pi i}.$$

Es geht daher in der That, wenn man in den beiden Reihen im Zähler und Nenner des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) die Grössen:

$$\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$$

durch:

$$\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0'$$

ersetzt, jedes einzelne durch die Zahlensysteme:

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (m, n)$$

bestimmte Glied in ein anderes über, welches beziehungsweise durch die Systeme:

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}'), (m', n')$$

bestimmt ist, jedoch so, dass dabei im Zähler der Factor $(-1)^{\alpha''} i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha' + \alpha - \alpha' - 1}$ hinzutritt. Hierdurch erhellt nun unmittelbar die Transformationsgleichung ($\mathfrak{C}$) und also die Invarianteneigenschaft der vierten Potenz der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2}w\right)$.

§. 2.

Wird im Nenner des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) der Factor $e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}$ durch:

$$\cos 2(m\sigma + n\tau)\pi + i \sin 2(m\sigma + n\tau)\pi$$

ersetzt, so fällt bei der Summation der je zwei den Werthen (m, n) und $(-m, -n)$ entsprechenden Gliedern der mit i multiplicirte Theil fort, und es bleibt also nur die Reihe:

$$(\mathfrak{E}) \quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{m(n-1)}\, e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)} \cos 2(m\sigma + n\tau)\pi,$$

welche mit $\mathfrak{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bezeichnet werden möge. Wird ferner im Zähler des Ausdrucks ($\mathfrak{D}$) der Factor $e^{((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi i}$ durch:

$$\cos((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi + i \sin((2\mathfrak{m}+1)\sigma + 2\mathfrak{n}\tau)\pi$$

ersetzt, so erhält man durch Vereinigung von je zwei den Werthen $(2\mathfrak{m}+1, \mathfrak{n})$ und $(-2\mathfrak{m}-1, -\mathfrak{n})$ entsprechenden Gliedern für gerade Zahlen $\mathfrak{n}$:

$$2\,(-1)^{\frac{1}{2}\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}\sin\big((2\mathfrak{m}+1)\,\sigma+2\mathfrak{n}\tau\big)\,\pi$$

und für ungerade Zahlen $\mathfrak{n}$:

$$2\,(-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{n}-1)}\,i\sin\big((2\mathfrak{m}+1)\,\sigma+2\mathfrak{n}\tau\big)\,\pi.$$

Da nun beide Ausdrücke ungeändert bleiben, wenn man $\mathfrak{m}$ durch $-\mathfrak{m}-1$, also $2\mathfrak{m}+1$ durch $-2\mathfrak{m}-1$ und zugleich $\mathfrak{n}$ durch $-\mathfrak{n}$ ersetzt, so kann man die Reihe im Zähler von ($\mathfrak{D}$) als Aggregat:

$$\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)+i\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)$$

darstellen, wenn:

$$\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)=\sum_{\mu,n}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)+n}\,e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+b_0\mu n+4c_0n^2\right)}\sin(\mu\sigma+4n\tau)\pi,$$
$$(\mu=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots;\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$$

$$\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)=\sum_{\mu,\nu}(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}\,e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+\frac{1}{2}b_0\mu\nu+c_0\nu^2\right)}\sin(\mu\sigma+2\nu\tau)\,\pi$$
$$(\mu,\nu=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots)$$

gesetzt wird. Demnach wird:

$$(\mathfrak{F})\qquad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w),\tfrac{1}{2}w\right)=\frac{\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}+i\frac{\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)},$$

und da $\mathfrak{E}_0,\mathfrak{E}_1,\mathfrak{E}_2$ reelle Functionen der reellen Grössen σ,τ,a_0,b_0,c_0 sind, so ist hiermit die elliptische Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau w),\frac{1}{2}w\right)$ in ihren reellen und imaginären Theil zerlegt.

Für $\sigma=\frac{1}{2}$, $\tau=0$ kommt:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{1},\tfrac{1}{2}w\right)=\frac{\mathfrak{E}_1\left(\frac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)}{\mathfrak{E}_0\left(\frac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)}+i\frac{\mathfrak{E}_2\left(\frac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)}{\mathfrak{E}_0\left(\frac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)},$$

und dabei sind die Functionen $\mathfrak{E}_0,\mathfrak{E}_1,\mathfrak{E}_2$ in folgender einfachen Weise durch Reihen ausgedrückt:

$$\mathfrak{E}_0\left(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)=\sum_{m,n}(-1)^{mn}\,e^{-\pi\left(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2\right)},$$

$$\mathfrak{E}_1\left(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)=\sum_{\mu,n}(-1)^{n}\,e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+b_0\mu n+4c_0n^2\right)},$$

$$\mathfrak{E}_2\left(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0\right)=\sum_{\mu,\nu}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}\,e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+\frac{1}{2}b_0\mu\nu+c_0\nu^2\right)},$$

in welchen den Summationsbuchstaben m,n alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, den Summationsbuchstaben μ,ν aber nur alle positiven und negativen ungeraden ganzzahligen Werthe beizulegen sind.

§. 3.

Für $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ wird:

$$\sigma' = \tfrac{1}{2}\alpha + \alpha'' \; , \; \tau' = \tfrac{1}{2}\beta + \beta''$$

und also:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma' + \tau' w'), \tfrac{1}{2} w'\right) = \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{4}\beta w' + \tfrac{1}{2}\beta'' w', \tfrac{1}{2} w'\right).$$

Da nun für ganze Zahlen m, n die Relation besteht:

$$\mathrm{El}\left(\zeta + \tfrac{1}{2} m + \tfrac{1}{2} nw, \tfrac{1}{2} w\right) = (-1)^m \, \mathrm{El}\left(\zeta, \tfrac{1}{2} w\right),$$

so erhält man, wenn man berücksichtigt, das β eine gerade Zahl ist, für die obigen Werthe von σ', τ' die Formel:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma' + \tau' w), \tfrac{1}{2} w'\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha - 1) + \alpha''} \, \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w'\right),$$

durch welche die Gleichung ($\mathfrak{E}$) des §. 1 in folgende übergeht:

$$(\mathfrak{E}^0) \qquad \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w'\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha'} \, i^{\frac{1}{2}\alpha\alpha'} \, \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w\right).$$

Die vierte Potenz von:

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4 c_0}\right)$$

ist daher eine Invariante der Classe von Systemen (a_0, b_0, c_0), welche diesem vollständig aequivalent sind, d. h. also der Gesammtheit der Systeme:

$$\left(a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \; 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \; a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2\right),$$

für welche α, β' ungerade Zahlen und α', β gerade Zahlen sind, die der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügen. Dass aber diese Invariante für die bezügliche Classe auch charakteristisch ist, d. h. dass aus der Existenz einer Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4 c_0}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{4 \mathfrak{c}_0}\right)$$

das Bestehen der Aequivalenz:

$$(a_0, b_0, c_0) \sim (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0), \qquad (4a_0c_0 - b_0^2 = 4\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0 - \mathfrak{b}_0^2 = 1)$$

und zwar als einer vollständigen, gefolgert werden kann, geht schon aus den allgemeineren Ausführungen im §. 15 des art. XI hervor.[1] Aber ich will dies hier nochmals in der für den vorliegenden Zweck geeigneten Weise ausführlich begründen.

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1886, Stück XXXIX. Vergl. auch die Abhandlung des Hrn. FUCHS »Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces« im 83. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{-b_0+i}{2c_0} = w\,, \quad \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{2\mathfrak{c}_0} = \mathfrak{w}\,,$$

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \varkappa\,,$$

so ist:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\right) = \pm\varkappa\,,$$

und es wird der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \varkappa(1-x^4) - (1+\varkappa^2)x^2$$

nebst der Bedingung $x = 0$ für $u = 0$, gemäss der im art. XI, §. 4 gegebenen Definition der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ als Quotient zweier ϑ-Functionen[1], sowohl durch:

$$x = \mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}\left(\vartheta_3(0, w)\right)^{-2}, \tfrac{1}{2}w\right)$$

als auch durch:

$$x = i^h\cdot\mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}\left(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\right)^{-2}, \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\right),$$

für einen bestimmten Werth von h, genügt. Demnach ist:

$$(\mathfrak{H})\quad \mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}\left(\vartheta_3(0, w)\right)^{-2}, \tfrac{1}{2}w\right) = i^h\,\mathrm{El}\left(\frac{u}{2\pi}\left(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\right)^{-2}, \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\right).$$

Aus der angeführten Definition der elliptischen Function $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ folgt ferner deren Productdarstellung:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}\zeta, \tfrac{1}{2}w\right) = 2e^{\frac{1}{4}w\pi i}\sin\zeta\pi\,\frac{\prod\left(1-e^{(2nw+2\varepsilon\zeta)\pi i}\right)}{\prod\left(1-e^{(\nu w+2\varepsilon\zeta)\pi i}\right)} \quad \left(\begin{matrix}\varepsilon=\pm1,\ n=1,2,3,\ldots\\ \nu=1,3,5,7\ldots\end{matrix}\right),$$

aus welcher sich unmittelbar ergiebt, dass $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}w\right)$ nur für die Werthe:

$$\zeta = m + nw \qquad (m, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$$

gleich Null wird. Da hiernach die elliptische Function auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{H})$ nur für:

$$u = (m+nw)\pi\left(\vartheta_3(0, w)\right)^2 \qquad (m, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)\,,$$

die auf der rechten Seite aber nur für:

$$u = (\mathfrak{m}+\mathfrak{n}\mathfrak{w})\pi\left(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\right)^2 \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n} = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$$

gleich Null wird, so muss es für jedes System von Zahlen (m, n) ein System $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ und ebenso für jedes System $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ein System (m, n) geben, für welches:

$$(m+nw)\left(\vartheta_3(0, w)\right)^2 = (\mathfrak{m}+\mathfrak{n}\mathfrak{w})\left(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\right)^2$$

---

[1] Sitzungsberichte, Jahrgang 1886, Stück XXXIX.

wird. Es sei demgemäss, wenn für (m, n) die Systeme $(0, 1)$ und $(1, 0)$ genommen werden:

$$(\mathfrak{K})\quad w\big(\vartheta_3(0, w)\big)^2 = (\alpha + \beta\mathfrak{w})\,t\big(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\big)^2,\ \big(\vartheta_3(0, w)\big)^2 = (\alpha' + \beta'\mathfrak{w})\,t\big(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\big)^2,$$

wo die positive Zahl t den grössten gemeinsame Theiler der vier Zahlen

$$\alpha t,\ \beta t,\ \alpha' t,\ \beta' t$$

bedeutet; ferner sei in analoger Weise, wenn für $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ die Systeme $(0, 1)$ und $(1, 0)$ genommen werden:

$$(\mathfrak{K}')\quad \mathfrak{w}\big(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\big)^2 = (\alpha_1 + \beta_1 w)\,t_1\big(\vartheta_3(0, w)\big)^2,\ \ \big(\vartheta_3(0, \mathfrak{w})\big)^2 = (\alpha_1' + \beta_1' w)\,t_1\big(\vartheta_3(0, w)\big)^2.$$

Aus diesen vier Gleichungen $(\mathfrak{K})$, $(\mathfrak{K}')$ ergeben sich durch Elimination der Grösse $\mathfrak{w}$ und des Quotienten $\dfrac{\vartheta_3(0, w)}{\vartheta_3(0, \mathfrak{w})}$ die zwei Gleichungen:

$$w\big(1 - tt_1(\alpha\beta_1' + \beta\beta_1)\big) = tt_1(\alpha\alpha_1' + \beta\alpha_1),$$
$$1 - tt_1(\alpha'\alpha_1' + \beta'\alpha_1) = tt_1(\alpha'\beta_1' + \beta'\beta_1)\,w,$$

und aus diesen folgt, da w eine complexe Grösse ist:

$$(\mathfrak{K}'')\qquad \begin{aligned} tt_1(\alpha\beta_1' + \beta\beta_1) &= 1, & \alpha\alpha_1' + \beta\alpha_1 &= 0 \\ tt_1(\alpha'\alpha_1' + \beta'\alpha_1) &= 1, & \alpha'\beta_1' + \beta'\beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nach der ersten und dritten Gleichung kann

weder α mit β, noch α' mit β', noch α_1 mit α_1', noch β_1 mit β_1'

einen gemeinsamen Theiler haben; aus der zweiten und vierten Gleichung folgen demnach die Relationen:

$$\alpha = -\varepsilon\alpha_1,\qquad \beta = \varepsilon\alpha_1'\qquad\qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

mittels deren die erste Gleichung in folgende übergeht:

$$\varepsilon tt_1(\alpha_1'\beta_1 - \alpha_1\beta_2') = 1.$$

Beide positive Zahlen t und t_1 müssen also gleich *Eins* sein. Es muss aber auch $\varepsilon = +1$ sein; denn gemäss den Gleichungen $(\mathfrak{K}')$ ist:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w},$$

und der reelle Theil von $\mathfrak{w}i$ muss ebenso wie der von wi negativ sein.

Hiermit ist nachgewiesen, dass aus der Gleichung:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\right)$$

mit Nothwendigkeit die Relationen:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w},\ \alpha_1'\beta_1 - \alpha_1\beta_1' = 1$$

folgen, in welchen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1'$ ganze Zahlen sind. Dabei müssen

aber die beiden Zahlen α_1 und β_1' gerade sein, denn wenn man auf die Function $\mathrm{El}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}w)$, d. h. auf den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}, w)}{\vartheta_0(\frac{1}{2}, w)},$$

die bekannten Transformations-Relationen anwendet, so sieht man, dass die Gleichung:

$$\mathrm{El}^4(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w}\right)$$

nur dann besteht, wenn α_1 und β_1' gerade sind.

Setzt man:

$$\alpha_1 = -\alpha', \alpha_1' = \beta', \beta_1 = \alpha, \beta_1' = -\beta$$

und substituirt für $\mathfrak{w}$ und w in der Gleichung:

$$\mathfrak{w} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 w}{\alpha_1' + \beta_1' w} = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'}$$

die Werthe:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad \mathfrak{w} = \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{2\mathfrak{c}_0},$$

so ergeben sich die Relationen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_0 &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\
\mathfrak{b}_0 &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\
\mathfrak{c}_0 &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2,
\end{aligned}$$

und da hierbei $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ und sowohl α' als auch β gerade ist, so sind die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0), \quad (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$$

einander vollständig aequivalent. Diese Aequivalenz hat sich also in der That als eine nothwendige Folge der Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4c_0}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{4\mathfrak{c}_0}\right)$$

erwiesen.

Sind die zwei Systeme (a_0, b_0, c_0), $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$ in der speciellen Weise einander vollständig aequivalent, dass der mit α' bezeichnete Coefficient der Substitution nicht blos durch 2 sondern auch durch 4 theilbar ist, so besteht die Gleichung:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4c_0}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0 + i}{4\mathfrak{c}_0}\right).$$

und nach vorstehenden Ausführungen ist auch umgekehrt aus dem

Bestehen der Gleichung ($\mathfrak{G}'$) zu erschliessen, dass die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0) \;,\quad (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$$

in jener speciellen Weise einander vollständig aequivalent sein müssen. Denn gemäss der Gleichung ($\mathfrak{C}^0$) im §. 3 wird:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha'}\,\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-\mathfrak{b}_0+i}{4\mathfrak{c}_0}\right),$$

und die Gleichung ($\mathfrak{G}'$) würde daher nicht erfüllt sein können, wenn α' nicht durch 4 theilbar wäre. Es zeigt sich also, dass:

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right)$$

eine charakteristische Invariante derjenigen speciellen Classe von Systemen (a_0, b_0, c_0) ist, welche in der bezeichneten Weise einander vollständig aequivalent sind.

Da die Systeme (a_0, b_0, c_0) zwei wesentliche Elemente enthalten, so sind auch zwei Invarianten zur Charakterisirung der Classe erforderlich. Diese erhält man, indem man die angegebene charakteristische Invariante, welche eine complexe Function von b_0, c_0 ist, in ihre beiden Theile zerlegt.

§. 4.

Bestehen zwischen zwei Systemen von Grössen:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \; (\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$$

die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right)$$

$$(\mathfrak{L}') \qquad \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma_1+\tau_1 w'), \tfrac{1}{2}w'\right),$$

in welchen:

$$w = \frac{-b_0+i}{2c_0}, \quad w' = \frac{-b_0'+i}{2c_0'}$$

ist, so müssen zuvörderst wegen der Gleichung ($\mathfrak{L}$), gemäss dem im vorigen Paragraphen gegebenen Nachweis, die beiden Systeme:

$$(a_0, b_0, c_0), \; (a_0', b_0', c_0')$$

einander vollständig aequivalent sein, und zwar so, dass in der zwischen w und w' bestehenden linearen Gleichung:

$$w' = \frac{\alpha w - \alpha'}{-\beta w + \beta'}$$

der Coefficient α' durch 4 theilbar ist. Nach der Transformationsgleichung ($\mathfrak{C}$) im §. 1 wird nun aber:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau'w'), \tfrac{1}{2}w'\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right),$$

wo σ', τ' durch die Gleichungen:

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta''$$

bestimmt sind. Die Gleichung ($\mathfrak{L}'$) geht hiernach in folgende über:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma'+\tau'w'), \tfrac{1}{2}w'\right) = \pm\,\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{2}(\sigma_1+\tau_1 w'), \tfrac{1}{2}w'\right),$$

aus welcher mittels des Additionstheorems in der bekannten Weise zu schliessen ist, dass die Grössen σ_1, τ_1 und σ', τ' mit einander durch eine Relation:

$$\sigma_1 + \tau_1 w' = \varepsilon(\sigma'+\tau'w') + m + nw'$$

verbunden sein müssen, in welcher m und n ganze Zahlen bedeuten und $\varepsilon = \pm 1$ ist. Es wird hiernach:

$$\sigma_1 = \varepsilon\sigma' + m, \quad \tau_1 = \varepsilon\tau' + n$$

und also:

$$\sigma_1 = \varepsilon\alpha\sigma + \varepsilon\alpha'\tau + \alpha'' + m, \quad \tau' = \varepsilon\beta\sigma + \varepsilon\beta'\tau + \beta'' + n.$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} \varepsilon\alpha &= \alpha_1, & \varepsilon\alpha' &= \alpha_1', & \alpha''+m &= \alpha_1'', \\ \varepsilon\beta &= \beta_1, & \varepsilon\beta' &= \beta_1', & \beta''+n &= \beta_1'', \end{aligned}$$

so sind die Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, $(\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$ mit einander durch die Transformationsgleichungen verbunden:

$$(\mathfrak{M})\quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1\sigma + \alpha_1'\tau + \alpha_1'', \quad \tau_1 = \beta_1\sigma + \beta_1'\tau + \beta_1'', \\ a_0' &= a_0\alpha_1^2 + b_0\alpha_1\alpha_1' + c_0\alpha_1'^2, \\ b_0' &= 2a_0\alpha_1\beta_1 + b_0(\alpha_1\beta_1' + \alpha_1'\beta_1) + 2c_0\alpha_1'\beta_1', \\ c_0' &= a_0\beta_1^2 + b_0\beta_1\beta_1' + c_0\beta_1'^2, \end{aligned}$$

in denen:

$$\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1 = 1, \quad \alpha_1' \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 4), \quad \beta_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2)$$

ist. Es zeigt sich also, dass aus dem Bestehen der Gleichungen ($\mathfrak{L}$) und ($\mathfrak{L}'$) das Bestehen der Transformationsgleichungen ($\mathfrak{M}$) zu erschliessen ist, welche jene specielle Art vollständiger Aequivalenz der beiden Systeme:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), \quad (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

constituiren, und dieses Hauptresultat kann offenbar dahin formulirt werden, dass die specielle Classe von Systemen $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, welchen die Invarianten:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right), \quad \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right)$$

angehören, durch das »System dieser beiden Invarianten« vollständig charakterisirt wird.

Die Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ sind durch vier reelle Elemente σ, τ, b_0, c_0 bestimmt, und es bedarf daher auch eines Systems von vier reellen Invarianten zur Charakterisirung einer Classe. Nun ist bei Benutzung der im §. 2 eingeführten Bezeichnungen:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1^2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0) + 2i\,\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)\,\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}$$

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \frac{\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0) - \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0) + 2i\,\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)\,\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}.$$

Man kann also ein charakteristisches System von Invarianten einer durch $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ repraesentirten speciellen Classe durch folgende vier reelle Functionen von $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ bilden:

$$\frac{\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)} - \frac{\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}, \quad \frac{\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)\,\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)}$$

$$\frac{\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)} - \frac{\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}, \quad \frac{\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)\,\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}{\mathfrak{E}_0^2(\tfrac{1}{2},0,a_0,b_0,c_0)}.$$

§. 5.

Die vorstehenden Entwickelungen reichen dazu aus, nachzuweisen, dass die beiden Functionen:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right), \quad \frac{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right)},$$

in welchen, wie oben:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}$$

ist, ein System charakteristischer Invarianten für die Classe aller einander vollständig aequivalenter Grössensysteme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ bilden.

Bestehen nämlich für zwei Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, $(\sigma_1, \tau_1, a_0', b_0', c_0')$ die Gleichungen:

$$\mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^4\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right),$$

$$(\mathfrak{N}') \qquad \frac{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right)} = \frac{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma_1+\tau_1 w'), \tfrac{1}{2}w'\right)}{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right)},$$

in welchen:

$$w' = \frac{-b_0' + i}{2c_0'}$$

ist, so muss entweder:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right) \text{ oder } -\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right)$$

sein. Im ersten Falle sind die Gleichungen $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{L}')$ des vorigen Paragraphen erfüllt, aus welchen, wie schon dort dargethan worden — das Bestehen der Transformationsgleichungen $(\mathfrak{M})$ erschlossen werden kann. Im zweiten Falle ergeben sich mittels der Relationen:

$$-\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}(w+2)\right),$$

$$-\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}(w+2)\right)$$

aus den Gleichungen $(\mathfrak{N}')$ die folgenden:

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}(w+2)\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w'\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma-2\tau+\tau(w+2)), \tfrac{1}{2}(w+2)\right) = \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma_1+\tau_1 w'), \tfrac{1}{2}w'\right),$$

welche, wenn man $w+2$ durch w und zugleich $\sigma-2\tau$ durch σ ersetzt, mit den Bedingungen $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{L}')$ identisch werden. Auch in diesem Falle zeigt sich also das Bestehen der Transformationsgleichungen $(\mathfrak{M})$ als eine Folge des Bestehens der Gleichungen $(\mathfrak{N}')$, und es ist hiermit nachgewiesen, dass durch die Werthe der beiden Functionen der vier Grössen σ, τ, b_0, c_0:

$$(\mathfrak{N}) \qquad \mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right), \quad \frac{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\tau w), \tfrac{1}{2}w\right)}{\mathrm{El}^2\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}w\right)} \qquad \left(w = \frac{-b_0+i}{2c_0}\right)$$

die Classe der dem Systeme $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ vollständig aequivalenten Systeme eindeutig bestimmt ist.

Beide Functionen $(\mathfrak{N})$ haben complexe Werthe, und es sind eigentlich die Werthe der beiden reellen und der beiden mit i multiplicirten Theile dieser Functionen, welche das charakteristische System der vier Invarianten der bezeichneten Classe bilden. Benutzt man die oben eingeführten Bezeichnungen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ und lässt dabei der Einfachheit halber die Grössen a_0, b_0, c_0 innerhalb der Parenthesen weg, so dass man $\mathfrak{E}(\sigma, \tau)$ an Stelle von $\mathfrak{E}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ setzt, so sind die vier Invarianten:

$$\frac{\left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right)^2 + 4\,\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0)\,\mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)}{\mathfrak{E}_0^4(\tfrac{1}{2}\, 0)},$$

$$\frac{\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2}, 0)\,\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2}, 0)\left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right)}{\mathfrak{E}_0^4(\tfrac{1}{2}, 0)},$$

$$\frac{\left(\mathfrak{E}_1^2(\sigma,\tau) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma,\tau)\right)\left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right) + 4\,\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau)\,\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau)\,\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2}, 0)\,\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2}, 0)}{\left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) + \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right)^2},$$

$$\frac{\left(\mathfrak{E}_1^2(\sigma,\tau) - \mathfrak{E}_2^2(\sigma,\tau)\right)\mathfrak{E}_1(\tfrac{1}{2}, 0)\,\mathfrak{E}_2(\tfrac{1}{2}, 0) + \left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) - \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right)\mathfrak{E}_1(\sigma,\tau)\,\mathfrak{E}_2(\sigma,\tau)}{\left(\mathfrak{E}_1^2(\tfrac{1}{2}, 0) + \mathfrak{E}_2^2(\tfrac{1}{2}, 0)\right)^2}.$$

Wenn man endlich die Jacobi'schen Bezeichnungen anwendet, so ist:

$$\mathrm{El}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} w\right) = \sqrt{\varkappa}\,,\ \pi\left(\vartheta_3(0, w)\right)^2 = 2K,\ w = \frac{K' i}{K},$$

$$\frac{\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}(\sigma + \tau w), \frac{1}{2} w\right)}{\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} w\right)} = \sin\mathrm{am}\,(2\sigma K + 2\tau K' i, \varkappa)\,.$$

Das System der vier Invarianten der bezeichneten Classe von Systemen $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ wird also einfach

aus den je zwei Theilen der beiden complexen Grössen

$$\varkappa^2,\quad \sin^2\mathrm{am}\,(2\sigma K + 2\tau K' i, \varkappa)$$

gebildet,

vorausgesetzt, dass darin $\varkappa$, K, K' als Functionen von a_0, b_0, c_0 durch die Gleichungen definirt werden:

$$\varkappa = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4c_0}\right),\ 2K = \pi\vartheta_3^2\left(0, \frac{-b_0 + i}{2c_0}\right),\ 2K' = \pi\vartheta_3^2\left(0, \frac{b_0 + i}{2a_0}\right),$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen:

$$\sqrt{\varkappa} = e^{-\frac{\pi(1 + b_0 i)}{8c_0}} \cdot \frac{\sum\limits_n e^{-\pi n(n+1)\frac{1 + b_0 i}{2c_0}}}{\sum\limits_n e^{-\pi n^2 \frac{1 + b_0 i}{2c_0}}},$$

$$\sqrt{2K} = \sqrt{\pi}\sum_n e^{-\pi n^2 \frac{1 + b_0 i}{2c_0}},\quad \sqrt{2K'} = \sqrt{\pi}\sum_n e^{-\pi n^2 \frac{1 - b_0 i}{2a_0}},$$

wenn die Summationen auf alle ganzen Zahlen n von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden. Dabei ist noch zu bemerken, dass zwischen den beiden letzten Summen die Gleichung:

$$(1 + b_0 i)\sum_n e^{-\pi n^2 \frac{1 + b_0 i}{2c_0}} = 2c_0 \sum_n e^{-\pi n^2 \frac{1 - b_0 i}{2a_0}}$$

besteht, welche aus der Theorie der Transformation der ϑ-Reihen folgt.

§. 6.

Schon in meinen ersten Untersuchungen über die elliptischen Functionen mit jenen besonderen Moduln, welche ich als singuläre bezeichnet habe, bin ich auf eine analytische Invariante derjenigen arithmetischen Aequivalenz:

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \infty (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

geführt worden, welche durch das Bestehen der oben im §. 1 mit ($\mathfrak{B}_0$) bezeichneten Gleichungen begründet wird. Diese Invariante findet sich in dem in den Monatsberichten abgedruckten Auszuge aus meiner am 22. Januar 1863 gelesenen Abhandlung über die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen, und sie ist im Sitzungsberichte vom 19. April 1883 im art. I dieser Reihe von Mittheilungen »zur Theorie der elliptischen Functionen« mit:

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right)$$

bezeichnet. Vor dieser Invariante Λ haben die im vorigen Paragraphen angegebenen Invarianten $\varkappa^2$ und $\sin^2 \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ zuvörderst das voraus, dass sie für die Classe vollständig aequivalenter Systeme charakteristisch sind, während die Invariante Λ für je sechs Classen, deren Unterscheidung sich nach arithmetischen Gesichtspunkten als nothwendig erweist,[1] einen und denselben Werth behält. Ausserdem aber haben die Functionen $\varkappa^2$ und $\sin^2 \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$, deren reelle und imaginäre Theile die vier erforderlichen Invarianten repraesentiren, noch den Vorzug, dass sie diese vier Invarianten in elegantester Weise zu zwei Functionen zweier complexer Variabeln zusammenfassen. Aber in der ihrer Invarianteneigenschaft und dadurch ihrer eigentlichen Natur entsprechenden Darstellung dieser Functionen durch den Ausdruck ($\mathfrak{D}$) erscheinen die je zwei Theile der beiden complexen Variabeln wieder getrennt. Dieser Umstand hat mich auf den Gedanken gebracht, dass sich noch andere naturgemässe Entwickelungen der elliptischen Functionen finden lassen möchten, wenn man eine Trennung der beiden Theile der complexen Variabeln zulässt, und es lag hierbei offenbar am nächsten, die Entwickelung von $\sin \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ in eine zweifache nach sinus und cosinus der Vielfachen von σ und τ fortschreitende Doppelreihe zu versuchen. Dies hat nun in der That zu überraschend einfachen und eleganten Formeln geführt, und es hat sich dadurch gezeigt, dass man sich nicht, wie bisher, auf solche Entwickelungen von Functionen einer complexen Variabeln $x + yi$ beschränken darf, welche die Variabeln x und y nur in ihrer formalen Verbindung zu $x + yi$ enthalten.

Die Entwickelung von $\sin \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa)$ in eine Fourier'sche Doppelreihe ergiebt folgendes Resultat:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \varkappa \sin \mathrm{am}(2\sigma K + 2\tau K'i, \varkappa) = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^n e^{(\nu\sigma + 2n\tau)\pi i}}{\nu K'i - 2nK}.$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \quad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

---

[1] Vergl. die Ausführungen im §. 1 meiner schon oben citirten akademischen Abhandlung »Über bilineare Formen mit vier Variabeln«.

Sondert man nämlich die Summe auf der rechten Seite in die beiden Theile, welche positiven und negativen Werthen von ν entsprechen, so wird dieselbe gleich dem Aggregat:

$$\frac{1}{2K}\sum_{\nu,n}\frac{e^{(\nu\sigma+n(2\tau+1))\pi i}}{\frac{1}{2}\nu w-n}+\frac{1}{2K}\sum_{\nu,n}\frac{e^{(-\nu\sigma+n(2\tau+1))\pi i}}{-\frac{1}{2}\nu w-n}.$$

$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots;\quad \nu=1,3,5,7,\ldots)$$

Führt man nun die Summationen in Beziehung auf n mit Hülfe der schon im art. I benutzten Formel aus:

$$(\mathfrak{Q})\qquad \sum_n \frac{e^{n v\pi i}}{w-n}=\frac{2\pi i e^{vw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1}\qquad \left(\begin{matrix}0<v<2,\\ n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3\ldots\end{matrix}\right),$$

indem man hierin $v=2\tau+1$ und für w das eine Mal $\frac{1}{2}\nu w$, das andere Mal $-\frac{1}{2}\nu w$ setzt, so kommt:

$$\frac{\pi i}{2K}\sum_\nu \frac{e^{\left(\sigma+\tau w+\frac{1}{2}w\right)\nu\pi i}}{e^{\nu w\pi i}-1}+\frac{\pi i}{2K}\sum_\nu \frac{e^{-\left(\sigma+\tau w+\frac{1}{2}w\right)\nu\pi i}}{e^{-\nu w\pi i}-1},$$

oder also:

$$-\frac{2\pi}{K}\sum_\nu \frac{\sin\nu(\sigma+\tau w)\pi}{e^{\frac{1}{2}\nu w\pi i}-e^{-\frac{1}{2}\nu w\pi i}}\qquad (\nu=1,3,5\ldots).$$

Setzt man in diesem Ausdruck:

$$e^{w\pi i}=q,\quad (\sigma+\tau w)\pi=x,$$

so erhält man denjenigen, welcher in der Formel (19) im art. 39 von JACOBI's »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum« auf der rechten Seite steht, multiplicirt mit $\frac{\pi}{2K}$; sein Werth ist demgemäss:

$$\varkappa\sin\operatorname{am}2K(\sigma+\tau w)$$

oder also in der That gleich:

$$\varkappa\sin\operatorname{am}(2\sigma K+2\tau K'i,\varkappa).$$

Die Formel ($\mathfrak{P}$) kann auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathfrak{P}')\qquad \varkappa\sin\operatorname{am}(2\sigma K+2\tau K'i,\varkappa)=\sum_{\nu,n}\frac{(-1)^n\sin(\nu\sigma+2n\tau)\pi}{\nu K'+2nKi}.$$

$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots;\quad \nu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots)$$

Nimmt man in derselben $\sigma=\frac{1}{2}$, $\tau=0$, so resultirt die folgende Reihenentwickelung des Moduls:

$$(\mathfrak{P}'')\qquad \varkappa=\sum_{\nu,n}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2n+\nu-1)}}{\nu K'+2nKi},$$

und wenn $\sigma=\frac{1}{2}$ gesetzt und dann zum Werthe $\tau=\frac{1}{2}$ übergegangen wird, so kommt:

$$1 = \lim_{\tau=\frac{1}{2}} \sum_{\nu,n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2n+\nu-1)} \cos 2n\tau\pi}{\nu K' + 2nKi},$$

oder:

$$(\mathfrak{R}) \qquad 1 = \lim_{\tau=0} \sum_{\nu,n} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} \cos 2n\tau\pi}{\nu K' + 2nKi}.$$

Die Summation ist oben erst in Beziehung auf n und dann in Beziehung auf ν ausgeführt worden. Es kann aber auch in der entgegengesetzten Reihenfolge summirt werden. Um dies näher zu erörtern gehe ich von folgender allgemeineren Reihe aus:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2(m\xi+n\eta)\pi i}}{u+mv+nw} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

welche mit:

$$\mathrm{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$$

bezeichnet werden möge, und in welcher ξ, η als reell, u, v, w aber als complex vorausgesetzt werden, die letzteren beiden Grössen v, w überdies so, dass deren Verhältniss nicht reell ist. Führt man mittels der schon oben benutzten Formel ($\mathfrak{O}$) die Summation in Beziehung auf m aus, so resultirt unter der dabei nöthigen Voraussetzung:

$$-1 < \xi < 0$$

die Gleichung:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \mathrm{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}}.$$

Die beiden Reihen, in welche man die Reihe auf der rechten Seite je nach den beiden Vorzeichen der Werthe von n zerlegen kann, sind convergent. Denn wenn der reelle Theil von $\frac{2w\pi i}{v}$ mit n gleiches Zeichen hat, so ist für hinreichend grosse Werthe von n der absolute Werth des Quotienten der Division des $(n+1)$ten Gliedes durch das $n$te Glied kleiner als *Eins*, weil $1+\xi$ positiv ist, und wenn das Vorzeichen des reellen Theiles von $\frac{2w\pi i}{v}$ demjenigen von n entgegengesetzt ist, so ist eben derselbe Quotient für hinreichend grosse Werthe von n desshalb kleiner als *Eins*, weil ξ negativ ist.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 6. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1890.
VII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

6. Februar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. von Hofmann las über Dissociationsversuche.

Die Mittheilung folgt in einem der nächsten Stücke.

2. Hr. Kronecker machte eine Mittheilung, betreffend die Summation der Reihe Ser (ξ, η, u, v, w). Der Inhalt ist mit in die unten folgende Fortsetzung seines in der letzten Classensitzung gelesenen Aufsatzes aufgenommen.

3. Hr. Schwendener legte eine Mittheilung des Privatdocenten der Botanik an hiesiger Universität, Hrn. Dr. Al. Tschirch, vor über das Saugorgan der Scitamineen-Samen.

Die Mittheilung folgt umstehend.

Am 3. Februar starb in Utrecht Hr. Prof. Christof. Henr. Died. Buys-Ballot, Director des Kgl. Niederländischen Meteorologischen Instituts, correspondirendes Mitglied der physikalisch-mathematischen Classe.



Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 30. Januar, VI.)

§. 7.

Die Gleichung ($\mathfrak{S}$) ist im vorigen Paragraphen dadurch erlangt worden, dass in der mit $\text{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$ bezeichneten Reihe die Summation in Beziehung auf m ausgeführt worden ist. Das durch die Gleichung ($\mathfrak{S}$) dargestellte Resultat besteht also eigentlich darin, dass der Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\xi+n\eta)\pi i}}{u+mv+nw} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

wenn man, wie es die Reihenfolge $\lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty}$ andeutet, zuerst M und dann N in's Unendliche wachsen lässt, mit dem Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}'') \qquad \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{n} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}} \qquad \begin{pmatrix} n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N; \\ -1 < \xi < 0 \end{pmatrix}$$

übereinstimmt. In der Gleichung:

$$(\mathfrak{S}) \qquad \text{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{-2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{n} \frac{e^{2n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+nw)\frac{\pi i}{v}}}$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

hat daher $\text{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$ die durch:

$$(\mathfrak{S}^0) \quad \text{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\xi+n\eta)\pi i}}{u+mv+nw} \quad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M, \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N, \\ -1 < \xi < 0 \end{pmatrix}$$

ausgedrückte Bedeutung.

Substituirt man hierin $-\eta$ für η und $-w$ für w und ersetzt dann den Summationsbuchstaben n auf der rechten Seite durch $-n$, so sieht man, dass die Relation besteht:

$$\text{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \text{Ser}(\xi, -\eta, u, v, -w);$$

man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass in dem Quotienten $\frac{wi}{v}$ der reelle Theil negativ ist. Da ferner u um ein ganzes Vielfaches von w vermehrt oder vermindert werden kann,

so kann man noch voraussetzen, dass der reelle Theil von $\frac{ui}{v}$ zwischen demjenigen von $\frac{wi}{v}$ und Null liege.

Nun kann der Ausdruck ($\mathfrak{S}''$), welcher auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{S}$) steht, in folgender Weise dargestellt werden:

$$-\frac{2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \sum_{\varepsilon, n} \frac{e^{2\varepsilon n(\eta v - \xi w)\frac{\pi i}{v}}}{1 - e^{2(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, \ n = 0, 1, 2, \ldots N \\ \varepsilon = -1, \ n = 1, 2, 3, \ldots N \end{pmatrix},$$

und es kann hierbei von den beiden, den Werthen $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ entsprechenden, durch die Gleichung:

$$\frac{1}{1 - e^{2(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}}} = \varepsilon \sum_m e^{2\varepsilon m(u+\varepsilon n w)\frac{\pi i}{v}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, \ m = 0, 1, 2, \ldots \\ \varepsilon = -1, \ m = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

gegebenen Reihenentwickelungen Gebrauch gemacht werden, da dieselben offenbar gemäss der über $\frac{wi}{v}$ und $\frac{ui}{v}$ gemachten Voraussetzung convergiren. Der Ausdruck ($\mathfrak{S}''$) geht alsdann in folgenden über:

$$(\mathfrak{S}''') \quad -\frac{2\pi i}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{(mnw + \varepsilon mu + \varepsilon n(\eta v - \xi w))\frac{2\pi i}{v}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1 ; \ m, n = 0, 1, 2, \ldots \\ \varepsilon = -1 ; \ m, n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

in welchem sich die Reihe, wie nun gezeigt werden soll, mittels der ϑ-Functionen summiren lässt.

Um dies darzuthun, gehe ich von jener Function zweier complexer Variabeln ξ, η aus:

$$\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\,\vartheta_0(\eta)},$$

welche ich in meiner Notiz vom 22. December 1881 eingeführt[1] und dann mehrfach, z. B. im art. X dieser Mittheilungen über die elliptischen Functionen,[2] behandelt habe. In der erwähnten Notiz habe ich für jene Function die a. a. O. mit (I′) bezeichnete elegante Reihenentwickelung hergeleitet:

$$(\mathfrak{T}) \qquad \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\,\vartheta_0(\eta)} = 4\pi \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin(\mu\xi + \nu\eta)\,\pi \qquad (\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots).$$

unter den Bedingungen:

[1] Monatsberichte vom December 1881, S. 1168 (I′).

[2] Sitzungsberichte, Jahrgang 1885, Stück XXXVIII.

$$\left|q\right| < 1, \quad \left|q^{\frac{1}{2}}\right| < \left|e^{\xi\pi i}\right| < \left|q^{-\frac{1}{2}}\right|, \quad \left|q^{\frac{1}{2}}\right| < \left|e^{\eta\pi i}\right| < \left|q^{-\frac{1}{2}}\right|.$$

Hierbei ist, wie gewöhnlich,[1] wenn $q = e^{w\pi i}$ gesetzt wird:

$$\vartheta_0(\zeta, w) = \sum_n (-q)^{n^2} \cos 2n\zeta\pi, \quad \vartheta_1(\zeta, w) = q^{\frac{1}{4}} \sum_n (-1)^n q^{n^2+n} \sin(2n+1)\zeta\pi,$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

und es ist nur, der Einfachheit halber, das zweite Argument w, welches oben überall dasselbe ist, weggelassen worden.

Die Formel $(\mathfrak{T})$ kann offenbar, da $q = e^{w\pi i}$ gesetzt worden ist, auch so dargestellt werden:

$$(\mathfrak{T}_0) \quad -\frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\vartheta_0(\eta)} = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} \varepsilon e^{\left(\frac{1}{2}\mu\nu w + \varepsilon\mu\xi + \varepsilon\nu\eta\right)\pi i} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, -1; \\ \mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots \end{pmatrix},$$

und für die Reihe auf der rechten Seite erhält man, wenn man an Stelle der Summationsbuchstaben μ, ν die durch die Gleichungen:

$$\mu = 2m + \varepsilon, \quad \nu = 2n + \varepsilon$$

definirten Summationsbuchstaben m, n einführt, folgenden Ausdruck:

$$e^{\left(\xi+\eta+\frac{1}{2}w\right)\pi i} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{\left(2mnw + \varepsilon m(2\xi+w) + \varepsilon n(2\eta+w)\right)\pi i} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1; \; m, n = 0, 1, 2, \ldots \\ \varepsilon = -1; \; m, n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.$$

Wenn man ferner von den Relationen Gebrauch macht:

$$\vartheta_0(\xi) = -ie^{\left(\frac{1}{4}w+\xi\right)\pi i} \vartheta_1(\xi + \tfrac{1}{2}w), \quad \vartheta_0(\eta) = -ie^{\left(\frac{1}{4}w+\eta\right)\pi i} \vartheta_1(\eta + \tfrac{1}{2}w),$$
$$\vartheta_1(\xi+\eta) = -e^{(w+2\xi+2\eta)\pi i} \vartheta_1(\xi+\eta+w),$$

und $\xi + \frac{1}{2}w = \xi'$, $\eta + \frac{1}{2}w = \eta'$, $w = w'$ setzt, so erhält man die Formel:

$$(\mathfrak{T}_1) \quad \frac{\vartheta_1'(0, w')\vartheta_1(\xi'+\eta', w')}{\vartheta_1(\xi', w')\vartheta_1(\eta', w')} = -2\pi i \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon e^{(mnw' + \varepsilon m\xi' + \varepsilon n\eta')2\pi i},$$
$$(\varepsilon = +1; \; m, n = 0, 1, 2, \ldots; \; \varepsilon = -1; \; m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unter der aus den obigen Bedingungen für $(\mathfrak{T})$ resultirenden Bedingung,

dass die mit i multiplicirten Theile von w', ξ', η' positiv, und die letzteren beiden kleiner als der erste sein müssen.

Die Reihe auf der rechten Seite von $(\mathfrak{T}_1)$ wird mit derjenigen, welche in dem Ausdruck $(\mathfrak{S}''')$ vorkommt, identisch, wenn man:

$$w' = \frac{w}{v}, \quad \xi' = \frac{u}{v}, \quad \eta' = \frac{\eta v - \xi w}{v}$$

setzt, und es stimmen dabei die obigen Bedingungen für $\frac{w}{v}$ und $\frac{u}{v}$

[1] Vergl. art. XI, §. 1 (Sitzungsberichte, Jahrgang 1886, Stück XXXIX).

mit denen für w', ξ', η' überein, da η reell und $0 < -\xi < 1$ ist. Es resultirt demnach die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}^0)\quad \mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w) = \frac{1}{v}\, e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+\eta v-\xi w}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\eta v-\xi w}{v},\frac{w}{v}\right)}\quad (-1<\xi<0),$$

in welcher nur die eine, oben mit ϑ_1 bezeichnete ϑ-Function vorkommt und deshalb, wie üblich, der Index 1 bei ϑ weggelassen ist. Setzt man nun:

$$\xi = -\tau',\quad \eta = \sigma',\quad u' = \eta' v = v\sigma' + w\tau',$$

und bestimmt zwei reelle Grössen σ, τ so, dass:

$$u = v\sigma + w\tau$$

wird, so geht die Gleichung $(\mathfrak{A}^0)$ in folgende über:

$$(\mathfrak{A})\quad \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma'-m\tau')2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} = \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{v},\frac{w}{v}\right)},$$

in welcher die Summation auf alle ganzen Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist. Die Gültigkeitsbedingungen, an welche die Herleitung dieser Gleichung geknüpft ist, sind *erstens* gemäss den oben für die Formel $(\mathfrak{T}_1)$ angegebenen Bedingungen, dass die mit i multiplicirten Theile von $\frac{w}{v}, \frac{u}{v}$ und $\frac{u'}{v}$ positiv und die letzteren beiden kleiner als der erste sein müssen, *zweitens* gemäss der Bedingung $-1 < \xi < 0$, dass $0 < \tau' < 1$ sein muss.

Die Bedingung, dass der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv sei, ist gemäss der oben schon über $\frac{w}{v}$ gemachten Voraussetzung erfüllt. Da ferner:

$$\frac{u}{v} = \sigma + \tau\frac{w}{v},\quad \frac{u'}{v} = \sigma' + \tau'\frac{w}{v}$$

und sowohl σ als σ' reell ist, so sind die übrigen Bedingungen dann und nur dann erfüllt, wenn die reellen Grössen τ, τ' den Ungleichheiten:

$$0 < \tau < 1,\quad 0 < \tau' < 1$$

genügen. Aber es soll jetzt gezeigt werden, dass diese beiden Bedin-

gungen, wenn auch die Herleitung der Gleichung (𝔘) an dieselbe geknüpft war, doch nicht nothwendige sind, und dass die Gleichung ihre Gültigkeit für Werthe von τ und τ' behält, die in irgend einem von zwei benachbarten ganzen Zahlen eingeschlossenen Intervalle liegen. Hierfür ist offenbar nur erforderlich nachzuweisen, dass die Gleichung (𝔘) bestehen bleibt, wenn $\tau+1$ an Stelle von τ gesetzt wird, und auch, wenn $\tau'+1$ für τ' substituirt wird.

Wird nun zuvörderst $\tau+1$ an die Stelle von τ und demgemäss $u+w$ für u gesetzt, so tritt auf der linken Seite der Gleichung (𝔘) der Factor $e^{-2\sigma'\pi i}$ hinzu. Dies erhellt unmittelbar, wenn der Summationsbuchstabe n durch $n-1$ ersetzt wird. Auf der rechten Seite tritt, wenn von der Relation:

$$\frac{\vartheta(\xi+w, w)}{\vartheta(\eta+w, w)} = e^{(\eta-\xi)2\pi i}\frac{\vartheta(\xi, w)}{\vartheta(\eta, w)}$$

Gebrauch gemacht wird, der folgende Factor hinzu:

$$e^{(w\tau'-u')\frac{2\pi i}{v}}.$$

Dessen Werth stimmt aber mit dem von $e^{-2\sigma'\pi i}$ überein, da $u'=v\sigma'+w\tau'$ ist. Die Gleichung (𝔘) bleibt also bestehen, wenn $\tau+1$ an die Stelle von τ gesetzt wird.

Wenn man nunmehr $\tau'+1$ für τ' substituirt, so wird der Werth der Reihe auf der linken Seite der Gleichung (𝔘) offenbar nicht alterirt. Auf der rechten Seite tritt bei dem Exponentialfactor $e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}}$ der Factor $e^{\frac{2u\pi i}{v}}$ hinzu; zugleich tritt aber bei dem Quotienten der ϑ-Functionen, wenn wieder von der eben benutzten Relation:

$$\frac{\vartheta(\xi+w, w)}{\vartheta(\eta+w, w)} = e^{(\eta-\xi)2\pi i}\frac{\vartheta(\xi, w)}{\vartheta(\eta, w)}$$

Gebrauch gemacht wird, der Factor $e^{-\frac{2u\pi i}{v}}$ hinzu. Die Gleichung (𝔘) bleibt also auch bestehen, wenn $\tau'+1$ für τ' substituirt wird, und sie gilt demnach

für beliebige reelle Grössen σ, σ' und für alle reellen Werthe von τ und τ' mit alleinigem Ausschluss der ganzzahligen.

Die Gleichung (𝔘) ist zwar nur unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass für die Reihe auf der linken Seite der Grenzwerth:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma'-m\tau')2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M, \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

genommen werde, aber sie behält ihre Gültigkeit, wenn man unter der Reihe auf der linken Seite den allgemeineren Grenzwerth versteht:

$$(\mathfrak{S}_0) \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m',n'} \frac{e^{(n'\sigma'-m'\tau')2\pi i}}{(\sigma+m')v+(\tau+n')w}$$

$(m'=\alpha m+\beta n, m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\quad n'=\alpha' m+\beta' n, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$,

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten, für die $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ und weder $\alpha\tau-\alpha'\sigma$ noch $\alpha\tau'-\alpha'\sigma'$ eine ganze Zahl ist.

Um dies darzuthun, braucht nur gezeigt zu werden, dass die Gleichung ($\mathfrak{U}$) gültig bleibt, sowohl dann wenn:

$$m'=m+n, \quad n'=n,$$

als auch dann wenn:

$$m'=-n, \qquad n'=m$$

gesetzt wird, da aus diesen zwei Transformationen der Summationsbuchstaben m, n sich jede der Transformationen:

$$m'=\alpha m+\beta n, \quad n'=\alpha' m+\beta' n \qquad (\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$$

zusammensetzen lässt[1].

Nun kann die Verwandlung von m in $m+n$ in der Reihe auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) durch eine gleichzeitige Verwandlung von:

$$\sigma \text{ in } \sigma-\tau, \quad \sigma' \text{ in } \sigma'-\tau', \quad w \text{ in } w+v$$

ersetzt werden, und hierbei bleibt u, u', τ und überhaupt der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) ungeändert, da jede der ϑ-Functionen im Zähler und Nenner bei der Verwandlung von w in $w+v$ gemäss der Relation:

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{w}{v}+1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\zeta, \frac{w}{v}\right)$$

einen und denselben Factor bekommt.

Ferner kann die Verwandlung von m in $-n$ und von n in m auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) durch den Übergang von:

$$\begin{array}{lcccccc} & v, & w, & \sigma, & \tau, & \sigma', & \tau' \\ \text{in} & -w, & v, & -\tau, & \sigma, & -\tau', & \sigma' \end{array}$$

ersetzt werden, und bei diesem Übergang wird der Werth des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{U}$) nicht alterirt, denn es bleiben hierbei u und u' ungeändert, und die nachzuweisende Gleichung:

---

[1] Vergl. die Ausführungen in meinem im Monatsbericht vom October 1866 abgedruckten Aufsatz: »Über bilineare Formen«.

$$\frac{1}{v}e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{v},\frac{w}{v}\right)}=\frac{1}{w}e^{\frac{-2\sigma' u\pi i}{w}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{-v}{w}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{w},\frac{-v}{w}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{w},\frac{-v}{w}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{w},\frac{-v}{w}\right)}$$

wird verificirt, wenn man die ϑ-Functionen auf der rechten Seite gemäss den Relationen:

$$\vartheta\left(\zeta,\frac{-v}{w}\right)=-i\left(\sqrt{\frac{-wi}{v}}\right)e^{\frac{\eta^2 w\pi i}{v}}\vartheta\left(\frac{\zeta w}{v},\frac{w}{v}\right),$$

$$\vartheta'\left(0,\frac{-v}{w}\right)=\left(\sqrt{\frac{-wi}{v}}\right)^3\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)$$

transformirt.

Da der mit $(\mathfrak{S}_0)$ bezeichnete Grenzwerth in den vorhergehenden, mit $(\mathfrak{S}')$ bezeichneten, übergeht, wenn

$$\begin{array}{lccccccc} & \alpha\sigma+\beta\tau, & \alpha\sigma'+\beta\tau', & \alpha'\sigma+\beta'\tau, & \alpha'\sigma'+\beta'\tau', & v, & w \\ \text{für} & \sigma, & \sigma', & \tau, & \tau', & \alpha v+\alpha' w, & \beta v+\beta' w \end{array}$$

gesetzt wird, so sind die Systeme $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ auszuschliessen, für welche $\alpha\tau-\alpha'\sigma$ oder $\alpha\tau'-\alpha'\sigma'$ eine ganze Zahl wird.

Durch die complexen Werthe von u und u' sind die reellen Werthe von $\sigma, \tau, \sigma', \tau'$, für welche:

$$u=v\sigma+w\tau,\ u'=v\sigma'+w\tau'$$

ist, vollständig bestimmt. Der obige Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ ist daher durch die complexen Argumente:

$$u', u, v, w$$

genau definirt und soll deshalb, obgleich er keineswegs im gewöhnlichen Sinne eine »Function der complexen Variabeln« u' ist, mit:

$$\mathrm{Ser}(u', u, v, w)$$

bezeichnet werden. Alsdann besteht den vorstehenden Entwickelungen gemäss die Hauptgleichung:

$$(\mathfrak{A}_1)\qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)=\frac{1}{v}e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0+u}{v},\frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)},$$

und es sind hierbei u_0, u, v, w complexe Grössen, welche nur der Bedingung genügen müssen, dass der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv ist. Der für $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ zu nehmende Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ ist nur insoweit beschränkt, dass für die durch die Gleichungen:

$$u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0, \quad u = v\sigma + w\tau$$

bestimmten reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ weder $\alpha\tau - \alpha'\sigma$ noch $\alpha\tau' - \alpha'\sigma'$ einen ganzzahligen Werth erhalten darf; aber auch diese Beschränkung fällt weg, wenn man den Grenzwerth $(\mathfrak{S}_0)$ erst für benachbarte Werthe von u und u_0 bestimmt und dann zu u und u_0 übergeht. So kann man, um die im vorigen Paragraphen mit $(\mathfrak{P})$ bezeichnete Entwickelung von $\varkappa \sin \mathrm{am}(2\sigma'K + 2\tau'K'i, \varkappa)$ zu erhalten, in der Formel $(\mathfrak{U}_1)$:

$$u = \sigma + \tfrac{1}{2}K'i, \quad v = K, \quad w = K'i$$

setzen und an Stelle der Reihe in $(\mathfrak{P})$ selbst den Grenzwerth nehmen, welchem sich die Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ für $\sigma = 0$ nähert, damit die Summation nicht bloss in der dort benutzten Reihenfolge ausgeführt werden kann.

Die Gleichung $(\mathfrak{U}_1)$ giebt für den Ausdruck auf der rechten Seite, wenn derselbe nur als Function des complexen Arguments u aufgefasst wird, die Zerlegung in Partialbrüche, und zugleich, wenn er als Function der durch das complexe Argument u_0 bestimmten reellen Variabeln σ_0, τ_0 aufgefasst wird, die Fourier'sche Reihenentwickelung nach sinus und cosinus ganzer Vielfacher von $\sigma_0\pi$ und $\tau_0\pi$.

(Fortsetzung folgt.)

Die Saugorgane der Scitamineen-Samen.

Von Dr. A. Tschirch
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schwendener.)

In dem Programme meiner Reise nach Indien, welches ich der Königlichen Akademie seiner Zeit einreichte, habe ich die Hoffnung ausgesprochen, dass es mir unter Anderem möglich sein würde, in die biologischen und physiologischen Vorgänge bei der Keimung von Samen tropischer Gewächse, die seither nur ganz gelegentlich studirt worden waren, näher einzudringen. Dank der Unterstützung der Königlichen Akademie und der Munificenz des Leiters des botanischen Gartens in Buitenzorg (auf Java), Dr. Treub, ist es mir möglich geworden diesen meinen Wunsch zu realisiren. Ich war in der Lage eine ganze Reihe von Keimungsversuchen in dem Laboratorium des dortigen Gartens auszuführen und über die Biologie der Samen Beobachtungen zu sammeln. Es war mir möglich das von mir seiner Zeit als wahrscheinlich vorausgesagte Vorkommen von Amylodextrin in den Arillen für eine grössere Anzahl von Fällen nachzuweisen, das so merkwürdige Auftreten von Secreten in den Reservebehältern der Samen entwickelungsgeschichtlich zu verfolgen und den alten Irrthum, dass Körper aus der Classe der Gerbstoffe niemals im Samenkern vorkämen, zu beseitigen. Es hat sich dabei herausgestellt, dass Gerbstoffe sogar ein sehr häufiger Bestandtheil der Samen sind und in dem feucht-warmen Klima der Tropen, in dem alles, was sich von der lebenden Pflanze loslöst, ausserordentlich schnell der Fäulniss anheimfällt, sogar sehr wesentlich zur Erhaltung der Samen bis zur Keimung und zur Sicherung dieser in den ersten Stadien beitragen. Doch nicht über diese Verhältnisse soll hier ausführlich berichtet werden. Ich will vielmehr aus der Fülle der Erscheinungen, die das Studium der Keimungsverhältnisse darbietet, einen Fall herausgreifen, der mir als einer der interessantesten erschienen ist und mich zu eingehenderen Untersuchungen angeregt hat.

1.

Wir wissen von einer ganzen Anzahl von Familien der Monocotylen, dass dieselben in ihren Samen sogenannte Saugorgane besitzen, die bei der Keimung dazu dienen, die in dem Endosperm bez. Perisperm, d. h. den specifischen Speichergeweben, aufgehäuften Reservestoffe dem Keimling zuzuführen. Diese Saugorgane liegen entweder im Inneren des Albumens, wie bei den Palmen, oder sind dem letzteren seitlich angelagert, wie bei den Gramineen.

Es war mir nun im höchsten Maasse wahrscheinlich, dass sich derartige Saugorgane bei allen den Familien der Monocotylen würden nachweisen lassen, deren Samen Endosperm bez. Perisperm enthalten, und habe ich daraufhin eine der in Bezug auf die Keimung am wenigsten untersuchten Familiengruppen, die der Scitamineen, zunächst in's Auge gefasst. Ich war in der Lage auf Grund der bei dieser Gruppe gewonnenen Resultate auch für einige andere Familien die Verhältnisse aufzuklären.

In den bisherigen Übersichten der Pflanzen mit Saugorganen (bei Klebs, Ebeling u. A.) fehlen die Scitamineen und auch in den Specialdarstellungen der Familien dieser Gruppe (z. B. in Engler und Prantl's Pflanzenfamilien) wird eines Saugorganes nicht Erwähnung gethan. Nichtsdestoweniger kommt diesen Pflanzen allen ein solches zu. Es findet sich sowohl bei den Zingiberaceen- wie den Marantaceen-, Cannaceen- und Musaceen-Samen.

Aber auch noch eines anderen Umstandes muss ich, bevor ich in die Specialdarstellung eintrete, gedenken. Die Samen dieser Familien sind nämlich auch noch mit einer anderen Einrichtung zur Sicherung der Keimung ausgerüstet, die von Interesse ist. Sie zeigen nämlich an der Stelle, wo der Keimling an die Samenschale herantritt, die zugleich die Austrittsstelle der Radicula bei der Keimung ist, eine Unterbrechung der Samenschale. Die so über der Radicula entstehende Öffnung ist aber wiederum durch einen harten Pfropf verschlossen, der, keilförmig nach innen verjüngt, auch bei starkem Drucke nicht von aussen nach innen hineingetrieben, wohl aber beim Keimen durch die mit dem Pfropf verwachsene Radicula herausgehoben und beseitigt werden kann und in der That herausgeschoben wird. Auch diese Einrichtung, die wir in etwas anderer Form bei den Palmen, Typhaceen und Lemnaceen wiederfinden, dient zur Sicherung der Keimung. Während beim ruhenden Samen der Pfropf das Eindringen von Wasser, Schimmelpilzfäden u. a. verhindert und einen guten Verschluss darbietet, ermöglicht er andererseits trotz der sehr festen Samenschale ein ungehindertes Hervortreten der Radicula bei der

Keimung. Bei den Dicotylen-Samen wird dies Hervortreten der Radicula der Regel nach durch Sprengung der harten Schale ermöglicht. Hier, wo ein Saugorgan vorhanden ist, muss es der Pflanze daran liegen, dies fortdauernd in Contact mit dem auszusaugenden Endosperm zu halten und ein Sprengen der Schalen behufs Austrittes des Keimlings erschiene daher wenig am Platze, denn es würde ja zu einer Lockerung der Gewebe des Samens führen.

Zingiberaceen.

Als Beispiel wähle ich *Elettaria speciosa*, eine Pflanze, die in Java sehr häufig ist.

In dem unreifen Samen ist zu der Zeit, wo das Perisperm bereits morphologisch vollständig ausgebildet ist, Endosperm, Saugorgan und Embryo noch gar nicht differenzirt, oder die Differenzirung beginnt doch eben erst, der flaschenförmige Embryosack zeigt an der Spitze des Halses, die der späteren Austrittsstelle der Radicula des Samens entspricht, die ersten Anfänge der Embryobildung. Die stumpfkegelige Embryoanlage ist deutlich gegen das hellere in Bildung begriffene Endosperm abgehoben. Die Samenschale ist noch dünnwandig, an der der Spitze des Embryos entsprechenden Stelle schalig-cylindrisch eingestülpt. Dort liegt, noch organisch mit den seitlichen Zipfeln der Samenschale verbunden, die Pfropfenanlage, die den Verschluss des Samens an dieser Stelle bewirkt. Beim reifen Samen ist die Verbindung des Pfropfens mit der Samenschale bis auf ein zartes Ligament gelöst, die differente Ausbildung von Endosperm und Keimling tritt klar hervor, die Speichergewebe sind mit Reservestoffen vollgepfropft. In den gegen den Pfropfen zu liegenden Theilen des Samens umgiebt den Keimling kein Endosperm, und schon hierdurch wird der letztere in zwei ungleich ausgebildete Theile geschieden. Der von Endosperm umgebene Theil ist langgestreckt-keulig: dann verjüngt sich der Keimling halsartig und die obere, der Samenbasis entsprechende Partie bildet einen breiten Kegel mit flacher Basis. Der keulige Theil ist das Saugorgan. Er zeigt keine besondere Differenzirung. Der kegelartig ausgebildete Theil ist der Keimling im engeren Sinne. Er lässt die Anlage eines Vegetationspunktes und einer Radicula wahrnehmen.

Bei der Keimung bleibt das Saugorgan im Samen stecken. Der Keimling schiebt zunächst dadurch, dass sich der halsartige Theil stark streckt, den Verschlusspfropfen der Samenschale heraus. Erst wenn der Keimling hervorgetreten ist, wendet sich das Würzelchen

nach unten und die von einem tutenförmigen Blatte (der Coleoptile) umscheidete Plumula nach oben. So kommt es, dass das junge Keimpflänzchen durch ein langes fadenartiges, der Basis des scheidenartigen Cotyledon, angefügtes Anhängsel — den gestreckten Halstheil des Keimlings — mit dem im Samen steckenbleibenden Saugorgane verbunden ist und solange verbunden bleibt, bis letzteres alle Reservestoffe aus dem Samen aufgesogen hat.

Andere *Elettaria*-Arten, z. B. *Elettaria Cardamomum*, wie auch die Gattungen *Amomum*, *Alpinia* u. a. verhalten sich ganz analog, die Unterschiede liegen hier nur in der Form des Endosperms, der Gestalt des Deckels und der Configuration des Saugorgans, welches bei *Alpinia nutans* z. B. zweilappig ist und mit je einem der beiden Lappen in einen Abschnitt des sichelförmig gebogenen Endosperms eingreift, bei *Amomum dealbatum* das gleichfalls sichelförmig gebogene Endosperm in der Mitte keilförmig durchsetzt. — Die Keimung verläuft bei allen analog.

Stets enthält das Perisperm Stärke, das Endosperm Proteïnkörner (Aleuron).

Cannaceen.

Die Samen dieser Familie enthalten kein Endosperm, das Saugorgan wird rings von Perisperm umgeben. Es besitzt bei *Canna* keulenförmige Gestalt, zwischen ihm und dem vegetativen Theile des Keimlings ist eine Einschnürung deutlich wahrzunehmen. Die auch hier die Spitze des Ganzen bildende kegelförmige Radicula ist etwas schräg gestellt. Ein Pfropf ist in der Samenschale nicht wahrzunehmen, wohl aber ist die aus Palissaden-Sclereïden gebildete Hartschicht der Samenschale an einer Stelle, und zwar an der Seite nach welcher die Radicula gerichtet ist, von einer sichelförmigen Öffnung durchbrochen, die dadurch zu Stande kommt, dass die palissadenartigen Sclereïden dort nach Innen auseinanderweichen. Hier reisst die Samenschale auseinander, um den Keimling hindurchzulassen. Die Epidermiszellen des Saugorgans sind palissadenartig gestreckt.

Die Keimung hat viel Ähnlichkeit mit der der Zingiberaceen. Der Hals des Keimlings streckt sich stark, und der vegetative Theil des Keimlings entwickelt erst ausserhalb des Samens Wurzel und Stengel. Doch sind bereits im Samen Wurzel und Nebenwurzeln, Stengelchen, Blätter und Vegetationspunkt deutlich differenzirt, viel deutlicher als bei den anderen Scitamineenfamilien. Das Saugorgan bleibt im Samen stecken. Sein aus dem Samen herausragender Stiel-

theil (der verlängerte Hals des Keimlings) ist dem Rücken der Keimblattscheide angefügt.

Marantaceen.

Auch bei *Maranta* ist ein Saugorgan und ein Deckel in der Samenschale deutlich entwickelt. Das lange, fadenförmige, in Folge einer einspringenden Samenschalenfalte an der Spitze hakenförmig umgebogene Saugorgan geht, ohne eine wesentliche Einschnürung zu bilden, direct in den eigentlichen Keimling über, dessen Theile nur mehr angedeutet als wohl ausgebildet sind. Die Radicula liegt auch hier an der Spitze des Ganzen, unmittelbar unter dem Pfropf, den sie beim Keimen vor sich her aus der Schale heraustreibt. Analog verhält sich *Clinogyne*, *Calathea*, *Thalia*, *Ischnosiphon* und *Stromanthe*.

Musaceen.

Bei *Musa Ensete* besitzt das Saugorgan eine breit scheibenförmige Gestalt. Seine Epidermis ist mit einem palissadenartig gestreckten Saugepithel bedeckt. Hierin, sowie in seiner mehr peripherischen Lage, gleicht dasselbe dem Scutellum der Gräser. Es bleibt bei der Keimung im Samen stecken und vergrössert sich stark. Der eigentliche Keimling, an dem Radicula, Vegetationspunkt und junge Blattanlagen wohl entwickelt sind, schiebt auch hier bei der Keimung einen deckelartigen Pfropfen, der den Samen an dieser Stelle verschliesst, heraus.

2.

Sehen wir uns nun darnach um, wo bei den Monocotylen ähnliche Bildungen anzutreffen sind.

Die bekanntesten derart sind das Scutellum der Gräser und das Saugorgan der Palmen. Die Bedeutung beider bei der Keimung ist von Sachs[1] zuerst festgestellt worden. So verschieden auch die morphologische Ausbildung dieser Organe bei den beiden Familien ist, so klar ist doch ihre Function als Saugorgane.

Den den Gramineen nächst verwandten Cyperaceen ist vielfach, auch in neuster Zeit, ein Saugorgan nach Art des Scutellums abgesprochen worden. Ich kann dieser Anschauung nicht beipflichten, sondern finde, dass ein deutlich als Saugorgan fungirendes Gebilde

[1] Zur Keimungsgeschichte der Gräser, Botan. Zeit. 1862, und zur Keimungsgeschichte der Dattel, Botan. Zeit. 1862.

bei der Keimung im Samen stecken bleibt, welches zwar anatomisch sich vom Scutellum der Gräser sehr wesentlich unterscheidet, physiologisch diesem aber gleichwerthig ist.

Auch den den Palmen nahe verwandten Araceen, wenigstens denen, welche Endosperm besitzen, scheint, soweit meine allerdings sehr fragmentarischen Beobachtungen reichen, ein solches, im Samen stecken bleibendes, Saugorgan zuzukommen. Bei den unmittelbar den letzteren benachbarten Lemnaceen ist dies zweifellos, bei *Lemna minor* z. B. saugt das dem Endosperm eingefügte keulenförmige Gebilde ersteres beim Keimen vollständig auf. Das Gleiche gilt von den Samen der Typhaceen. Pandanaceen konnte ich in Indien leider nicht zum Keimen bringen, es war mir also nicht möglich durch das Experiment die aus der Anatomie des Samens abstrahirte Ansicht zu bestätigen, dass auch hier ein Saugorgan ausgebildet ist.

In der Gruppe der Enantioblasten ist ein Saugorgan bekannt bei den Commelinaceen, woselbst es so ausgezeichnet entwickelt ist, dass es vielfach (so z. B. bei Ebeling,[1] Klebs[2] u. And.) abgebildet und beschrieben wurde. Bei den übrigen Familien dieser Gruppe, so besonders den Centrolepidaceen ist ebenfalls ein Saugorgan, wenn auch weniger schön wie bei den Commelinaceen, wahrzunehmen, bei *Centrolepis* ähnelt es dem Scutellum der Gräser.

Sehr gut entwickelt ist es bei den Samen der Liliifloren. Sowohl die Liliaceen (*Lilium*, *Hyacinthus*, *Veratrum*, *Asparagus*), als die Amaryllideen (*Agave*), als die Iridaceen (*Iris*) und ganz besonders die Juncaceen (*Juncus*, *Luzula*) besitzen in ihren Samen ein solches Organ, über dessen Function bei der Keimung ein Zweifel nicht bestehen kann.

Eine relativ grosse Mannnigfaltigkeit zeigen die Bromeliaceen. Hier ist das Saugorgan bald scutellumartig ausgebildet, bald ragt es (wie z. B. bei *Guzmannia*) keulenförmig tief in das Endosperm hinein.

Den Orchidaceen, Potamogetonaceen, Alismaceen und Hydrocharitaceen fehlt ein als Endosperm bez. Perisperm entwickeltes Speichergewebe; dieselben können also auch ein Saugorgan im obigen Sinne nicht besitzen. Dennoch besitzen sie Bildungen, die demselben als morphologisch aequivalent zu betrachten und die für die Deutung der eigentlichen Saugorgane nicht ohne Bedeutung sind.

Wenn wir die gesammte Classe der Monocotylen über-

[1] Die Saugorgane bei der Keimung endospermhaltiger Samen. Flora 1885 S. 191 u. Taf. III.

[2] Beiträge zur Morphologie und Biologie der Keimung. Arbeit d. Botan. Instit. in Tübingen I. 1885 S. 568.

schauen, so können wir also sagen, dass allen Familien, deren Samen Endosperm bez. Perisperm besitzen, auch ein mehr oder weniger deutlich entwickeltes Saugorgan zukommt.

3.

Als was ist nun das in seiner biologisch-physiologischen Function erkannte Saugorgan morphologisch zu betrachten.

Am verbreitetsten ist unter den Morphologen die Auffassung, dass das Saugorgan der Cotyledon sei. Wenn man die Keimung der Monocotylen mit der der Dicotylen vergleicht, so kann man nicht leugnen, dass diese Deutung die natürlichste zu sein scheint, denn auch bei den Dicotylen bleiben ja oft genug die Cotyledonen so lange im Samen stecken, bis sie das Endosperm aufgesaugt haben. Ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch schon darin, dass das Saugorgan der Monocotylen, nachdem es bei der Keimung als solches functionirt hat, niemals als blattartiges Gebilde aus der Samenschale hervortritt — was bei den Dicotylen die Regel bildet —, sondern sammt den Samenresten abstirbt und abgeworfen wird.

Die zweite Deutung ist die, das es ein Theil des Cotyledons sei. Nach dieser letzteren Auffassung besteht der Cotyledon aus einem scheidigen, die Blattknospe der Plumula umhüllenden Theile, der Keimblattscheide (Coleoptile, Pileole) und einem keuligen oder schildchenartigen Theile, der als Saugorgan fungirt.

Diese beiden Ansichten sind die herrschenden, doch bei Weitem nicht die einzigen. Andere Forscher haben nämlich das Saugorgan als eine Wucherung der Wurzel, noch andere als eine Wucherung des Stengeltheiles der Plumula aufgefasst und die Coleoptile als den Cotyledon angesprochen, noch andere schliessen sich der Nägeli'schen Ansicht an, dass der Embryo der Phanerogamen überhaupt noch keine Differenzirung in Caulom-, Rhizicom- und Phyllombildungen zeige, sondern als ein Thallom aufzufassen sei, an dem sich erst diese Bildungen entwickeln.

So verlockend diese letztere Ansicht, die uns aller Deutungen überhebt, auch ist, und soviel sich auch für dieselbe anführen lässt, so glaube ich doch, dass man nicht an der Nothwendigkeit vorbei kommt, sich eine bestimmte Vorstellung von den doch oft genug klar und deutlich differenzirten Theilen des monocotylischen Embryos bilden zu müssen. Besonders wird dies stets dann der Fall sein, wenn es sich um die Deutung der Bildungen an der Keimpflanze

handelt. Die Embryonen der Zingiberaceen freilich zeigen eine so geringe Differenzirung, dass man bei ihnen nicht eben selten im Zweifel gerathen kann, wie man die Theile zu deuten hat, aber schon die benachbarten Cannaceen sind kaum minder klar gegliedert wie die Gräser.

Vom physiologischen Standpunkte aus ist es ja ganz gleichgiltig, zu welcher Gruppe morphologischer Organe das Saugorgan gehört. Denn nur zu oft hat uns die Entwickelungsgeschichte gelehrt, dass anatomisch-physiologisch gleichwerthige Bildungen entwickelungsgeschichtlich keine Einheiten bilden. Warum sollte dies nicht auch auf morphologischem Gebiet zutreffen. Sehen wir doch z. B. auch bei der Bildung der biologisch denselben Zwecken dienenden Nectarien die verschiedensten Theile der Blüthe sich betheiligen. So könnte ja auch hier bald der Cotyledon, bald der Radicular-, bald der Plumulartheil des Embryos ein Saugorgan erzeugen. Dies scheint jedoch nicht der Fall zu sein. Vielmehr deuten alle Beobachtungen darauf hin, dass der Cotyledon bei der Bildung der Saugorgane meist mehr oder weniger betheiligt ist, sie jedoch allein den Cotyledon nicht darstellen. Nichtsdestoweniger möchte ich eine allgemein giltige Ansicht für alle Saugorgane nicht aussprechen, vielmehr die Prüfung in jedem einzelnen Falle empfehlen. Keimungsversuche werden die Sache am besten klarlegen.

Sicher bildet das Saugorgan mit der Keimblattscheide eine Einheit (nämlich den Cotyledon) bei *Elettaria*, *Canna*, *Musa*, *Phoenix*, *Asphodelus*, *Dianella*, *Aristea*, *Commelina*.

Bei *Canna* und *Asphodelus* z. B. ist der fadenartige Fortsatz des Saugorgans dem Rücken, bei *Dianella* der Spitze, bei *Elettaria* und *Musa* der Basis der Keimblattscheide derartig angefügt, dass die Gefässbündel des Saugorganes unmittelbar in die der Coleoptile übertreten. Hier kann ein anderes Organ überhaupt nicht in Betracht kommen, beide, Keimblattscheide und Saugorgan, gehören untrennbar zu einander. Das Gleiche gilt von der Dattel.

Schwieriger liegen die Verhältnisse bei den Gramineen und in der That hat denn auch das Scutellum bis auf den heutigen Tag die verschiedenartigsten Deutungen erfahren. Ohne erneute eingehende Nachuntersuchungen möchte ich ein eigenes Urtheil nicht aussprechen, obwohl ich der Ansicht zuneige, dass das Scutellum nicht den Cotyledon, wenigstens diesen nicht allein bilde.[1]

---

[1] In den von mir gemeinsam mit Frank herausgegebenen pflanzenphysiologischen Wandtafeln habe ich die Coleoptile als Cotyledon bezeichnet und das Scutellum als eine Bildung sui generis ohne bestimmte Deutung aufgeführt.

Dass die Möglichkeit vorliegt, dass ein Saugorgan auch ohne Betheiligung des als Cotyledon angesprochenen scheidigen Blattgebildes (der Coleoptile) entstehen kann, scheint mir aus der Betrachtung der Bromeliacee *Guzmannia* hervorzugehen, denn hier liegt das als Cotyledon angesprochene Blättchen[1] dem Saugorgan gegenüber und die Procambiumstränge des letzteren stehen mit jenem in keiner directen Verbindung.

Wie mir scheinen will, wird bei der morphologischen Deutung des Saugorgans der monocotylischen endospermhaltigen Samen die Betrachtung der endospermfreien von ausschlaggebender Wichtigkeit sein. Es darf als in hohem Grade merkwürdig bezeichnet werden, dass auch diese Samen ein Gebilde besitzen, welches zwar natürlich nicht als Saugorgan fungiren kann, denn es ist ja nichts auszusaugen, welches aber morphologisch diesem ganz ausserordentlich ähnlich ist.

Sowohl die Hydrocharitaceen *(Halophila)*, als die Potamogetonaceen *(Ruppia)* und Orchideen besitzen in ihren Samen ein dem eigentlichen Embryo seitlich anliegendes, den letzteren nicht selten um das vielfache an Mächtigkeit übertreffendes Gewebe, welches in seiner Lage und Ausbildung grosse Ähnlichkeit mit dem Saugorgane der endospermhaltigen Samen hat. Dieses merkwürdige Gebilde ist bei den Hydrocharitaceen, Potamogetonaceen und Orchideen als ein angeschwollenes hypocotyles Glied aufgefasst worden. Bei *Orchis*, wo es sich bei der Keimung stark vergrössert, hat man es auch Keimaxe oder Keimknöllchen genannt. Niemand wusste eigentlich etwas Rechtes damit anzufangen. Das Merkwürdigste ist aber, dass Treub derartige Keimknöllchen neuerdings auch bei den Gefässkryptogamen gefunden hat. Er fand sie bei *Lycopodium* und nannte sie »*Protocorme*«. Nur in einem Punkte weichen diese Bildungen morphologisch von den Saugorganen ab. Sie entwickeln sich nämlich meistens erst nach der Keimung besonders stark, sonst haben sie z. B. in ihrer Stellung u. s. w. eine auffallende Ähnlichkeit mit den Saugorganen. Treub fasst sie bei den Lycopodiaceen als rudimentäre Organe auf. Zu einer ähnlichen Auffassung bin ich bei den Monocotylen ebenfalls gekommen. Ich betrachte sie als functionslose Saugorgane, die deshalb functionslos sind, weil es bei dem Mangel eines Endosperms nichts auszusaugen giebt. Dabei erscheint es von untergeordneter Bedeutung, ob sie schon im Samen entwickelt sind, oder sich erst bei der Keimung mächtig entwickeln, denn auch die Saugorgane sind in einem Falle schon im Samen fertig gebildet und behalten dauernd ihre ursprüngliche Gestalt bei *(Elettaria, Canna)*, während sie im anderen

[1] Engler-Prantl, Natürliche Pflanzenfamilien II, Abth. 4 Fig. 19 G. c.

während der Keimung sich mehr oder weniger vergrössern (*Phoenix*, *Musa*, *Commelina*). Nur können die Saugorgane diese Vergrösserung erfahren, auch ohne die Samenschale zu sprengen, indem sie das Speichergewebe durchwuchern, während die Keimknöllchen nothgedrungen die Schale sprengen müssen, um sich zu entwickeln.

Eine mit zahlreichen Tafeln ausgestattete ausführliche Abhandlung über den Gegenstand erscheint in den *Annales du jardin botanique de Buitenzorg*.

Ausgegeben am 13. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1890.
VIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

13. Februar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Auwers trug eine Mittheilung des Hrn. Dr. J. Scheiner in Potsdam vor: Untersuchungen über die Sternspectra vom I. Typus auf Grund der auf der Potsdamer Sternwarte in den Jahren 1888 und 1889 aufgenommenen Spectralphotographien.

2. Hr. E. du Bois-Reymond trug eine Mittheilung des Hrn. Prof. Jul. Bernstein in Halle vor: Phototelephonische Untersuchung des zeitlichen Verlaufs elektrischer Ströme.

Beide Mittheilungen folgen umstehend.



Untersuchungen über die Sternspectra vom I. Typus auf Grund von photographischen Aufnahmen.

Von Dr. J. Scheiner
in Potsdam.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers.)

Von den ersten Ergebnissen der mit dem grossen Potsdamer Spectrographen erhaltenen Aufnahmen von Fixsternspectren ist, soweit sie die Messung der Linienverschiebung betreffen, in diesen Berichten (Sitzungen vom 15. März 1888 und vom 28. November 1889) Mittheilung gemacht.

In fast noch höherm Maasse als die Zuverlässigkeit solcher Messungen hat durch die Einführung der photographischen Methode die Sicherheit der Untersuchung des Details der Sternspectra selbst zugenommen, und ich habe deshalb eine derartige Untersuchung für die sämmtlichen hier erhaltenen Aufnahmen unternommen.

In Nr. 2923 und 2924 der Astronomischen Nachrichten habe ich bereits eine vorläufige Mittheilung einiger bis dahin aus dieser Untersuchung erhaltenen Resultate publicirt, um die ausserordentliche Überlegenheit der photographischen Methode bei stark dispergirten Sternspectren gegenüber der directen Beobachtung klarzulegen. Die Genauigkeit der Bestimmung der Wellenlängen bei der photographischen Methode beträgt etwa das zwanzigfache derjenigen bei directer Beobachtung und ist ungefähr dieselbe wie die in den letzten Jahren beim Sonnenspectrum erreichte. Gleichzeitig konnte ich zeigen, dass auch für den bisher nur wenig untersuchten Theil des Spectrums von *F* bis *H* die aus der Beobachtung des Theiles von *C* bis *F* abgeleitete Vogel'sche Classificirung der Sternspectra in vollem Umfange gültig ist, und dass sich zwischen den verschiedenen Spectralclassen durch passende Wahl der Objecte ein continuirlicher Übergang nachweisen lässt, wie er nach den physikalischen Grundlagen dieser Classificirung nothwendig vorhanden sein muss.

Im Folgenden nun möchte ich auf einige Resultate aufmerksam machen, welche sich aus den Untersuchungen der Sternspectra der I. Classe ergeben haben, und welche, wie ich besonders hervorhebe, aus directen Beobachtungen nicht wohl erhalten werden können. Auf einige dieser Punkte ist in der erwähnten vorläufigen Mittheilung schon kurz hingewiesen worden.

1.

In den Spectren des Typus Ia erscheinen die Wasserstofflinien ausserordentlich breit und verwaschen, während die etwa vorhandenen Linien der übrigen Metalle nur sehr fein und zart angedeutet sind, und in einzelnen Fällen sogar nur dadurch zur Sichtbarkeit gelangen, dass sie in Gruppen vereint auftreten. Eine Ausnahme von dieser Regel findet nur für zwei Linien statt, deren Wellenlängen ich zu 448.14 und 447.14 $\mu\mu$ bestimmen konnte. Die erste dieser Linien ist ohne Zweifel identisch mit der Linie 448.141 $\mu\mu$ im Sonnenspectrum, welche dem Magnesium zugehört, während für die andere, deren Wellenlänge nach Differenzmessungen gegen die Mg-Linie genauer zu 447.136 $\mu\mu$ anzusetzen ist, eine entsprechende Linie im Sonnenspectrum nicht auftritt. Das eigenthümliche Verhalten dieser Linien, die im Spectrum von β Orionis, ε Orionis und β Persei neben einander vorkommen, während in allen anderen von mir bisher untersuchten Sternspectren stets nur eine derselben vorhanden ist, besteht nun darin, dass, so lange sie ausser den Wasserstofflinien die einzigen des Spectrums sind — in dem untersuchten Theile des Spectrums von F bis H ist ein Urtheil über das Vorkommen des wahrscheinlich in diesen Sternen vorhandenen Natriums nicht möglich, da Linien dieses Metalls nur in den weniger brechbaren Theilen des Spectrums auftreten — ihr Aussehen sich nach demjenigen der Wasserstofflinien richtet; je mehr die letzteren breit und verwaschen erscheinen, um so mehr findet diess auch bei diesen Linien statt. Sobald aber noch andere Metalllinien auftreten, und zwar besonders, wie es scheint, diejenigen des Eisens, erscheinen auch die beiden Linien 448.14 und 447.14 $\mu\mu$ fein und scharf, genau so wie die anderen. Der Magnesiumdampf und der der Linie 447.14 $\mu\mu$ entsprechende unbekannte Stoff treten also bereits in einem frühen Übergangsstadium der Sterne in denjenigen Zustand über, wie ihn der Wasserstoff erst dann annimmt, wenn die Metalllinien zahlreich und stark werden, mit anderen Worten wenn die Abkühlung soweit vorgeschritten ist, dass der zweite Spectraltypus erreicht wird.

Die bisher noch nie beobachtete Linie 447.14 $\mu\mu$ kommt nun mit einer einzigen Ausnahme (β Persei) unter allen von mir untersuchten Spectren nur in den Sternen der ersten Spectralclasse des Orion vor[1] und zwar in sämmtlichen, nämlich in β, γ, δ, ε und ζ.

Von Copeland ist im Spectrum des Orionnebels eine schwache Linie bei der Wellenlänge 447.6 $\mu\mu$ gefunden worden; auf eine Anfrage hin hatte Hr. Prof. Copeland die Güte mir mitzutheilen, dass die Bestimmung der Wellenlänge dieser Linie bei der grossen Lichtschwäche derselben innerhalb der Grenzen $\pm$ 0.5 $\mu\mu$ durchaus unsicher, und dass die Linie daher wahrscheinlich mit der von mir gefundenen identisch sei. Mit der Magnesiumlinie kann sie nicht zusammenfallen, da die übrigen helleren Magnesiumlinien in Nebelspectren nicht sichtbar sind.

Der durch das gemeinsame Auftreten dieser sonst augenscheinlich nur selten vorkommenden Linie documentirte physikalische Zusammenhang zwischen den genannten Orionsternen würde hiermit auch auf den Orionnebel auszudehnen sein. Die Entfernung des letztern wäre danach entgegen früheren Vorstellungen noch viel kleiner zu schätzen, als es nach den neuesten Untersuchungen von Huggins bereits zu geschehen hätte, welche einen Zusammenhang der Sterne des Trapezes mit dem Nebel wahrscheinlich gemacht, jedenfalls nachgewiesen haben, dass in ihrer nächsten Umgebung die Nebelmaterie in verdichtetem Zustande vorhanden ist.

2.

Die Spectra der Classe Ib unterscheiden sich von denjenigen der Classe Ia wesentlich dadurch, dass die Wasserstofflinien sowohl wie die anderen Metalllinien von nahe gleicher Breite sind und eine Schärfe der Begrenzung aufweisen, wie sie der Breite der Linien nach nicht zu erwarten ist. Sie sind etwa dreimal so breit wie die Wasserstofflinien des Typus IIa bei etwa gleicher Verwaschenheit. Es erscheint diess zunächst als ein Widerspruch gegen den Kirchhoff'schen

[1] In der oben angeführten Mittheilung (Astr. Nachr. Nr. 2923) ist angegeben worden, dass diese Linie auch in den Spectren von α Virginis und α Andromedae vorhanden sei, da die damaligen vorläufigen Messungen eine Wellenlänge ergeben hatten, die näher an der erwähnten Linie als an der Mg-Linie lag. Diese Messungen konnten jedoch, wie überhaupt in den linienarmen Spectren der Classe Ia, die Wellenlänge nur mit geringer Sicherheit bestimmen. Inzwischen ist es mir gelungen auch in solchen Spectren die Genauigkeit der Wellenlängen-Bestimmungen beträchtlich zu erhöhen, da ich eine gewisse Gesetzmässigkeit in der Veränderung des Spectrums mit der Temperatur aufgefunden habe. Die neuen Messungen ergeben aber, dass die fragliche Linie bei den beiden genannten Sternen mit der Mg-Linie zu identificiren ist.

Satz, da aus den Folgerungen desselben hervorgeht, dass eine Linienverbreiterung nur gleichzeitig mit einer Zunahme der Verwaschenheit stattfinden kann. Ich glaube indessen eine Erklärung hierfür gefunden zu haben, welche die Grenzen des Kirchhoff'schen Satzes nicht überschreitet.

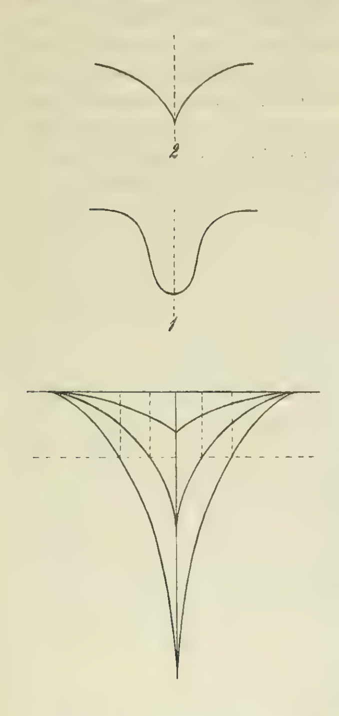
Es ist bekannt, dass die Linien eines glühenden Gases sowohl im Emissionsspectrum als auch im Absorptionsspectrum breiter und verwaschener werden, wenn der Druck oder die Dichtigkeit des Gases steigt, wie sich diess bei wachsendem σ, m aus dem für eine constante Temperatur gültigen Gesetze $\frac{E_\lambda}{E_{\lambda_1}} = \frac{[1-(1-A_\lambda)^{\sigma m}]\,J_\lambda}{[1-(1-A_{\lambda_1})^{\sigma m}]\,J_{\lambda_1}}$ unter bekannter Bedeutung der Buchstaben ergibt. Ferner folgt aus dem Kirchhoff'schen Satze, dass die Absorption eine um so kräftigere werden muss, je niedriger die Temperatur des glühenden Gases im Verhältniss zur Temperatur der das continuirliche Spectrum liefernden Lichtquelle wird. Ob bei Temperaturänderungen der Gase auch die Breite der Linien geändert wird, ist nicht bekannt, da sich der Einfluss der Temperatur nicht streng von demjenigen von Druck oder Dichtigkeit trennen lässt.

Im Folgenden gehe ich nun zu dem Verhalten der Linien über, wenn starke Änderungen im Temperaturverhältnisse von Gas und Lichtquelle stattfinden, wobei es gleichgültig ist, ob auch Änderungen in der Breite der Linien eintreten, da man sich stets derartige gleichzeitige Dichtigkeitsänderungen vorstellen kann, dass die Breite ungeändert bleibt. Will man diess umgehen, so kann man die Betrachtung auch unter der Annahme durchführen, dass das Gas seine Temperatur und Dichtigkeit unverändert beibehält, dass aber die Temperatur der Lichtquelle stetig wächst. In diesem Falle bleibt das Emissionsspectrum des Gases natürlich unverändert, und also auch in Bezug auf die Breite der Linien das Absorptionsspectrum, und es wird nur das Intensitätsverhältniss in letzterm geändert.

Das Gesetz der Intensitätsabnahme von der Mitte einer verbreiterten Linie nach den Seiten hin ist unbekannt, es muss indessen durch eine continuirliche Function darstellbar sein, wobei es aber fraglich bleibt, ob auch beim Übergang von einer Seite der Linie auf die andere die Continuität gewahrt bleibt oder nicht, ob also die Intensitätsabnahme graphisch durch die Curve 1 oder 2 darstellbar ist.

Nach dem Aussehen der stark verbreiterten Linien auf photographischen Aufnahmen scheint die Curve 2 der Wahrheit näher zu kommen, jedoch ist eine Entscheidung hierüber für die vorliegende Frage nicht wesentlich.

Man kann nun nach dem Obigen den Einfluss veränderter Temperaturdifferenzen zwischen Gas und Lichtquelle auf die Intensitätsabnahme darstellen durch die Veränderung der Ordinatenlänge des Scheitelpunktes der Curve, wie diess für drei Werthe in der nebenstehenden Figur angedeutet sein möge.



Denkt man sich nun durch die punktirte, der Abscissenaxe parallele Linie diejenige Intensitätsgrenze dargestellt, unterhalb welcher ein Lichteindruck vom Auge oder von der photographischen Platte nicht mehr wahrgenommen wird, so findet für die obere Curve, die dem geringsten Temperaturunterschied entspricht, von der Mitte bis zum Übergangspunkt in das continuirliche Spectrum eine continuirliche Intensitätsabnahme statt. Bei den beiden unteren Curven entspricht dem innern Theile der punktirten Linie eine Strecke absoluter Dunkelheit, um welchen Betrag die Verwaschenheit verkürzt worden ist; es ist klar, dass diess um so mehr eintritt, je grösser der Temperaturunterschied wird. Das Aussehen der Wasserstofflinien im Typus Ia kann etwa durch die obere Curve dargestellt werden, dasjenige im Typus Ib durch die unterste — unter Berücksichtigung der Intensitätsgrenze. Hiernach würde folgen, dass bei den Fixsternen vom Typus Ib verhältnissmässig schwache und stark abgekühlte Atmosphaeren vorhanden sind, welche beide Bedingungen leicht gleichzeitig erfüllt sein können, wenn die Atmosphaeren sehr ausgedehnt aber sehr wenig dicht sind.

Abgesehen von dem Aussehen der Linien sind die Spectra des Typus Ib auch insofern interessant, als bei ihnen sehr viele Linien auftreten, die mit solchen des Sonnenspectrums nicht mit Sicherheit zu identificiren sind, da die Intensitätsverhältnisse völlig abweichen. Das linienreichste Spectrum dieser Art ist dasjenige von α Cygni, welches bisher stets zur Classe Ia gerechnet wurde, in den photographischen Aufnahmen aber entschieden den Typus Ib aufweist.

Bei diesem Spectrum ist von besonderm Interesse das Verhalten der Eisenlinien, und ich füge daher im Folgenden die Resultate der Ausmessung von zwei Aufnahmen desselben hier bei. Die zweite Columne enthält die gemessenen Wellenlängen der Linien, die dritte die geschätzten Intensitäten derselben, die Stärke der Absorption wachsend mit den Zahlen von 1 bis 6. In der vierten Columne befinden sich die Wellenlängen der zunächst liegenden Linien des Sonnenspectrums nebst deren Intensitäten, ausgedrückt durch die in Klammern eingeschlossenen Zahlen von (1) bis (10). In dieser Columne befinden sich auch Angaben über die den Linien entsprechenden Metalle.

Nr.	W. L. im ✻	Int.	W. L. in ☉
1	423.29:	6!	423.307 (4)
2	424.307	3	424.307 (4)
3	424.723	2	424.714 (7)
4	425.863	2	425.860 (5) Fe
5	426.250	2	426.233 (5) La?
6	427.217	1	427.217 (9) Fe
7	427.393	2	427.378 (6) od. 425 (6) Fe
8	427.613	2	427.591 (6) Fe
9	428.465	1	428.465 (5)
10	428.840	2	428.842 (5) od. 863 (5) Fe
11	429.078	4	429.077 (5) Fe
12	429.464	4	429.464 (6) Fe
13	429.718	4	429.718 (5) Ce?
14	430.062	5	430.060 (5)
15	430.378	5	430.364 (4)
16	430.840	4	430.840 (8) Fe
17	431.350	3	431.338 (6) Ti?
18	431.550	3	431.556 (8) Fe
19	432.153	1	432.140 (4)
20	432.622	1	432.622 (10) Fe
21	433.830	2	433.821 (5) od. 855 (4) Fe
22	434.071	6	434.071 (9) H
23	435.223	6	435.223 (7)
24	435.500	1	435.495 (4) La?
25	435.790	1	435.791 (4)
26	436.805	1	436.805 (7) Fe
27	436.995	2	436.988 (4) od. 437.022 (6) Fe
28	437.485	2	437.492 (6) Fe
29	438.580	4	438.576 (6) Fe
30	439.085	2	439.088 (5) Fe
31	439.533	4	439.533 (7) Fe
32	440.000	2	440.000 (6)
33	440.500	1	440.499 (8) Fe
34	441.700	5	441.687 (5) Ca?
35	443.335	1	443.286 (5) Fe und 443.353 (6) Fe
36	444.390	5	444.418 (5)
37	445.081	1	445.081 (6) Fe
38	446.405	1	?
39	446.838	4	?
40	447.305	1	447.305 (6) Ce?, Mn?
41	448.123	6!	448.141 (5) Mg
42	448.910	2	448.914 (3)
43	449.065	3	?
44	449.170	5	449.163 (4) Mn?
45	450.150	3	450.150 (6) Mn? Ti?
46	450.853	5	450.853 (5) Fe
47	451.550	4	451.563 (5) Fe
48	452.045	4	452.050 (5) Fe
49	452.296	5	452.296 (6) Fe
50	453.435	4	453.429 (5)

Nr.	W. L. im ✻	Int.	W. L. in ⊙
51	454.193	2	454.183 (4)
52	454.990	6	454.990 (6) Fe
53	455.633	4	455.633 (5) Fe
54	455.900	4	455.896 (4)
55	455.965	3	?
56	456.425	2	456.407 (5) Ti?
57	457.251	3	457.231 (7) Ti?
58	457.700	2	?
59	458.403	5	458.417 (6) Fe
60	458.840	2	458.856 (5)
61	459.29:	1	459.295 (7) Fe
62	463.09:	4	463.045 (5) Fe

Mit Ausnahme der Linien des Wasserstoffs, Magnesiums und Eisens sind die übrigen Identificirungen mit Metallen mit einem ? versehen, da die Bestimmung der Wellenlängen für die übrigen Metalllinien gegenüber derjenigen für die Sternlinien von zu geringer Genauigkeit ist.

Es geht aus dem obigen Verzeichniss hervor, dass im Spectrum von α Cygni zwar eine grosse Anzahl von Eisenlinien vorhanden ist, dass die Intensitäten der Eisenlinien aber keineswegs denjenigen auf der Sonne entsprechen. Eine Reihe der stärksten Eisenlinien fehlen ganz in diesem Spectrum, andere sehr starke, wie z. B. diejenigen bei 427.217, 431.556, 432.622 treten nur sehr schwach auf, während andererseits stärkere Eisenlinien des Spectrums von α Cygni mit schwachen des Sonnenspectrums zusammenfallen. Es geht hieraus hervor, dass auf α Cygni der Eisendampf in einem von den Verhältnissen auf der Sonne durchaus abweichenden Temperaturzustande vorhanden sein muss, ein Resultat, welches sich mit dem aus dem Aussehen der Linien gewonnenen vollständig deckt.

3.

Die Wasserstofflinien vieler Sterne der Classe Ia zeigen eine Erscheinung, die bisher durchaus unbekannt gewesen ist. Dieselben sind nämlich in der Mitte keineswegs absolut dunkel, vielmehr findet daselbst noch eine merkliche Lichtwirkung statt, die unter Umständen so weit gehen kann, wie z. B. bei ζ Orionis, dass die sehr breiten und verwaschenen Linien sich kaum noch von dem continuirlichen Spectrum abheben. Es ist zunächst klar, dass diese Erscheinung einen Übergang zu den bisher ganz isolirt dastehenden Spectren des Typus Ic bildet, in welchen die Wasserstofflinien und D_3 hell auftreten, indem sich zwischen Typus Ic und Ia durch geeignete Wahl der Individuen dieselbe Brücke bilden lässt, wie zwischen Ia und IIa. Und gerade wie im letztern Falle dieser Übergang erklärt ist durch eine allmähliche Abkühlung, durch einen Process also, der allen Sternen gemeinsam

ist, und der daher von allen eingehalten werden wird, so gilt diese Erklärung auch für den Übergang von Ic auf Ia, so dass wir zu dem Schlusse geführt werden, dass der Typus Ic dem Anfangsstadium der Sternentwickelung noch näher steht als Ia.

Für die oben angedeutete Erscheinung der Aufhellung der Linien, als deren extremster Fall der Typus Ic zu betrachten ist, lassen sich zwei Erklärungen aufstellen. Die erste derselben beruht darauf, dass die Grösse des Temperaturunterschiedes zwischen Atmosphaere und derjenigen Schicht, welche durch den Glühzustand flüssiger oder fester Materie das continuirliche Spectrum liefert (Photosphaere), von Einfluss ist auf die Stärke der Absorption. Je geringer dieser Temperaturunterschied, um so schwächer wird die Absorption; bei gleicher Temperatur findet weder Absorption noch Emission statt, und wird die Temperatur der Atmosphaere höher als diejenige der Photosphaere, so haben wir nur noch Emission, die Linien treten hell auf. Die Annahme aber, dass die Temperatur der Atmosphaere höher sein könne als diejenige des Kerns, widerspricht allen physikalischen Erfahrungen, und damit wird diese ganze Erklärung eine unwahrscheinliche.

Die zweite Erklärung führt auf keine weiteren Schwierigkeiten; bei ihr nimmt man an, dass die betreffenden Sterne von ausgedehnten Wasserstoff-Atmosphaeren (und D_3) umgeben sind, wie diess auch im Einklange mit der Breite der Linien steht, und dass das Emissionsspectrum des Wasserstoffs von denjenigen Theilen der Atmosphaere, die in der von uns gesehenen Projection ausserhalb der eigentlichen Sternscheibe liegen, das Absorptionsspectrum des mittlern Theils überlagert und hierbei die sonst dunklen Linien aufhellt, oder sogar bei genügender Ausdehnung der Atmosphaere überstrahlt.

Das Aussehen der aufgehellten Wasserstofflinien in den untersuchten Spectren vom Typus Ia spricht direct für die letztere Erklärung, da die Aufhellung auf einer gewissen Strecke in der Mitte der Linien nahe constant ist, während bei der ersteren Annahme nur die Linie in ihrer ganzen Breite blasser werden, übrigens aber vom Rande bis zur Mitte eine continuirliche Abnahme des Lichts stattfinden müsste. Die photographischen Aufnahmen des Spectrums von γ Cassiopejae, des hervorragendsten Vertreters des Typus Ic, liefern ferner einen directen Beweis für die Gültigkeit der zweiten Erklärung auch für die vollständig ausgeprägte Erscheinung dieses Typus.

Bei einer sehr ausgedehnten Atmosphaere muss die Dichtigkeit der äusseren Theile derselben, welche für die Emission die weitaus grösste wirksame Fläche bilden, sehr viel geringer sein als diejenige

der inneren Theile. Das Hauptquantum des Lichts in einer hellen Linie wird also von einem Gase geringerer Dichtigkeit als der mittleren geliefert, und nur ein kleiner Theil von einem Gase grösserer Dichtigkeit. Der erste Theil kann nur eine schmale Linie verursachen, der zweite eine verbreiterte; mithin ist das Intensitätsverhältniss zwischen Mitte und Rand der Linie ein ganz anderes, als bei der Absorptionslinie, bei welcher dieses Verhältniss einem Gase von der mittleren Dichtigkeit entspricht. Der Unterschied äussert sich in dem Sinne, dass die äusseren verbreiterten Theile der Linie verhältnissmässig sehr schwach sind, so dass scheinbar die Emissionslinie schmäler ist als die Absorptionslinie, die letztere kann also nicht vollständig von der Emissionslinie überdeckt werden. Dem entspricht nun thatsächlich der Anblick der hellen Linie in γ Cassiopejae — andere Sterne vom Typus Ic sind dem Spectrographen nicht zugänglich. Die Helligkeit des continuirlichen Spectrums beginnt zunächst etwas abzunehmen, wie beim Anfang einer Absorptionslinie, und dann erst fängt eine Zunahme der Helligkeit bis zur Mitte der hellen Linie an.

Eine Gegenwirkung ist durch den Umstand bedingt, dass die inneren dichten Schichten der Atmosphaere eine höhere Temperatur besitzen werden als die äusseren, und dass also ihr Emissionsspectrum ein helleres sein wird; indessen ist es eine bekannte Thatsache, dass die Helligkeit der äussersten Theile einer verbreiterten Linie bei Temperaturerhöhungen viel weniger zunimmt, als diejenige der mittleren, so dass also die Gegenwirkung nur eine geringe sein kann.



Phototelephonische Untersuchung des zeitlichen Verlaufs elektrischer Ströme.

Von Prof. Julius Bernstein
in Halle a. S.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

In einer ähnlichen Weise wie Hr. Frölich[1] hatte ich mir die Aufgabe gestellt, den zeitlichen Verlauf von elektrischen Strömen, insbesondere in den Inductionsspiralen, mit Hülfe des Telephons photographisch aufzuzeichnen. Schon vor einigen Jahren gelang es mir, Schwingungen der Telephonplatte, welche durch einen elektrischen Unterbrecher erzeugt wurden, im virtuellen Bilde zu erkennen, indem ein feiner Lichtstrahl von einem auf der Platte befestigten Spiegelchen auf einen rotirenden Spiegel geworfen und in diesem mit einem Fernrohr beobachtet wurde. Sehr deutlich sah ich die Curve des aufsteigenden und abfallenden Stromes, der in der Spirale des Unterbrechers und dem Telephon ablief. Es lag daher der Gedanke nahe, dieses Bild photographisch zu fixiren.

Während nun Hr. Frölich nach diesem Princip durch einen rotirenden Spiegel ein reelles Bild erzeugte und durch Übereinstimmung der Rotationsgeschwindigkeit mit der Schwingungsgeschwindigkeit stehende Wellen entwarf, welche photographirt werden konnten, hatte ich noch vor Bekanntwerden dieser Untersuchungen begonnen, in einer viel einfacheren Weise zum Ziele zu kommen, indem ich die Schwingungen des Lichtstrahls auf einer mit photographischem Papier[2] überzogenen rotirenden Trommel zeichnen liess. Ein paralleles Strahlenbündel von Sonnen- oder elektrischem Lichte wird durch einen Spiegel auf eine enge Öffnung geworfen; der feine Lichtstrahl fällt auf den

[1] Über eine neue Methode der Darstellung von Schwingungscurven (Elektrotechnische Zeitschrift, Juli und August 1889. X. S. 345. 369).

[2] Ich benutze hierzu ein sehr empfindliches Papier (glattes F. Papier) von Dr. Stolze (Charlottenburg). In dieser Weise hat auch Hr. Hermann seine phonophotographischen Beobachtungen angestellt. (Pflüger's Archiv u. s. w. 1889. Bd. XLV. S. 582).

Telephonspiegel, vor dem sich eine Linse mit grösserer Brennweite befindet; der reflectirte Strahl wird auf eine grosse Linse[1] von geringerer Brennweite geworfen und diese erzeugt ein kleines scharfes Bild der engen Öffnung auf dem Papier der rotirenden Trommel.

Anfangs klebte ich, wie Frölich es that, das Spiegelchen direct auf die Telephonplatte und zwar in der Mitte zwischen Centrum und Rand derselben, wo nach meinen Erfahrungen die Winkelbewegung am grössten ist. Wenn es aber darauf ankommt, schwache Ströme zu beobachten, so ist es nöthig, die Empfindlichkeit zu verstärken. Zu diesem Zwecke wird auf das Centrum der Telephonplatte ein kleiner Steg aufgesetzt; einige Millimeter davon entfernt wird ein fester Draht über der Telephonplatte ausgespannt, der sich in gleicher Höhe mit dem freien Rande des Steges befindet. Über Steg und Draht wird eine Brücke von feinem Seidenpapier gezogen und auf dieser das Spiegelchen aufgeklebt.[2]

Meine bisherigen Versuche beschäftigen sich vornehmlich mit dem zeitlichen Verlauf des Inductionsstromes in dem Schlittenapparat von du Bois-Reymond. Die Schliessung und Öffnung des Stromes geschah zum Theil mit der Hand durch einen Contactschlüssel, hauptsächlich aber mit Hülfe des akustischen Stromunterbrechers, welcher regelmässig periodische Schliessungen und Öffnungen des primären Stromes giebt.[3] Der Unterbrecher machte in allen folgenden Versuchen 20 Schwingungen in der Secunde. Es wurde zuerst der zeitliche Verlauf des Kettenstromes beobachtet, wenn derselbe durch den akustischen Unterbrecher in das Telephon geleitet wurde. Die Spirale des Elektromagnetes dieses Unterbrechers war in allen folgenden Versuchen mit einer inductionsfreien Nebenschliessung von geringem Widerstande versehen, so dass dieselbe keine sehr erhebliche Verzögerung des Stromes erzeugen konnte. Es konnte ferner der Telephonspirale eine inductionsfreie Nebenschliessung gegeben werden, um den Öffnungsschlag derselben abzuleiten.

In Fig. 1[4] sieht man den Verlauf eines Stromes von 3 Daniell und 50 S. E. Widerstand, der durch den Unterbrecher und das Telephon ohne Nebenschliessung zu demselben geleitet wurde. Die Curve des ansteigenden Stromes, mit kleinen Eigenschwingungen der Telephon-

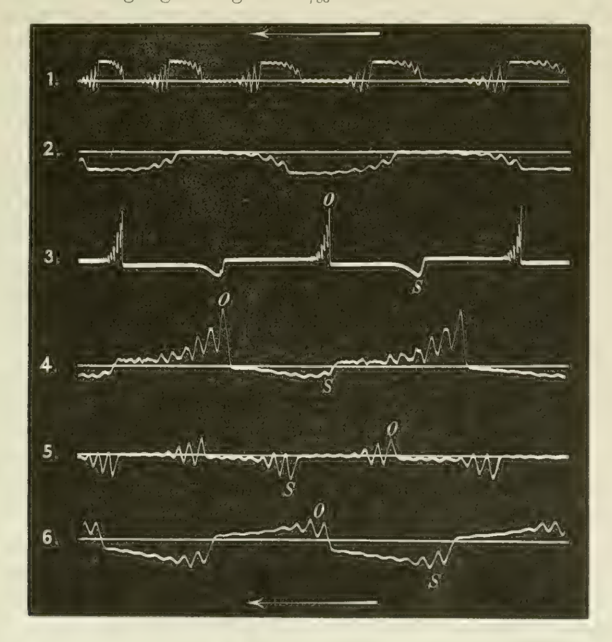
[1] Lässt man diese Linse fort, so sind die Excursionen des Bildes zwar sehr gross, aber man erhält keine scharfen Linien, sondern verwaschene Zeichnungen.

[2] Bei sehr kleinen Excursionen kann man das Spiegelchen auch direct auf Steg und Draht frei auflegen; bei grossen und schnellen Excursionen aber könnte es leicht fortgeschleudert werden.

[3] Vergl. Bernstein, Untersuchungen über den Erregungsvorgang im Nerven- und Muskelsysteme. Heidelberg 1871. S. 98 ff. Taf. III. IV.

[4] Die Curven sind, wie die Pfeile es anzeigen, von rechts nach links zu lesen.

platte besetzt, ist in Übereinstimmung mit der Theorie hauptsächlich auf die Selbstinduction in der Telephonspirale zurückzuführen. Beim Öffnen des Stromes, welches in dem Hg-Contact des Unterbrechers geschieht, fällt die Curve fast momentan ab, um nach wenigen Eigenschwingungen der Telephonplatte die Abscisse zu erreichen. Anders dagegen bei dem Versuch, der in Fig. 2 dargestellt ist, in welchem ein Strom von 3 Daniell angewendet und der Telephonspirale eine Nebenschliessung von 10 S. E. gegeben wurde. Während die ansteigende Curve dasselbe Bild gewährt, wie in Fig. 1, sieht man die Stromcurve annähernd ebenso langsam absinken, wie sie angestiegen war. Die Dauer des Anstieges und des Abfalles beträgt unter den gegebenen Bedingungen ungefähr $^1/_{80}$ Secunde.



Bei der Untersuchung der Inductionsströme des Schlittenapparates[1] wurde das Telephon mit der secundären Spirale verbunden und der primäre Kreis mit dem akustischen Unterbrecher versehen. Der primären Spirale konnte eine inductionsfreie Nebenschliessung von

[1] Derselbe besitzt eine primäre Spirale von 11 cm Länge und $3^1/_2$ cm Durchmesser. *s* bedeutet in den Figuren Schliessungs-, *o* Öffnungsschlag.

verschiedenem Widerstande gegeben werden; ebenso wurde der Widerstand des Batteriekreises bis zu den Enden der primären Spirale variirt. Ferner wurde der Einfluss der Eisenkerne durch Ein- und Ausschieben derselben beobachtet.

In Fig. 3 und 4 ist der Verlauf der beiden Inductionsschläge verzeichnet, bei einem primären Strome von 3 Daniell mit eingelegten Eisenkernen. In der Curve 3 geschah die Schliessung und Öffnung mit der Hand durch einen Schlüssel, in der Curve 4 durch die Schwingungen des Unterbrechers. Die Gestalt beider Curven entspricht durchaus der Theorie; der steil ansteigende Öffnungsschlag erreicht ein über dreimal höheres Maximum als der flach verlaufende Schliessungsschlag.

Wurden nun die Curven der Ströme verzeichnet, nachdem in demselben Versuche eine Nebenschliessung von 20 S. E. zur primären Spirale eingeschaltet war, so fielen die Unterschiede im Verlauf beider Ströme schon geringer aus, waren aber noch deutlich vorhanden.

Um den Einfluss der Eisenkerne allein festzustellen, wurden dieselben abwechselnd eingelegt und entfernt, ohne dass eine Nebenschliessung zur primären Spirale vorhanden war. Bei einem primären Strom von 12 Daniell mit 20 S. E. Widerstand wurden ohne Eisenkerne Curven von sehr kurzer Dauer erhalten, dagegen nach Einlegung der Kerne bei einem primären Strome von 3 Daniell Curven von ungefähr derselben Höhe, aber viel längerer Dauer in Folge der Verzögerung der Induction durch den entstehenden und verschwindenden Magnetismus.

Um den beiden Schlägen einen möglichst kurzen Verlauf zu geben, müssen daher die Eisenkerne der primären Spirale entfernt werden; um ihnen auch einen gleichen Verlauf zu ertheilen, muss zur primären Spirale eine inductionsfreie Nebenschliessung eingeschaltet werden, deren Widerstand zu dem der Kettenleitung bis zur primären Spirale möglichst gering ist. Diese Bedingung war nicht gegeben, wenn bei einem primären Strome von 3 Daniell eine Nebenschliessung von 20 S. E. eingesetzt wurde. Dagegen war sie schon besser erreicht, wenn die primäre Spirale 5 S. E. Nebenschliessung erhielt. Schliesslich gewinnen die Curven ein annähernd gleiches Aussehen, wenn durch Anwendung von 12 Daniell und 20 S. E. der Widerstand in der Kettenleitung vergrössert wird, und die primäre Spirale 5 S. E. Nebenschliessung behält, wie aus Fig. 5 ersichtlich ist.

Legt man unter dieser Bedingung die Eisenkerne ein, so werden die Ströme beträchtlich verlängert, was in Fig. 6 dargestellt ist. Die Dauer der Ströme erreicht im letzteren Falle etwa $^1/_{10}$ Secunde, im ersteren Falle ist sie etwa auf $^1/_{150}$ Secunde zu schätzen. Die Versuche

zeigen eine schöne Übereinstimmung mit der Theorie, welche von Hrn. von Helmholtz und Hrn. E. du Bois-Reymond für den zeitlichen Verlauf der inducirenden und inducirten Ströme entwickelt worden ist. Im Speciellen geben sie auch den Beweis dafür, dass man im Stande ist, mit den angewendeten Hilfsmitteln und Methoden annähernd gleichverlaufende Inductionströme von iso-periodischer Schwingung herzustellen, wie sie zu vielen elektrophysiologischen Versuchen erforderlich sind. Es ist mir auch gelungen, die Ströme der Muskeln mit einem für diesen Zweck construirten Spiegeltelephon zu erkennen. Ich beabsichtige daher, auf diese Weise die Schwankungen dieser Ströme zu untersuchen.

Ausgegeben am 20. Februar.



1890.

IX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

13. Februar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Wattenbach las: Die Briefe des Canonicus Guido von Bazoches, Cantors zu Châlons im zwölften Jahrhundert.

Die Mittheilung folgt umstehend.



Die Briefe des Canonicus Guido von Bazoches, Cantors zu Châlons im zwölften Jahrhundert.

Von W. Wattenbach.

Unter den geschichtlichen Denkmalen haben Briefsammlungen einen besonderen Reiz, weil sie so manche Beziehungen uns erkennen lassen, so manche Seite des Menschenlebens und der menschlichen Charaktere beleuchten, welche in anderen Aufzeichnungen nicht berührt werden. Darum fühlte ich mich auch angezogen durch die noch ungedruckten Briefe des Guido von Bazoches (de Basochis), als ein Zufall sie mir zuführte. Ein ganz anderer Bestandtheil der, aus dem Kloster Orval stammenden Handschrift, auf welche E. Dümmler mich aufmerksam gemacht hatte, veranlasste mich, durch die freundlichst gewährte Vermittelung des Hrn. Generaldirectors A. Willmanns die Zusendung derselben aus der Bibliothek zu Luxemburg zu erbitten, welche von dem Bibliothekar Hrn. N. Muller sogleich mit grösster Bereitwilligkeit gewährt wurde. Die Existenz derselben war uns durch die Notiz von G. Waitz in Pertz' Archiv VIII, 596 bekannt geworden, während sie in den gedruckten Verzeichnissen nicht erwähnt ist.

Konnte man schon von vorn herein sicher sein, dass eine Briefsammlung aus der zweiten Hälfte des zwölften Jahrhunderts, welche von einem namhaften Manne herrührt, für allerlei culturgeschichtliche Züge nicht unergiebig sein könne, so zeigte nun die Durchsicht, dass sie uns einführt in die fröhliche Weltlust der vornehmen französischen Weltgeistlichkeit, welche jedoch mit der Jagd und anderen Vergnügungen auch recht eifrige gelehrte Studien zu vereinigen weiss. Die kirchliche Gesinnung, Verehrung der Heiligen, der Reliquien und Wunder ist untadelig, auch des Martyriums des Erzbischofs Thomas von Canterbury wird mit gebührender Entrüstung gedacht, aber übrigens ist von den grossen Gegensätzen der Zeit, von dem Kampfe, welchen der Frieden von Venedig beendete, nirgends die Rede, was insofern nicht ohne Bedeutung ist, weil man sonst leicht in den Irrthum verfällt, als ob alle, namentlich alle kirchlichen Kreise von

diesen Fragen und Gegensätzen lebhaft berührt, vorherrschend damit beschäftigt gewesen wären. Ebenso wenig ist irgend eine Spur von ascetischen Tendenzen zu finden, welche in den Biographien so übermässig hervortreten. Nicht leicht fand sich ja ein Biograph, wenn es nicht galt, den Stifter eines Klosters oder Ordens, oder doch einen durch besondere Frömmigkeit hervorragenden Mann zu schildern, der nun zugleich den kommenden Geschlechtern als Muster hingestellt wurde; nicht selten wurden um des guten Zweckes willen oder zu grösserer Verherrlichung der betreffenden Kirche mancherlei Züge hinzugedichtet, mindestens einseitig nur diese Seite hervorgehoben, so dass man leicht zu einer falschen Auffassung der vorherrschenden Richtung der Zeit verleitet werden kann.

Anderer Art ist die Lebensbeschreibung des ritterlich stolzen, prunkliebenden Erzbischofs Adalbert II. von Mainz (1138—1141) in metrischer Form, von Anselm, in welcher vorzüglich seine Studienzeit in Reims, Paris, Montpellier eingehend geschildert wird, dann die Biographie des Erzbischofs Albero von Trier (1131—1152) von Balderich, in welcher die Freude an ritterlichen Thaten besonders lebhaft hervortritt. Albero von Montreuil war ein Franzose, und in weit bescheidnerer Weise, lange nicht so hervorragend, erinnert doch Guido von Bazoches mit seiner Vorliebe für ritterlichen Prunk, für Jagdlust, für weltliche Herrlichkeit aller Art, an seinen Landsmann. Kriegerische Thatlust lag ihm freilich ebenso fern, wie die opferfreudige Hingabe an die kirchliche Politik, wodurch Albero sich auszeichnete.

Guido ist lange Zeit wenig beachtet worden. Man kannte ihn als Verfasser eines Geschichtswerkes, welches Albrich von Troisfontaines benutzt hat; Scheffer-Boichorst bezeichnet es in seiner Ausgabe des Albrich als verloren. Aus den ansehnlichen Auszügen aber weist er nach (Mon. Germ. SS. XXIII, 663), dass es bei unleidlichem Wortschwall nur geringen Werth gehabt haben könne. Darauf wurde es vom Grafen Riant in einer Pariser Handschrift (Lat. 4998 aus Saint-Médard de Soissons) entdeckt; Waitz hatte diese Handschrift schon im Arch. VIII, 346 beschrieben, aber ohne den Verfasser zu kennen. Einige dürftige Notizen aus derselben, welche sich auf deutsche Geschichte beziehen, gab Waitz SS. XXVI, 216—218 heraus; über das ganze Werk aber berichtete Graf Riant in der Revue de Champagne et de Brie (1876) I, 1—9. Er hatte sich auch eine Abschrift der Briefe machen lassen, und beabsichtigte eine Ausgabe der gesammelten Werke des Guido, welche aber, wie so viele andere Pläne, wegen seiner Krankheit und seines frühen Todes unterblieben ist.

Guido war recht ansehnlicher Abkunft; besonderes Gewicht legt er auf die mütterliche Abstammung von Balduin II. dem Jerusalemfahrer, von Hennegau. Dessen Tochter Aelidis hatte sich mit Hugo von Rumigny vermählt; ihr Sohn war Archidiakonus von Laon, Guidos Oheim, denn ihre Tochter Hadewidis vermählte sich mit dem Herrn des Schlosses Bazoches, dessen Bruder der Bischof Haimo von Châlons war. Ihre Kinder waren Guido, Nicolaus von Bazoches, Milo, Abt von St. Médard zu Soissons, und Aelidis von Château-Porcien, Mutter des Archidiakonus Rainaud.

Schon früh wurde Guido zum geistlichen Stande bestimmt, und zwar scheinen, da er der Erstgeborene war (7), hierfür seine guten Anlagen und vielleicht schon die Neigung zur Beschäftigung mit Büchern entschieden zu haben. Es war nach dem 30. Briefe sein Oheim, der Bischof Haimo (1151—1153), welcher ihn, noch als Archidiakonus, dem Elternhause entführte, siebenjährig nach dem 2. Briefe an einen Magister R., dem er den ersten Unterricht verdankte. Der Oheim aber, ein gelehrter Herr, dessen früher Tod sehr beklagt wird, Verfasser eines Handbuches des Kirchenrechts, sorgte väterlich für ihn, und schor ihn als Bischof zum Geistlichen seiner Kirche. Schon in dieser Zeit muss er sich die Kenntnisse erworben haben, welche wir von Anfang an in seinen Briefen finden, namentlich die Kunst eines sehr geläufigen Ausdrucks, allerdings mit einem gewaltigen Wortschwall, aber nicht ohne bemerkenswerthe Gewandtheit, mit einem Bilderreichthum, den vorzüglich die damals so beliebte symbolische und allegorische Auslegung der heiligen Schriften darbot. Ganze Seiten werden gefüllt mit den Lobpreisungen höhergestellter Personen, an welche er schreibt, mit Lobreden auf Tugend und Wissenschaft, mit Ermahnungen, alle sich gleichend, ohne doch in völlige Eintönigkeit zu verfallen. Er ist nicht ohne allerlei aus dem Alterthum stammende Kenntnisse, mit der Geschichte der Franken und namentlich der Genealogie vertraut, und weiss mit grosser Lebendigkeit Gegenden, Gebräuche, allerlei Vorgänge zu schildern. Besondere Vorliebe entwickelt er, vorzüglich in späterer Zeit, für die Dichtungen der Heldensage. Jeden Brief schliesst er mit Versen in verschiedenen Metren und Rhythmen, welche nicht ungeschickt gemacht sind. Es ist nicht ausgeschlossen, vielmehr sehr wahrscheinlich, dass er die Briefe, als er sie später sammelte, überarbeitet hat, allein auch schon die frühesten müssen ihm doch damals noch der Aufbewahrung und Bekanntmachung werth erschienen sein und in ihrer wesentlichen Gestalt vorgelegen haben. Augenscheinlich hat er grosse Sorgfalt darauf verwendet, und sie sind ein nicht unbedeutendes Denkmal der damals mit so grossem Eifer betriebenen Studien. Im

Allgemeinen ist die Reihenfolge augenscheinlich der Zeitfolge entsprechend, aber Daten fehlen durchaus und auch in der Anrede steht sein Name immer ohne irgend eine Standesbezeichnung.

Der erste Brief ist an den Erzbischof Heinrich von Reims gerichtet, den Sohn des Königs Ludwig's VI, welchen er bei seiner Erhebung im Jahre 1162 begrüsst, natürlich mit überschwenglichen Lobsprüchen; er verfehlt nicht, seine Herkunft als eine königliche schon von Heinrich I von Deutschland, dem Schwiegervater des Herzogs Hugo des Grossen, nachzuweisen.

Der folgende Brief ist an jenen R. gerichtet, der ihn unterwiesen hat, nachdem er, kaum sieben Jahre alt, aus dem mütterlichen Gemach entführt war; er rühmt ihn über alle Maassen, und bezeugt lebhafte Reue über Verirrungen, welche ihn demselben etwas entfremdet haben, aber nicht näher bezeichnet werden.

Offenbar verschieden von diesem ist R. de Roseto, den er (3) einfach als seinen 'karissimus' anredet; dieser hat den Antritt einer ihm zu Theil gewordenen Würde gefeiert, und Guido würde gerne daran Antheil genommen haben, wenn ihn nicht die 'dulcedo scolaris ergastuli' in freier Haft (libera captio) zurückhielte.

Im 4. Briefe berichtet er einem 'nobilis adolescens', dass er sich jetzt in Paris befinde, einer Stadt, welche er über alle anderen Städte preist, in lieblicher Gegend gelegen, umflossen von der Seine. Auf beiden Ufern erstrecken sich Vorstädte, durch steinerne Brücken mit der Insel verbunden. An und auf der grossen Brücke ist der lebhafteste Handelsverkehr, auf der kleinen aber geht man spatzieren oder beschäftigt sich mit logischen Disputationen. Auf der Insel erhebt sich der königliche Palast. Hier aber hat sich auch die Philosophie ihren Thron errichtet, hier die sieben freien Künste ihren Wohnsitz genommen. Hier werden die Decrete und die 'leges', das geistliche und das weltliche Recht vorgetragen, und die heiligen Schriften erläutert nach der historischen, allegorischen und moralischen Auslegung.

Darum fordert Guido auch seinen Freund auf, dorthin zu kommen; er beschliesst seinen Brief mit einer Todtenklage um einen kürzlich verstorbenen Guido von Châtillon, die Blume der Ritterschaft. Zu diesem Hause gehörten die Herren von Bazoches.

Im folgenden 5. Briefe klagt er, dass er allein in Paris geblieben sei, sein junger Freund, dem er schreibt, hat ihn verlassen, und wird nun wohl nicht den höheren Studien treu bleiben, sondern sich ganz der Jagd und anderen weltlichen Vergnügungen hingeben: es sind dieselben, welche er selbst später mit grosser Vorliebe und Begeisterung schildert. Vermuthlich hat der Adressat, ein vornehmer

junger Mann, zum Klerus von Châlons-sur-Marne gehört; er wird dort der Stadt beim Beginn des neuen Jahres das Fest des Stabes (festivitatem baculi) ausrichten, vermuthlich eine dort übliche Art, den Eintritt in diese Genossenschaft zu feiern.

Da Guido hieran leider nicht theilnehmen kann, so sendet er ein Lied, welches zu Ehren des Stabträgers 'gestator baculi' gesungen werden soll.

Der folgende (6.) Brief ist an seine Schulgenossen (scholares socii) gerichtet, und erfüllt von Klagen über boshafte Anfechter und Verleumder, welche selbst ein lockeres und leichtfertiges Leben führen.

Im 7. Briefe belehrt Guido seine Mutter, Frau Hedwig von Bazoches, auf ihren Wunsch über die Bedeutung des Wortes 'ecclesia', und wie es zu erklären sei, dass man die Kirche mit einer Braut, einer Mutter u. s. w. vergleiche. Seine Mutter muss eine sehr gelehrte Frau gewesen sein, wenn sie dieses Prunkstück kirchlicher Gelehrsamkeit hat verstehen können.

Anziehender ist der folgende (8.) Brief an seine Schwester, die Frau von Château-Porcien (de castello Porcensi). Diese hatte nämlich eine Wallfahrt nach Châlons gelobt, zu welcher er ihr nicht nur räth, sondern auch eine blüthenreiche Schilderung des dort zu findenden Lebens hinzufügt. Fortwährend wirkt da die Mutter Gottes grosse Wunder, und die in ausserordentlicher Zahl hinströmenden Gläubigen bauen eine neue Kirche, da die alte ihnen nicht mehr genügt. Sie selbst ziehen ganze Felsmassen aus weiter Entfernung auf Wagen herbei; der Adel beiderlei Geschlechts drängt sich herzu, an den Stricken zu ziehen. Haben sie die Stadt erreicht, so eilt Alt und Jung, Hoch und Niedrig ihnen barfüssig mit lautem Jubel entgegen. Musik und Gesang erschallt, und so führt man sie zur Marienkirche, wo nun der Gottesdienst beginnt. Sie solle ja nicht unterlassen, auch dorthin zu pilgern.

Dieser Brief ist noch in voller Heiterkeit geschrieben und macht den Eindruck, als habe Guido sich damals in Châlons aufgehalten, zu dessen Klerus er durch die von seinem Oheim erhaltene Weihe gehörte. Nun aber ist schweres Unglück über ihn hereingebrochen. In einem späteren Briefe (23) finden wir das Geständniss, dass er in Paris sehr leichtsinnig gelebt habe, und in den jetzt folgenden ist viel von Verirrungen die Rede, ohne dass doch irgend eine bestimmte Auskunft darüber gegeben würde. Es liegt ja nahe, dabei auch an weiblichen Einfluss zu denken, doch will ich gleich bemerken, dass davon in diesen Briefen nie die Rede ist.

Zunächst (9) schreibt er an einen ehrwürdigen Herrn, seinen Lehrer N., in sehr reumüthiger Stimmung. Ihm (N.) sei nicht unbe-

kannt, weshalb er in die Fremde gehe. 'Ich habe alle meine Freunde aufgesucht, und keiner hatte Mitleid mit meinem Exil, mit den mir bevorstehenden Nöthen, keiner wollte mir helfen.' Doch hat er seine beschwerliche und gefährliche Reise angetreten, auch einen Magister, der nicht näher bezeichnet wird, aufgesucht, und dieser hat auch versprochen, ihn zu besuchen. Mit Mühe und Noth, durch schreckliche Gebirge ist er nach Montpellier gekommen. Er bittet dringend um Hülfe.

Der 10. Brief ist nach der Überschrift an denselben gerichtet, doch nach dem Inhalt scheint er an den eben erwähnten alten Lehrer gerichtet zu sein, den er trotz grosser Fährlichkeiten aufgesucht hatte, aber hier ist nur von dem Eifer zu lernen die Rede, der ihn so weit von der Heimat und zu eben diesem Weisen getrieben habe. Hier klagt er nur über boshafte Neider, und erwähnt, dass er durch die seinem Oheim (patruus) verliehene Würde einige Mittel bekommen habe, wo die Vermuthung gestattet ist, dass ein ausgelassenes a zu ergänzen sein möge, und sein Oheim, der Bischof, ihm vor seinem Tode eine Pfründe verliehen hatte. Dem Adressaten dankt er für viele ihm früher erwiesene Güte und bittet um Erlaubniss, ihn aufsuchen zu dürfen. Er erinnert ihn an das Versprechen, durch welches er ihn an der Durance so froh gemacht habe, und an das Wohlwollen gegen seinen früheren Zögling und Schüler, Guidos Oheim, vermuthlich doch wohl den Bischof Haimo. Er schliesst mit Versen zum Andenken an einen kürzlich verstorbenen Bischof, über dessen Hinscheiden nicht die Stadt allein, sondern auch die Umgegend trauere. Sie sind aber so allgemein gehalten, dass daraus nichts zu entnehmen ist.

Den 11. Brief richtet er aus Montpellier an seine Verwandten; von den Schwierigkeiten und Fährlichkeiten und den grossen Kosten der Reise ist die Rede, welche er, durch die Nothwendigkeit gezwungen, unternommen habe. Hier ist es ihm schlecht gegangen; der November plagte ihn mit seinen Winden, der December mit Regen, der Januar mit Kälte. Hier in der felsigen Provence, fern von dem blühenden Frankreich, durch seine Studien festgehalten, bittet er um Nachrichten aus der Heimat und um Unterstützung.

Einem Lehrer und Freunde schreibt er (12) mit dringenden Bitten um Nachrichten; viele Boten habe er vergeblich ausgesendet, keine Briefe erhalten. Von seiner ganzen zahlreichen Verwandtschaft und Freundschaft habe niemand ihm helfen wollen. Auch seine Genossen, welche in der Zeit seiner glücklicheren Lage eifrig zu ihm hielten, haben ihn verlassen, sobald die Zeit und Umstände sich änderten.

Der 13. Brief ist an seinen Mutterbruder, ohne Zweifel den Archidiakonus von Laon, gerichtet, den er bittet, ihm nicht länger seine Gnade zu entziehen. Er schreibt ihm, dass er von Montpellier aus, wo er durch die Liebe zu den Studien festgehalten sei, die Schwellen des heiligen Aegidius aufgesucht habe, und entwirft eine lebensvolle Schilderung von Saint-Gilles, von der Lebhaftigkeit des Handelsverkehrs, der Fruchtbarkeit der Umgegend. Alles aber überragt die Kirche, nicht nur als Gebäude, sondern weit mehr noch durch den Glanz der Wunder, welcher aus allen Völkern Wallfahrer von allen Ständen dahin führt. Eine sapphische Ode zu Ehren des h. Aegidius beschliesst den Brief. Der folgende (14) ist an die dort versammelten Mönche gerichtet, welche natürlich mit Lob überhäuft werden.

Mit ganz überschwänglichem Lobe ist der nächste (15) Brief angefüllt, gerichtet an den Grafen Heinrich von der Champagne (1152—1181), der ihm mit Rath und Hülfe Gutes erwiesen hat, und den er auch in seinem Geschichtswerk sehr gepriesen hat. Demselben schreibt er darauf (16) mit heftigen Klagen über einen Vasallen desselben, welcher die ihm von den Mönchen des Pariser Klosters St. Martin-des-Champs anvertraute Besitzung (religiosa domus) mit bewaffneter Hand angegriffen und vollständig ausgeraubt habe. Der Graf habe doch den furchtbaren Zorn des alamannischen Löwen nicht gefürchtet, die Schwaben verhöhnt, die trotzigen Bataver zurückgetrieben, die Sachsen auf ihren Rossen für nichts geachtet — alles Angaben, für welche ich Belege nicht gefunden habe. Durch ihn habe sich auch Frankreichs Ruhm gegen den König von England behauptet. Hier fehlt ein Blatt, und es ist zweifelhaft, ob das nun folgende, von anderer Hand geschriebene Blatt zu demselben Briefe gehört; es ist aber sehr möglich, da es, an denselben Grafen gerichtet, einen sehr ausführlichen Stammbaum desselben enthält, und ihn ermahnt, nach dem Vorbilde seiner grossen Ahnen zu handeln. Nachher ist wieder eine Lücke und der Schluss des Briefes fehlt.

Guido ist also hiernach aus Montpellier zurückgekehrt, er hat die eben erwähnte Verwaltung eines Klostergutes übernommen, danach aber ist er, wie ich vermuthe, Domherr in Châlons geworden und hat den Antritt dieser Würde durch das schon oben erwähnte Fest des Stabes (baculi sollempnitas) gefeiert. Nach der Feier desselben schreibt er an N., einen früheren Studiengenossen (17), dessen Gelehrsamkeit er preist, und der mit ihm verwandt ist. Er hat sich gefreut, aus dessen Brief zu vernehmen, dass es ihm gut gehe, und dass er mit Wohlgefallen das weit verbreitete Gerücht von seinem

Feste vernommen habe, dessen glänzender Verlauf ihm, Guido, hohen Ruhm gebracht habe. Jener fast allein von allen Freunden habe bei diesem Fest gefehlt.

Aber diese Freude dauerte nicht lange. Er hatte sich in übermässige Ausgaben für sein Fest gestürzt, und gab durch rückhaltlose Hingabe an die Weltlust, deren er sich selbst reumüthig bitter beschuldigt, seinen Widersachern Anlass zu begründeten Vorwürfen. In tiefer Niedergeschlagenheit darüber schrieb er einen Brief (18) an seinen Bruder Milo, der Mönch war, später Abt von Saint-Médard in Soissons wurde. Er ist jetzt vollkommen davon durchdrungen, wie verwerflich die Weltlust ist. Angehängt sind Verse zum Preise des neuen Märtyrers Thomas, so dass also das Jahr 1170, an dessen 29. Dec. er erschlagen wurde, bereits hinter uns liegt. In gleicher Stimmung schreibt Guido auch (19) seinem besonderen Freunde und ehrwürdigen Lehrer N., einem Lehrer der heiligen Schrift, der ihn durch ein Schreiben getröstet hatte. Unendliches Geld hatte er verschwendet und seinen Lüsten hatte er ganz den Zügel schiessen gelassen, und selbst noch nach dem Empfang jenes Schreibens war er wieder rückfällig geworden. Dringend bittet er den N. zu ihm zu kommen und ihn aus dem Abgrunde zu erretten.

Die beiden folgenden Briefe (20 und 21) sind an seinen Freund Petrus gerichtet, dessen Erkrankung im zweiten Briefe beklagt wird. Über ihn selbst erfahren wir daraus nichts.

Dann schreibt er (22) an seine geliebten Brüder in Châlons einen sehr launigen Brief. Sein innerer und sein äusserer Mensch liegen in schwerem Streit; der innere treibt ihn an, der Weltlust zu entsagen und sich wieder den Studien zuzuwenden, aber der äussere will davon nichts wissen. Ob er denn allen Freuden entsagen könne und wolle, der angenehmen Gesellschaft, den Spatziergängen und Gelagen mit lieblichem Gesang, mit Vortrag von Gedichten, der herrlichen Kleidung mit goldenen Sporen, den stolzen Rossen, den Freuden der Jagd, den ausgesuchten Gastmählern, mit allem Schmuck des Überflusses ausgerüstet? Wo bleiben nun die herrlichen Feste beim Empfange vornehmer Gäste, wenn die Ritter in funkelnden Rüstungen einreiten, die Menge ihnen jubelnd entgegen eilt, und überall Musik und Schaustellungen (psaltriae, histriones, citharoedi) das Herz erfreuen? Er ist übrigens schon wieder bei den Studien (scholaribus vinculis irretitus) und kann zu ihrem Fest nicht kommen; er schickt deshalb ein Gedicht, welches der 'gestator baculi' vortragen soll. Zu lang ist der Brief geworden, als dass er auch von sich noch Nachricht geben könne, das verspart er auf den folgenden Brief, welcher jetzt auch in der Handschrift folgt (23).

In diesem bekennt er, dass der übermässige Aufwand bei seinem Stabfeste ihn genöthigt habe, Châlons zu verlassen. Heimliche böse Nachrede seiner Widersacher ist dadurch veranlasst und hat ihn fortgetrieben; vorzüglich aber doch der ernstliche Wunsch, nach der in Vergnügungen verlorenen Zeit sich wieder den Studien zuzuwenden, und zwar wollte er nach Paris, wo er schon früher viel Geld verzehrt und wenig gelernt hatte. Die Würfel hatte er den Büchern vorgezogen, das Spiel dem Lesen, schöne Pferde den Hörsälen. Es zog ihn wieder dahin, aber sein Gewissen mahnte ihn, den gefährlichen Ort lieber zu meiden, und lieber zunächst sich zu dem Bruder seiner Mutter zu begeben, dem Archidiaconus von Laon. Der ist sehr reich, ein frommer und gelehrter Mann, der aber doch das Leben mit Annehmlichkeit geniesst. Er ist ein Sohn des Schlossherrn von Rumigny, ein Neffe des Bischofs Bartholomäus von Laon, vornehmster Abkunft; seine Mutter war die Tochter des Grafen Balduin, des Jerusalemfahrers, von Hennegau. Von diesem sagt er:

Hic erat ille comes, quo nemo clarior inter
  Francorum proceres Austrasiosque fuit.
Hic erat ille nepos satulis militis ejus,
  Per vada cui Rheni dux fuit albus olor.
Huic celebris via Jherusalem duce cum Godefrido
  Multo Partorum sanguine parta fuit.

Das mittlere Distichon ist aber mit alter Dinte dick durchstrichen; vermuthlich erschien die Anspielung auf den Schwanenritter anstössig. Darum habe ich auch das Wort 'satulis' nicht mit voller Sicherheit entziffern können, und weiss nicht, ob darin ein Name steckt.

Es folgt dann eine glänzende Beschreibung des festen Schlosses, welches seinem Oheim gehört, mit seiner reichen und fruchtbaren Umgebung; es liegt innerhalb des Archidiaconates seines Oheims und nicht fern von Rumigny. Vorbei fliesst das fischreiche Flüsschen Albula, umgeben von den schönsten Wiesen, wo die Jugend ihre Reihentänze aufführt. Die Wälder aber, welche mit zwei Armen das Schloss umfassen, gewähren eben so viel Vergnügen als Nutzen durch Jagd, Fruchtertrag und Holz, während ein dicht verschlungener Hag zugleich zum Schutze dient.

Hier also hat Guido sich 15 Monate aufgehalten und seine Zeit zwischen Vergnügen und Studien getheilt, wie das in einem längeren, gar nicht üblen Gedicht geschildert wird. Die Jagd spielt darin eine Hauptrolle.

Im folgenden Briefe (24) sendet Guido seinem Collegen (concanonico) B. in Châlons einen Brief, um den er ihn gebeten hatte, nämlich ein Schreiben an die Kanoniker von Besançon, verfasst im Namen

der Kirche von Châlons, worin sie ersucht werden, zu melden, wie sie zu den Reliquien des h. Stephanus, ihres gemeinsamen Schutzpatrons, gekommen sind. Ihr Decan ist kürzlich in Châlons gewesen und hat davon erzählt; er hat ihnen auch eine schriftliche Mittheilung darüber versprochen, und um diese bitten sie jetzt.

Ganz eigenthümlich ist der folgende Brief (25), gerichtet an seine Freunde und Collegen in Châlons. Es war nämlich vor dem Erzbischof von Reims ein Prozess zu führen, bei dessen Schlusstermin man von Guido eine grosse oratorische Leistung erwartete, und er mag wohl selbst diese Erwartung hervorgerufen haben. Allein als der grosse Augenblick kam, verstummte er vollständig. Der Prozess war nun freilich doch gewonnen, aber seine Widersacher verfehlten dennoch nicht, ihn zu verhöhnen. Deshalb rechtfertigt er sich jetzt. Der Sachwalter hatte bereits alles, was nöthig war, gesagt. Aber was hätte er nicht alles sagen können und wollen! Seine ganze nichtgehaltene Rede übersendet er, und wir erfahren daraus die ganze Angelegenheit, welche zu characteristisch ist, als dass wir sie hier nicht mittheilen sollten.

Die Kirche von Châlons, sagt er, befindet sich in grosser Verwirrung, da ihre natürlichen Beschützer, der Bischof und die ihm am nächsten stehen, sie bei dieser Sache im Stiche lassen. So bleibt ihr denn als Beschützer nur der Erzbischof, und diesem also wird die Sache vorgetragen. Mit dem Bischof ist Guido verwandt; es muss Guido III. sein, ein Sohn Rogers von Joigni, des Herrn von Joinville (1162—1190). Wegen der Verwandtschaft, aber auch wegen eines ausreichenden Grundes, nämlich wegen des durch ihn, den Bischof, zu Stande gebrachten gütlichen Ausgleichs in einem Streite, der damals zwischen Guido und dem Thesaurar der Kirche vor dem vorigen Erzbischof von Reims (Heinrich 1162—1175) schwebte, hatte er Guido eine Prälatur bei passender Gelegenheit vor Zeugen zugesichert. Das Versprechen hatte er aber dennoch bei mehreren Vacanzen nicht gehalten; da begab es sich, dass Guido, der Archidiaconus major, erkrankte, und man vermuthete, dass der Bischof die Würde einem Neffen, dem Rodbert, geben werde, welcher schon widerrechtlicher Weise zwei Prälaturen besass, von diesen aber die eine dem G(erard), seinem sehr verrufenen Günstling. Deshalb begibt sich Guido mit Zeugen zum Bischof, und bittet ihn, aus Barmherzigkeit, aus Rücksicht auf die Verwandtschaft und seine sehr geringen Einkünfte um die Pfründe. Da der Bischof Ausflüchte sucht, verbietet Guido ihm, eine Pfründe zu vergeben, bevor die Streitsache vor dem Erzbischof entschieden sei, und citiert ihn vor diesen auf den dritten Tag nach Erledigung einer Pfründe. Ebenso verbietet er dem versammelten

Kapitel, dass irgend jemand eine ihm etwa verliehene Pfründe annehme. Ein Abgesandter des Erzbischofs erscheint und erlässt dasselbe Verbot vor versammeltem Kapitel; der Cantor stimmt dem bei und gelobt Gehorsam.

Der Archidiaconus Guido war gestorben, aber noch nicht begraben, schon aber meldeten sich Rodbert und sein Spiessgeselle Gerard als mit den erledigten Würden bekleidet. Eben wurde die Vesper in den Octaven des Himmelfahrtsfestes gefeiert, da erschien jener Gerard im Chor, und der Cantor ergreift ihn bei der Hand mit den Worten: 'amice, ascende superius!', und setzt ihn auf den erledigten Stuhl des Archidiaconus; von dem übrigens doch oben gesagt ist, dass er für Rodbert bestimmt war; man muss es also vielleicht so verstehen, dass der erledigte Sitz der frühere Platz des nun zum Archidiaconus beförderten Rodbert ist. Allgemeiner Aufruhr entsteht, alle Canoniker und auch die Kleriker der Vorstädte, welche zur Bestattung des Archidiaconus gekommen waren, verlassen die Kirche. Der Cantor, obgleich nur Diaconus, maasst sich das Amt eines Priesters an, und beendigt mit Gerard und einem übelbeleumdeten Jüngling die Vesper. Der Cantor war schon ein ganz alter Mann, aber mit feurigem Antlitz, hoch aufgerichtet, mit schön frisiertem Haar, flammenden Blicken, läuft er umher, verhöhnt die Gegner, tanzt bei den Psalmen, singt mit heller Stimme wie ein Vogel; nur darauf ist er bedacht, Gerard und Rodbert zu gefallen. Das alles ist Guido bereit, durch Zeugen zu erweisen. Gerard hat sich sogar gerühmt, weit besser als Guido zu reden. Das möge er doch versuchen und zeigen, dass er wirklich Lateinisch reden könne: wie und mit welchem Vergnügen werde er, Guido, ihn dann mit seiner Beredsamkeit zermalmen.

Leider ist aber diese ganze, sehr schön, sorgfältig und blumenreich ausgearbeitete Rede ungesprochen geblieben.

Der folgende 26. Brief ist an den Erzbischof Wilhelm von Reims (1175—1203) gerichtet, ein Dankbrief mit unendlichen Phrasen und Lobsprüchen. Er hatte den Erzbischof in Beauvais aufgesucht, wo derselbe damals am Fieber erkrankt war; aber er erholte sich und konnte am Pfingstfest die Messe feiern; Guido hatte er seinen Schutz zugesagt. Als dieser dann nach Reims kam, um mächtigen Männern gegenüber seine Sache zu führen, da hat er den Sieg derselben freilich nur der Gerechtigkeit zu danken, aber der Erzbischof hat ihn nicht nur zur Tafel geladen, ihm den zweiten Platz von seinem eigenen gegeben, sondern auch die Dürre seiner Armseligkeit mit der Verleihung von Einkünften berieselt und dadurch seine Gegner ganz besonders betrübt. Decanat und Archidiaconat sind

anders besetzt worden, aber hier fehlt wieder der Schluss des Briefes, und wir erfahren nicht, ob Guido jetzt endlich sein Ziel erreicht hat, was jedoch nach dem folgenden Briefe wahrscheinlich ist.

Es ist hier eine Verwirrung in der Handschrift eingetreten, denn ausser dem Defect gehören auch die beiden nächsten Blätter nicht hierher, sondern sind der Schluss eines späteren (30.) Briefes.

Nach dem folgenden (27.) an seine Mutter gerichteten Briefe ist er schwer erkrankt; er bittet sie dringend zu kommen und befürchtet sein Ende, was ihn jedoch nicht hindert, sein Thema in den schönsten und mannigfaltigsten Phrasen zu behandeln. Für den Fall seines Todes schickt er gleich seine Grabschrift ein, welche lautet:

> Guido michi nomen, generis Basochis origo:
>   Qui castri dominus, et pater ille meus.
> In Cathalaunensi sacra protomartiris aula
>   Offitium quintus contulit ordo michi.
> Major eram brevibus, brevior majoribus, annos
>   Vir juvenisve fere, plusve minusve ferens.
> Et ludis datus et studiis, sed rarus in illis,
>   Creber in his, doctus atque docendus eram.
> Nec dives nec egens, sed sub moderamine tali
>   Fortunam medius inter utramque fui.
> Septimus instabat media plus Virgine mensis,
>   Cum michi restabat preter obire nichil.
> Qui legis hos versus, conversus ad ethera pro me
>   Promere devota mente memento preces.

Hieraus erfahren wir, dass er glücklich zum Besitz seiner Prälatur gelangt war, denn die fünfte Präbende war die des Cantors. Dieser hatte die Pfarre von Saint-Louvent de Pocancy zu vergeben, ein Grund mehr zu der besonderen Verehrung des h. Lupentius, welche uns später noch begegnen wird, wenn schon damals diese Pfarre zu der Cantorei gehörte.

Die Krankheit aber hat er doch glücklich überstanden.

Die beiden ersten Zeilen, welche die Adresse enthalten, sind in diesen Briefen gewöhnlich von einer anderen Hand nachgetragen und mit einer einfachen rothen Initiale versehen; von hier an fehlen sie häufig, so gleich beim folgenden 28. Briefe. Er ist an einen Freund gerichtet, und enthält mit unendlichem Wortschwall das Bedauern, ihn in seiner Krankheit nicht bei sich gehabt zu haben. Er hat sich oft nach ihm gesehnt, obgleich jener kein 'phisicus' ist, dafür aber ein 'methaphisicus'. Diese Wissenschaft stamme freilich nicht aus Montpellier, aber von einem höheren Berge, vom Himmel.

Den 29. Brief, welcher nur ganz unpersönliche Betrachtungen enthält, scheint unvollendet zu sein.

Dem 30. fehlt der Anfang; gerichtet ist er an die Mutter, und enthält eine Beschreibung von Châlons; der erhaltene Theil setzt ein mit der Schilderung anmuthiger Wiesen an der Marne, welche im Sommer Schauplatz des heitersten Lebensgenusses sind. Da ergötzt das Volk sich mit Spielen, einige mit Bockspringen, andere mit Ringen, mit Ballspiel. Da funkeln auch ritterliche Waffen und werden Kampfspiele aufgeführt. Da sieht man auch Reihentänze und hört süssen Gesang und Musik.

Aber abgesondert davon ergehen sich die geordneten Züge der Kleriker am Ufer des Flusses. Auch sie pflegen süssen Gesang, und tanzen in tactvoller Bewegung. Andere ergehen sich frei, üben sich in künstlicher Rede und fordern für satirische Spitzen Verzeihung um der Kunst willen. Andere speculiren über alle Geheimnisse der Natur, überlegen und besprechen die geistlichen und weltlichen Gesetze. Diesen Ort hat er beschreiben wollen, weil alle Einheimischen und Fremden ihn preisen. Dann geht er über zu den Grenzen des Sprengels und zu den ersten Begründern des Bisthums, voran dem von dem ersten Pabst Clemens entsendeten h. Memmius, und seinen und seiner Genossen Wunderthaten. Unter den Nachfolgern wird dann besonders Bischof Haimo (1151—1153) gefeiert, Guidos Vaterbruder, der ihn von Kindheit an zu sich genommen, unterrichtet, und ihn zum Geistlichen geschoren hatte. Er rühmt ihn sehr, und beklagt seinen frühen Tod. Über ihn wäre so viel zu sagen, schreibt er, dass es einen eigenen Brief erforderte, der aber nicht vorhanden ist. Er fügt nur noch einige Verse zu seinem Ruhme hinzu, welche den 28. November als Todestag bezeichnen.

Der folgende Brief (31) enthält nur einen Rhythmus zu Ehren der heiligen Märtyrer und Schutzpatrone Rufinus und Valerius, welche ihm so oft, wenn er sie in der Noth angerufen hat, Hülfe gebracht haben.

Im 32. Briefe wendet er sich an seinen Neffen Rainaud, den Sohn seiner Schwester, von dem er die schönsten Erwartungen und Hoffnungen hegt. Lange hatte er ihm nicht geschrieben, weil ihn zur Strafe für sein leichtfertiges Leben ein hitziges Fieber gepackt hatte, mag es nun die früher schon erwähnte schwere Krankheit gewesen sein, wie ich glauben möchte, oder eine neue. Er übergab sich der Pflege einer weisen und viel erfahrenen Frau, welche durch ihre Kunst die Ursache der Krankheit erkannte und ihn hauptsächlich durch angemessene Diät herstellte. Mit vielem Geschick wird die Krankheit verglichen mit einem Feinde, der eine feste Stadt angreift und sich ihrer schon fast bemächtigt hat, endlich aber doch durch Gottes barmherzige Hülfe ausgetrieben wird. Klagen über die ver-

lorenen Annehmlichkeiten des Lebens zeigen uns das lustige Leben, welches er in Châlons zu führen pflegte, wobei von kirchlichen Pflichten nicht die Rede ist. Wo ist nun, sagt er, der Zuspruch meiner Verwandten, der gute Rath meiner Freunde, wo die Gesellschaft meiner Gäste, die feinen Diener, die ausgesuchte Mannigfaltigkeit und Süssigkeit der Becher und der Speisen? wo die anmuthige Geschwätzigkeit der Fiedler und der Schauspieler (fidicinum atque mimorum), welche verschiedene Begebenheiten, die Thaten tapferer Männer, in rythmischer Form absingen? wo bleibt nun die Freude, der ich mich so ganz hingegeben hatte, an prächtigen Gewändern, muthigen Pferden, goldgeschmücktem Geschirr und Sporen? wo der herzerfreuende Ritt durch Felder, Wiesen und Wälder, mit dem lauten Gebell der Jagdhunde, den flüchtigen Hasen, den Ebern, welche sich zur Wehr setzen, dem fliehenden Hirsch, und zu seiner Zeit das Federspiel der Falken? Ebenso wenig ist jetzt die Rede von dem Streben nach Vermehrung der Einkünfte, nach Erlangung von Ehren, von der Beschäftigung mit der Dichtkunst und anderen Schriften, den Disputationen und dem Lesen in den Büchern, von allem Haschen nach eitlem Weltruhm. Recht lebhaft tritt uns darin das Leben und Treiben dieser vornehmen Weltgeistlichen entgegen.

Der jugendliche Neffe war oder wurde schon Archidiakonus, im folgenden (33.) Briefe wird er so bezeichnet, er ist aber weit entfernt, 'in castris scholaribus'. Noch schwankt er, ob er sich seinen Studien, fern von der Heimath noch länger widmen will. Guido gibt ihm guten Rath und malt mit lebhaften Farben das Bild des leichtfertigen und faulen Studenten. Rainaud aber soll stets sich seiner hohen Abkunft würdig zeigen, welche nun in aller Ausführlichkeit von Chlodwig an ihm vorgeführt wird. Es ist die Mutter, die Enkelin Balduins von Hennegau, durch welche der Stammbaum so hoch hinaufgeführt wird. Zieht er es jedoch vor, sich auf seine Besitzungen zurück zu ziehen, so soll er auch da seinen Ahnen Ehre machen. Alle Ermahnungen werden am Schluss noch einmal in einer sapphischen Ode zusammengefasst.

Im Jahre 1190 schloss sich Guido dem Kreuzzug des Königs Philipp August an, und schrieb auf demselben zwei Briefe an seine geliebten jungen Neffen (34. u. 35.), welche er auch in sein Geschichtswerk aufgenommen hat. Leider erzählt er hier ausserordentlich wenig Thatsachen und ergeht sich dafür in der Auskramung einer antiquarischen Gelehrsamkeit, von welcher ich glauben möchte, dass er sie erst nachträglich hineingebracht, oder doch erweitert hat; auf der Reise und ohne Bücher kann man sich kaum denken, dass er hierzu Zeit gefunden und alles im Gedächtniss gehabt hat.

Nach vielen Betheuerungen seiner Liebe, welche er selbst bei der Übernahme in seine Geschichte weggelassen hat, berichtet er, wie er mit Thränen vom schönen Frankreich Abschied genommen und sich dem Heer der Kreuzfahrer angeschlossen hat, mit dem er nach Burgund kam. Durch felsige Gebirge und anmuthige Weinberge, mit herzerfreuendem Getränk reichlich versehen, ziehen sie an der Cure aufwärts nach Vezelay, wo einst der vielgefeierte Herzog Gerard von Burgund den Leib der h. Magdalena bestattet hat. Von da kommen sie nach Lyon und zur Saone, der Grenze des Frankenreiches. Diese verliert ihren Namen im Rhône, der nun die beiden Reiche scheidet bis zum Meere. In Vienne erinnert er sich eben jenes Gerards, von dem er sagt, dass nach Hinkmar in seinen Briefen und dem Annalenschreiber Flodoard er gegen Karl den Kahlen die Stadt behauptet habe, was Unsinn ist. Die Heldengedichte (heroicae cantilenae) aber, sagt Guido, bezeugen, dass der König gesiegt habe, und die Frankengeschichte meldet, dass Karl den Boso mit der Hand der Tochter seines Neffen, des Kaisers Ludwigs II, zum König von ganz Gallien jenseits des Rhône eingesetzt habe, obgleich er ihn anfangs hasste als den Anstifter der Feindschaft zwischen ihm und Gerard — alles durchaus unrichtig. Boso's Königsgrab, sagt er, sieht man noch in der Hauptkirche zu Vienne, und auch die Kirche zu Valence hat er reich beschenkt. In Orange bewundern sie dann den herrlichen Palast, von dem man singe, dass die Tapferkeit des gottgeliebten Fürsten Wilhelm von Narbonne einst die afrikanischen Heiden hinausgeworfen habe. In Avignon gedenken sie der ehrwürdigen Frau Aja, welche einst die Herrin der Stadt gewesen. Arles würde gar schön sein, wenn es nicht von den Winden so sehr geplagt würde; desshalb soll auch Kaiser Constantin seine Absicht aufgegebenen haben, es zur Hauptstadt des ganzen Reichs zu machen, nachdem er Rom dem Pabst Silvester überlassen hatte. Er erwähnt die Alyscamps, welche er aber 'aridi campi' nennt, mit den Gräbern der Helden, welche dort in der Schlacht gegen die Feinde Christi gefallen sind. Von hier wallfahrten sie nach St. Gilles, welches zur Krone von Frankreich gehört, während die obere Provinz mit der Hauptstadt Arles und das Gebiet bis zu den Bergen von Genua zum Kaiserreich gehören. Von Arles ziehen sie dann über Fos nach Marseille. Hier vergeht noch längere Zeit mit den Vorbereitungen, bis sie endlich, nachdem der Wind günstig geworden, abfahren; vorher sendet er diesen Brief ab.

Der folgende Brief aus Akkon (35) enthält über das mittelländische Meer und seine Inseln nur antiquarische Gelehrsamkeit und Fabeln; eine kleine Stelle über den durch den Kampf zwischen

Heinrich VI und Tankred, und den Aufstand der Sarrazenen beunruhigten Zustand Siciliens hat Waitz schon mitgetheilt. Am 35. Tage erreichen sie endlich Akkon, wo sie den Waffenglanz des christlichen Belagerungsheeres erblicken, welches von der Landseite Saladin umschlossen hält, ein trefflicher Fürst, wenn er nicht ungläubig wäre. Die Christen sind in bedrängter Lage, denn wenn sie gegen die Stadt ausrücken, greift der aussen lagernde Feind sie an, und wenn sie sich gegen diesen wenden, macht die Besatzung der Stadt einen Ausfall. Wir — er spricht, als ob er selbst die Waffen führte, was ja nicht unmöglich ist — kämpfen mit Lanzen und Schwertern, die Gegner auf der Flucht mit Wurfspeeren und Pfeilen. Kaiser Friedrichs Sohn hat fast alle seine Leute verloren; theils sind sie im Kampf gefallen, theils der Sache überdrüssig nach Hause zurückgekehrt, theils endlich durch Krankheit zum Kampf untüchtig; nur mit wenigen Begleitern ist er selbst zu ihnen gestossen. Sehnsüchtig wurde der König von Frankreich erwartet, und nun erkrankt Guido am Fieber und fürchtet zu sterben, ehe er den Sieg der christlichen Waffen gesehen hat. Nur mit zitternden Händen hat er den Brief schreiben können. Doch fügt er noch ein längeres Gedicht mit brünstigem Gebet um Genesung hinzu, er möchte doch noch sehen, wie der unbezwingliche Philipp die Feinde niederwirft, und Frankreich alle Reiche überstrahlt, wie die Sonne die Sterne.

Endlich fügt er noch Verse und Rhythmen hinzu zur kirchlichen Feier des h. Märtyrers Lupentius, der, wie Gregor von Tours VI, 37 berichtet, zur Zeit der Königin Brunhilde grausam ermordet wurde. Nach einer abweichenden localen Überlieferung im Sprengel von Châlons, wo die That geschehen war, liess ihn Brunhilde selbst durch Rohdo und Augminus umbringen, und man feierte in Châlons am 22. Oct. sein Fest, bei dem aber die betreffenden Stücke fehlten, welche Guido ihnen jetzt sendet, natürlich der heimischen Überlieferung folgend.

Am Fieber ist er nicht gestorben, wie die grosse Mehrzahl der Kreuzfahrer nach seinem eigenen Bericht; wohl aber sah er durch die zwischen den Königen von England und Frankreich ausbrechenden Streitigkeiten alle seine kühnen Hoffnungen getäuscht: im Briefbuch findet sich aber nichts darüber. Dieses war hiermit abgeschlossen, denn der folgende (36.) Brief gehört schon einer späteren Zeit an.

Dieser ist wieder an seine Mutter gerichtet. Man hatte ihm Vorwürfe darüber gemacht, dass er sich nicht genug um Vermehrung seiner Einkünfte und um höhere Würden bemühe; er beantwortet deshalb die Fragen seiner Mutter nach der Höhe seiner Einkünfte und seinem 'status', doch ohne specielle Angaben. Warum er sich an

seiner Einnahme genügen lasse, das habe er schon im dritten Buch seiner Apologie gesagt, die er auf ihren Wunsch geschrieben habe. Seine Einkünfte seien mässig, aber für ihn genügend. Sein Haus ist nicht gross und prächtig, aber wohnlich und angenehm. Vom oberen Stock blickt er weit in die Stadt, und auf liebliche Wiesen, Gewässer und Weinberge. Unten aber sind seine Wohnräume, glänzend weisse Wände und buntgemalte Decken (laquearia). Aus den Fenstern blickt er auf seinen Garten und athmet den Wohlgeruch der Blumen, während schädlicher Luftzug durch die geschlossenen Glasfenster ausgeschlossen wird. Weiche Teppiche erfreuen das Herz und der Kamin führt den Rauch, den schlimmsten Feind der Augen, ab. Hier ertönt zu aller Zeit die Harmonie der Singvögel in ihren Käfichten (caveae). Hier ist aber auch die reiche Bibliothek, die Schätze der Philosophie und der heiligen Schriften, ihm vor allem theuer: andere Schätze begehrt er nicht. Was nun sein tägliches Leben betrifft, so beobachtet er, wie ihn die Meister in seiner Jugend gelehrt, die sieben Tagzeiten, welche er allegorisch deutet, aber mitten in dieser Betrachtung ist das Blatt zu Ende, und die folgenden fehlen.

Es folgt noch ein unvollendetes Duplicat der Kreuzzugsbriefe, dann das letzte Stück (37), welches man kaum als Brief bezeichnen kann. Er beschreibt darin seinen 'hortus deliciarum', der aber ein rein allegorischer ist. Das Stück scheint unvollständig zu sein, aber die letzte Seite ist leer geblieben.

In jenem oben geschilderten Studium, in behaglicher Musse, wird also Guido sein Briefbuch ausgearbeitet haben, welches er förmlich herausgab. In seinem Geschichtsbuch sagt er von den Kreuzzugsbriefen, dass er sie schon vor längerer Zeit in seinem Briefbuche (in nostro jam pridem epistolari libro) mitgetheilt habe. Auch Albrich kannte das Buch und bezeichnete es als 'volumen satis rhetoricum epistolarum diversarum'. Ob das nun ein Lob oder ein Tadel sein soll, lässt sich nicht mit Sicherheit entscheiden.

Nur die Form dieser Briefe und die vielen moralisch-theologischen Betrachtungen in denselben können Guido wichtig und mustergültig genug erschienen sein, um sie einem grösseren Leserkreise nicht vorzuenthalten; er wird Concepte derselben zurückbehalten haben, und es ist sehr wahrscheinlich, dass er sie jetzt noch einmal überarbeitete.

Vermuthlich ist uns das Original erhalten, obgleich auf den ersten Blick die Schrift etwas jünger erscheint. Indessen findet sich noch kein einfaches i mit dem Strich bezeichnet, nur wo die Berührung mit einem zweiten i oder mit u und m oder n die Gefahr eines Irrthums befürchten liess. Zwar herrscht schon durchgängig das einfache e anstatt des in romanischen Landen früh verschwun-

denen Diphthonges, doch fand ich einmal noch das geschwänzte e. Noch ist ti gewöhnlich, ci selten. Häufig ist noch die alte Interpunction des Punktes mit dem Strich darüber. Wichtiger aber ist die ganze Anlage: es ist durchaus keine gleichmässig gemachte Abschrift, sondern von verschiedenen Händen gemachte Copien, welche meistens sorgfältig durchcorrigirt sind, und zwar an einigen Stellen so, dass kaum eine andere Hand, als die des Verfassers, angenommen werden kann. Ferner ist jene Beziehung auf den Schwanenritter, und sind in der Rede über den Kirchenstreit in Châlons einige Eigennamen mit der alten Dinte dick überstrichen, wozu doch schwerlich ein Anderer Veranlassung gehabt hätte. Mehrere Briefe sind doppelt vorhanden, was bei einer einfachen Abschrift schwer zu erklären wäre, und auch die Hinzufügung der letzten Stücke spricht dafür, dass die Handschrift sich im Besitze des Verfassers befand. Der Verlust mehrerer Blätter, die Versetzung anderer, lassen vermuthen, dass nach seinem Tode das noch ungebundene Manuscript eine Zeit lang verwahrlost blieb.

Guido scheint von den Pflichten seiner Cantorei wenig in Anspruch genommen zu sein; er widmete sich ganz der süssen litterarischen Musse, ohne weiteren Ehrgeiz. Das missfiel aber seinen Kollegen und Verwandten; er sollte mehr auf Vermehrung seines Besitzes und Verbesserung seiner Pfründe bedacht sein. Das kam auch seiner Mutter zu Ohren, welche schon recht bejahrt gewesen sein muss, und auf ihren Wunsch schrieb er, wie oben erwähnt, die drei Bücher seiner Apologie 'contra maledicos'. Sie bilden den Anfang der uns erhaltenen Handschrift, und sind nach der Angabe des Grafen Riant nicht von grossem Umfang, enthalten aber viel für Sittengeschichte werthvolles. Indem er darin die Gründe für seinen Mangel an Ehrgeiz und seine Vorliebe für litterarische Beschäftigung darlegt, lässt er nun als Beweis dafür und als Zeichen, dass seine Musse nicht unfruchtbar sei, die weiteren Bücher folgen. Das vierte Buch ist der 'Libellus de regionibus mundi', eine geographische Übersicht, welche den damaligen Stand der geographischen Kenntnisse übersehen lässt. Dann folgt der 'Liber diversarum historiarum', von ihm auch in barbarischer Form als Cronosgraphie bezeichnet, eine Weltchronik in acht Büchern bis auf den Tod des Königs Richard von England. Im Anfang eine werthlose Compilation aus bekannten Quellen, gewinnt sie doch weiterhin einigen Werth, obgleich auch entstellt durch den aus den Briefen bekannten Schwulst. Bis jetzt kennt man ausser den wenigen von Waitz mitgetheilten Excerpten nur die Auszüge bei Albrich, welcher das Übermaass der dem Grafen Heinrich von Champagne gespendeten Lobsprüche tadelt.

Albrich kannte dasselbe Werk in zwölf Büchern und gibt zum Jahre 1203 kurz den Inhalt desselben an, wobei er auch noch des Briefbuches gedenkt. Denn in diesem Jahre, sagt er, starb Guido, der Cantor bei St. Stephan zu Châlons, der Bruder des Edelmannes Nicolaus von Bazoches und des Abtes Milo von St. Médard zu Soissons, und weil er in diesem Jahre gestorben ist, und diese Bücher geschrieben hat, so habe ich das hier anmerken wollen, damit man wisse, wer er gewesen ist.

Ausserdem finden sich wohl einige Spureu von Abschriften seines Geschichtswerkes und Auszüge daraus, aber nicht von einer litterarischen Fortwirkung.

Ausgegeben am 20. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



1890.
X.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

20. Februar. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

Hr. Diels las über eine pythagoräische Fälschung.
Die Abhandlung wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Die Wahl des ordentlichen Professors in der philosophischen Facultät der Friedrich-Wilhelms-Universität hierselbst, Directors des botanischen Gartens und Museums, Hrn. Dr. Adolph Engler, zum ordentlichen Mitglied der Akademie in ihrer physikalisch-mathematischen Classe, ist durch Allerhöchsten Erlass vom 29. Januar d. Js. bestätigt worden.



Dissociationsversuche.

Von A. W. von Hofmann.

(Vorgetragen am 6. Februar [s. oben S. 121].)

Dissociation der Kohlensäure.

Ausgangspunkt der im Folgenden beschriebenen Versuche ist eine Beobachtung gewesen, welche der Verfasser in Gemeinschaft mit seinem verstorbenen Freunde Heinrich Buff vor vielen Jahren gemacht hat. In einer Abhandlung[1]: »Zerlegung gasförmiger Verbindungen durch elektrisches Glühen« bemerken wir über die Kohlensäure folgendes:

»Die unvollkommene Spaltung der Kohlensäure in Kohlenoxyd und Sauerstoff unter dem Einflusse der Elektricität ist von W. Henry und von Dalton beobachtet worden. Sie lässt sich sehr leicht durch den Funkenstrom der Inductionsmaschine zeigen. Der Strom schlägt mit violettem Lichte durch die Kohlensäure. Im Anfang ist die Volumvermehrung sehr auffallend; 30^{cc} Kohlensäure hatten sich schon nach einigen Minuten bis auf 35^{cc} ausgedehnt, dann aber erfolgte die weitere Zersetzung sehr langsam, bis nach etwa einer halben Stunde das angesammelte Kohlenoxyd mit dem frei gewordenen Sauerstoff explodirte und sich das wiederhergestellte Kohlensäurevolum von Neuem zu zersetzen begann. Leider findet diese interessante Zersetzung und Wiederbildung der Kohlensäure zu langsam statt, um sich für einen Demonstrationsversuch zu eignen.«

Die Zerlegung der Kohlensäure durch den Funkenstrom des Inductionsapparates ist seitdem mehrfach studirt worden, so von Deville[2], gelegentlich seiner schönen Arbeit über die Dissociation, und später von Berthelot[3] im Laufe seiner umfassenden Untersuchungen über denselben Gegenstand, allein ich finde in der Literatur nicht, dass der Versuch mit demselben Ergebnisse, welches wir beobachtet haben, wiederholt worden ist.

[1] Buff und Hofmann, Lieb. Ann. CXIII. 129. (1860.)
[2] Deville, Compt. Rend. LX. 317. (1865).
[3] Berthelot, Bull. Soc. chim. XIII 1. 90. (1870).

Deville beobachtete, dass sich bei 72 stündigem Durchschlagen des Funkens die Kohlensäure bis zu 28 Volumprocenten dissociirt hatte.

Berthelot erhielt bei Anwendung sehr kurzer und schwacher Funken folgende Zahlen:

Dauer des Versuches in Minuten	Volumprocente an Dissociationsgasen
15	6
35	13.5
60	29
82	2

»Diese Zahlen«, sagt Berthelot, »lassen die progressive Zerlegung der Kohlensäure und die darauf folgende Rückbildung derselben erkennen. Nach Buff und Hofmann soll diese Rückbildung unter Explosion stattfinden. Ich habe diese Erscheinung nie beobachtet, aber ich glaube, dass sie mit noch schwächeren Funken, als diejenigen, welche in den beschriebenen Versuchen angewendet wurden, wohl eintreten kann, insofern die Zahl 29 der Grenze der explosiven Verbrennung von Kohlenoxyd und Sauerstoff in Gegenwart von Kohlensäure sehr nahe liegt«.

Berthelot theilt in der That gleichzeitig Versuche mit, nach denen der Funke in einer Kohlensäure-Atmosphaere, welche 35—40 Procent einer Mischung von 2 Vol. Kohlenoxyd und 1 Vol. Sauerstoff enthält, explosive Verbrennung hervorruft.

Neuerdings ist mir auch von Anderen privatim mitgetheilt worden, dass es ihnen nicht gelungen sei, die alternirende Zerlegung und Rückbildung der Kohlensäure durch den elektrischen Funkenstrom zu bewerkstelligen. Ich habe daher geglaubt, diese Untersuchung wieder aufnehmen zu sollen, um die Bedingungen, unter denen die früher beobachtete Erscheinung eintritt, schärfer zu praecisiren.

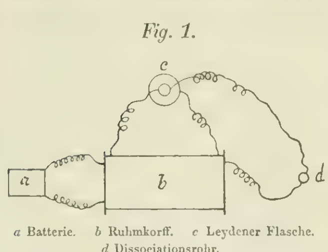
Bei einer Wiederholung des Versuchs hat sich nun allerdings sofort herausgestellt, dass derselbe keineswegs so leicht ausführbar ist, wie man nach unseren oben citirten Angaben erwarten sollte. Und dies kann nicht befremden, wenn man bedenkt, dass hier derselbe Funke nach einander zwei ganz verschiedene und zwar entgegengesetzte Wirkungen auszuüben hat, nämlich die Spaltung einer Verbindung und die Wiedervereinigung der Spaltungsproducte zu der ursprünglichen Verbindung. Es ist daher auch wohl nur einem glücklichen Zufalle zuzuschreiben, dass sich in unseren früheren Versuchen sofort die Bedingungen vereinigt hatten, welche erforderlich sind, um die Doppelerscheinung hervorzurufen. Dieser glückliche Zufall hat aber die unliebsame Folge gehabt, dass wir damals keine Veranlassung fanden, auf

die Verhältnisse, unter denen wir experimentirten, näher einzugehen, so dass es mir nunmehr oblag, dieselben wieder aufzufinden. Es ist dies, wie aus dem Folgenden erhellt, nicht ganz mühelos gewesen. Für das Gelingen des Versuches ist es nöthig, eine ganze Reihe nicht eben leicht erfüllbarer Bedingungen einzuhalten. Ist dies aber geschehen, so tritt auch die Erscheinung der alternirenden Zerlegung und Rückbildung genau so wieder auf, wie wir sie beschrieben haben, oft aber weit schneller, als dies bei den früheren Versuchen der Fall gewesen war.

Da der Ruhmkorff des chemischen Laboratoriums, ein Apparat von mittlerer Grösse (30^{cm} Länge und 10^{cm} Durchmesser der Rolle), welcher mir zur Verfügung steht, nicht sofort zum Ziele führte, so haben meine verehrten Freunde Hr. Dr. Werner von Siemens und Hr. Prof. Kundt die Güte gehabt, mich sämmtliche in ihrem Besitze befindliche Inductionsapparate durchprobiren zu lassen. Meine Hoffnung, die früher beobachteten Erscheinungen wieder hervorzurufen, hat sich aber nicht sofort verwirklicht. Der gewonnene Funke zerlegte zwar die Kohlensäure, bewirkte aber in den meisten Fällen auch alsbald wieder deren Rückbildung aus den Zerlegungsproducten, so dass es zu einer Verpuffung nicht kommen konnte.

Es blieb also nichts anderes übrig, als zu experimentiren, um durch Verstellung der Funkendrähte, durch Veränderung der den Ruhmkorff speisenden Batterie u. s. w. den Funken in geeigneter Weise zu modificiren.

Im Verlaufe dieser Versuche, bei deren Ausführung mir die reiche Erfahrung der genannten Freunde jeder Zeit belehrend zur Seite stand, wurde unter Anderem auch eine kleine Leydener Flasche in den Stromlauf eingeschaltet, wie dies in der beigefügten Zeichnung (Fig. 1) angedeutet ist. Nach dieser Einschaltung zeigte sich die Erscheinung genau, wie wir sie in unserer Abhandlung beschrieben haben.



a Batterie. *b* Ruhmkorff. *c* Leydener Flasche. *d* Dissociationsrohr.

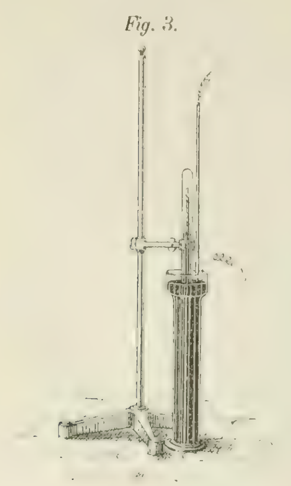
Bei den mit Prof. Buff gemeinschaftlich angestellten Versuchen war, soweit ich mich erinnern kann, eine Leydener Flasche nicht in Anwendung gekommen, die Erscheinung wird also auch ohne dieselbe hervorgerufen werden können; indessen habe ich mich, einmal im Besitze dieses einfachen Hülfsmittels, nicht mehr dabei aufgehalten, die ohne die Flasche erforderlichen Bedingungen aufzusuchen, zumal auch unter Mitwirkung derselben der Erfolg immer noch von

mancherlei Umständen abhängt, die nicht unberücksichtigt bleiben dürfen.

Von wesentlicher Bedeutung ist vor Allem die Entfernung der Platindrähte, zwischen denen der Funke durch die Kohlensäure überspringt. Bedient man sich der Eudiometer mit eingeschmolzenen Funkendrähten, so kann man in die Lage kommen, ein halbes Dutzend Apparate anzuwenden, ohne die Erscheinung eintreten zu sehen. Ich bin deshalb auch wieder zu der einfachen Vorrichtung mit verschiebbaren Funkendrähten zurückgekehrt, welche bei den früheren Versuchen gedient hatte. Es ist dies eine dünne, U-förmig gebogene Glasröhre, in deren kürzeren oben geschlossenen Schenkel man einen mässig feinen, einige Centimeter langen Platindraht so eingeschmolzen hat, dass sein äusseres Ende nur wenig hervorragt. Ein zweiter Platindraht ist mit einer Schlinge in einer Entfernung von einigen Millimetern von der Spitze des anderen auf der Schenkelröhre befestigt, und sodann ausserhalb beinahe bis zum Buge um die Röhre gewickelt (Fig. 2). Die Röhre ist mit Quecksilber gefüllt und der kurze Schenkel derselben lässt sich in einer Cylinderwanne mit Leichtigkeit in das Glasrohr, welches das zu dissociirende Gas enthält, einbringen. Der Stromschluss wird bewerkstelligt, indem man den einen Pol in das Quecksilber der Wanne, den anderen in den offenen Schenkel der U-Röhre einführt. Die Anordnung des Apparates ist im Übrigen aus Fig. 3 ersichtlich.

Fig. 2.

Fig. 3.



Bei Anwendung der kleinen U-Röhre lässt sich die Entfernung der Funkendrähte beliebig ändern, — für die im Folgenden näher bezeichneten Versuchsbedingungen wurde ein Abstand von $2\frac{1}{2}$—3^{mm} geeignet befunden; — auch bietet sie den Vortheil, dass man den Funken an jeder beliebigen Stelle der Gassäule überspringen lassen kann; es ist in der That nicht ganz gleichgültig, wo dies geschieht. Am besten schienen die Versuche zu gelingen, wenn der Funke in etwa $\frac{1}{4}$ der Höhe der abgesperrten Gassäule über dem Quecksilberspiegel überging. Endlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass sich die Ein-

richtung auch aus ökonomischen Gründen empfiehlt, da die Eudiometer mit eingeschmolzenen Drähten bei dem langen Durchschlagen des Funkens nur allzuhäufig an den Einschmelzstellen springen.

Eine zweite Bedingung ist die geeignete Speisung des Ruhmkorff's. Für den oben näher bezeichneten Apparat sind zwei Bunsen'sche Elemente von mittlerer Grösse (145^mm^ Höhe, 55^mm^ lichte Weite des Thoncylinders) gerade genügend; nimmt man nur ein Element, so wird hierdurch die Erscheinung wesentlich verzögert, bei Anwendung von drei und vier Elementen konnte sie bei geringen Gasmengen häufig nicht mehr beobachtet werden.

Was endlich das Volum der zu dissociirenden Kohlensäure anlangt, so sollte man sich innerhalb verhältnissmässig enger Grenzen halten. Je grösser das Gasvolum ist, um so länger die Zeit zwischen zwei Verpuffungen. Besonders gut gelangen die Versuche bei Anwendung von 6—10^cc^ unter einem Druck von 650—700^mm^. Noch darf nicht unerwähnt bleiben, dass die Kohlensäure stets schwefelsäuretrocken verwendet ward. Gegenwart von Feuchtigkeit beeinträchtigt das Gelingen des Versuches.

Arbeitet man, soweit als möglich, unter den vorstehend angegebenen Bedingungen, so erfolgt die erste Verpuffung nach 15—20, seltener schon nach 8—10 Minuten, die zweite aber schon nach 12—16, seltener nach 6—8 Minuten, und in diesem Tempo setzt sich der Versuch dann einige Zeit lang fort. Unter ganz besonders günstigen Verhältnissen, die man aber nicht in der Hand hat, ist die erste Verpuffung schon nach 4—5 Minuten, die zweite nach 2—3 Minuten beobachtet worden. Die Flamme geht von den Funkendrähten aus und durchzieht mehr oder weniger langsam das ganze Gasvolum; bei der ersten Verpuffung mit bläulichem, bei den ferneren in Folge des in dem Raume bereits verbreiteten Quecksilberdampfes mit grünlichem Lichtschein. Die Ursache, weshalb die Zeit zwischen den späteren Explosionen eine kürzere ist, als die, welche der ersten vorhergeht, ist die, dass die dissociirten Gase bei der unter diesen Umständen erfolgenden Verpuffung nicht wieder vollständig zusammentreten. Lässt man nach einer Verpuffung die Kohlensäure durch Kalilauge absorbiren, so bleibt stets eine kleine Menge brennbaren Gases zurück.

In dieser Weise ausgeführt, gestaltet sich der Versuch zu einem ebenso überraschenden, wie belehrenden, welcher das Wesen der Dissociationserscheinungen in erwünschter Weise zur Anschauung bringt.

Ich habe im Vorstehenden die Bedingungen, unter denen sich die Kohlensäure unter dem Einflusse des Funkenstroms dissociirt und wiederum zurückbildet, etwas eingehender behandelt, als dies bei Beschreibung von Versuchen zu geschehen pflegt. Diese Umständ-

lichkeit schien aber angezeigt, weil der Factoren so viele sind, deren Zusammenwirkung erforderlich ist, und weil zu diesen Factoren zumal zwei zählen, über die man nicht mit Sicherheit gebietet, nämlich die Beschaffenheit des Ruhmkorff's und die Elektricitätsquelle. Zwei Ruhmkorff's von derselben Grösse und aus derselben Werkstätte stammend, zeigten sich bei derselben Speisung gleichwohl von ganz verschiedener Wirkung. Ebenso können die Ergebnisse durch die allmähliche Abnahme der Stromstärke sehr wesentlich beeinträchtigt werden. Es ist daher empfehlenswerth, stets einige Vorversuche anzustellen, um empirisch festzustellen, ob in einem gegebenen Falle Ruhmkorff und Batterie geeignet functioniren. Gelegentlich und zumal wenn man reichliche Elektricitätsquellen, z. B. Accumulatoren in Anwendung bringt, zeigt sich, dass die Dissociation ungemein leicht von Statten geht, dass aber die Wiedervereinigung der Gase fast ebenso schnell wieder eintritt, was man an dem fortwährenden Schwanken der Quecksilbersäule, welche durch die rasch aufeinander folgenden kleinen Explosionen bedingt wird, sofort erkennt. Durch Verschiebung der Funkendrähte, durch Veränderung der Schlagweite des Ruhmkorff's, durch Modification der Batterie wird man diese und ähnliche Schwierigkeiten, auf welche man bei Ausführung der Versuche gelegentlich stösst, unschwer beseitigen.

Handelt es sich nur darum, den Zerfall der Kohlensäure zu zeigen, so kann dies auf die Weise geschehen, dass man einen mässigen Strom Kohlensäure durch ein an beiden Enden offenes Glasrohr streichen lässt, in dessen Mitte einander gegenüber Platindrähte eingeschmolzen sind, zwischen denen man nunmehr einen kräftigen Funkenstrom überspringen lässt. Das aus der Röhre austretende Gas wird in einem Cylinder über Kalilauge aufgesammelt; ganz vortrefflich eignet sich hierzu der Schiff'sche Sammelapparat bei der Dumas'schen Stickstoffbestimmung. In wenigen Minuten hat sich ein durch das Alkali nicht mehr absorbirbares kleines Gasvolum angesammelt, welches man aus dem Hahn des Apparates austreten lassen und an der Spitze desselben entzünden kann. In dieser Form ist der Versuch zumal auch für die Zwecke der Demonstration besonders zu empfehlen. Hat man den Funkenstrom längere Zeit, — etwa eine Viertelstunde — im Gang gelassen, so ist das über der Kalilauge angesammelte Gasvolum ein so erhebliches, dass es sich nicht mehr empfiehlt, dasselbe bei seinem Austritt aus dem Hahn direct zu entzünden; man führt es durch eine kleine, mit Quecksilber gefüllte S-Röhre, welche man mittelst eines Kautschukschlauchs an dem Hahn befestigt, in ein Eudiometer über, in welchem man es ohne Weiteres verpuffen kann.

Bei diesen Versuchen ist die Mitwirkung der Leydener Flasche

begreiflich, nicht unbedingt erforderlich. Die Dissociation wird aber doch mit Hülfe derselben wesentlich beschleunigt. Bei Anwendung des oben (S. 185) näher bezeichneten Ruhmkorff's, welcher durch zwei Bunsen'sche Elemente gespeist wurde, erhielt man in 10 Minuten ohne Mitwirkung der Flasche $4^{cc}.5$, unter Mitwirkung derselben 12^{cc} (auf 0° und $0^{m}.76$ berechnet) dissociirten Gases. Bei Versuchen mit einem dem Kaiserlichen Gesundheitsamt gehörigen kolossalen Ruhmkorff (Länge der Rolle 55^{cm}, Durchmesser 20^{cm}), dessen Benutzung ich der Güte des Hrn. Director Köhler verdanke, wurde bei einer Schlagweite von 2^{cm} (ohne Leydener Flasche) in 10 Minuten 16—17^{cc} Dissociationsgas erhalten.

Bei der Verpuffung der aus der Kohlensäure erhaltenen Dissociationsgase bleibt immer eine kleine Menge nicht brennbaren Gases zurück; dies ist nichts anderes als Luft, von der Kohlensäure herrührend, welche man durch das Rohr geleitet hat. Wer sich mit derartigen Versuchen beschäftigt hat, weiss in der That, welche Noth man hat, luftfreie Kohlensäure zu beschaffen. Aus einem mit ausgekochtem Marmor und zum Sieden erhitzter verdünnter Salzsäure beschickten Kipp'schen Apparat hatte man einen ganzen Tag lang Kohlensäure ausströmen lassen; das Gas schien luftfrei, als man aber alsdann eine grössere Menge desselben durch Kalilauge streichen liess, zeigten sich gleichwohl immer noch einige Luftblasen. Bei mässigem Strome wurden in der Stunde etwa $0^{cc}.5$ Luft erhalten. Wesentlich bessere Resultate liefert der von Robert Müncke[1] umgestaltete, aber etwas complicirt gewordene Kipp'sche Apparat; absolut luftfreie Kohlensäure konnte aber auch mit diesem nicht erhalten werden. Weit weniger günstige Ergebnisse wurden beobachtet, als man einen mit flüssiger Kohlensäure gefüllten Cylinder als Kohlensäurequelle benutzte. Selbst nachdem man das Gas stundenlang und mit Heftigkeit hatte ausströmen lassen, war die Kohlensäure nicht absolut luftfrei geworden.

Im Anschluss an die vorstehend beschriebenen Versuche ist auch die Wirkung einer glühenden Platinspirale auf die Kohlensäure studirt worden. Dass die Kohlensäure durch glühendes Eisen in Kohlenoxyd verwandelt wird, ist bekannt. Wir haben aber, Prof. Buff und ich,[2] gezeigt, dass die Reduction der Kohlensäure selbst durch elektrisch bis zum Schmelzen erhitztes Eisen nur mit der allergrössten Schwierigkeit von Statten geht. Versuche, die Kohlensäure durch eine Platinspirale, deren Temperatur bis nahe zur Weissgluth gesteigert worden war, zu zerlegen, sind ohne Erfolg geblieben. Als die Spirale in

---

[1] Rob. Müncke. Dingl. J. 1884. 497.

[2] Buff und Hofmann, Lieb. Ann. CXIII. 140.

einem über Quecksilber abgesperrten Kohlensäurevolum glühte, gerieth das Quecksilber in eine regelmässige oscillirende Bewegung, offenbar von rasch auf einander folgender partialer Zerlegung und Rückbildung hervorgerufen. Allein nach Absorption der Kohlensäure durch Kalilauge blieb nur ein ganz minimaler Gasrückstand, der sich nicht entzünden liess, mithin aus Luft bestand. Auch beim Durchleiten eines Kohlensäurestroms durch eine Röhre, in welcher eine Platinspirale glühte, konnte Zerlegung nicht beobachtet werden.

Dissociation des Wasserdampfs.

Nachdem die vorstehend mitgetheilten Beobachtungen die Bedingungen näher festgestellt hatten, unter denen sich die alternirende Zerlegung und Rückbildung der Kohlensäure bewerkstelligen lässt, lag es nahe, zu versuchen, ob sich bei dem Wasserdampfe ähnliche Erscheinungen würden beobachten lassen.

Die schönen Versuche, durch welche Henry Ste. Claire-Deville die Dissociation des Wassers nachgewiesen hat, sind bekannt. Aus Wasserdampf, welchen er durch ein glühendes, unglasirtes Thonrohr leitete, diffundirte mehr Wasserstoff als Sauerstoff und liess sich gesondert aufsammeln. Oder es wurde ein rascher Strom von Wasserdampf, mit einem indifferenten Gase gemischt, durch ein glühendes Rohr getrieben, in welchem Falle die durch Dissociation getrennten Elemente des Wassers, theilweise wenigstens an der Wiedervereinigung behindert, in dem austretenden indifferenten Gase nachgewiesen werden konnten. Noch ein anderer schöner Versuch Deville's bestand darin, dass er in der Axe eines Porcellanrohrs eine Metallröhre anordnete, durch welche ein Strom kalten Wassers floss, während das Porcellanrohr zum Glühen erhitzt wurde. Indem er nun durch den zwischen beiden Röhren gebildeten Raum Wasserdampf streichen liess, dissociirte sich das Wasser an dem rothglühenden Rohr und ein Theil der getrennten Gase, in Berührung mit der kalten Wasserröhre schnell abgekühlt und so gehindert, sich wieder in Wasser zurückzuverwandeln, konnte in dem ausgetretenen Wasserdampf ohne Schwierigkeit erkannt werden.

Alle diese geistreich ausgedachten Versuche lehren überzeugend die Spaltung des Wassermolecüls bei hoher Temperatur in seine Elementar-Bestandtheile und haben für die Klarlegung der Dissociationserscheinungen die dankeswerthesten Dienste geleistet. Allein diese Versuche sind nicht ganz leicht auszuführen, sie bedürfen umständlicher Vorbereitungen und nehmen einen nicht unerheblichen Zeitauf-

wand in Anspruch; auch hat sich keiner derselben als Demonstrationsversuch eingebürgert. Viel leichter lässt sich die Dissociation des Wasserdampfs durch den Funkenstrom des Inductionsapparates zur Anschauung bringen. Dass sich der Wasserdampf mit Hülfe des Ruhmkorff'schen Funkens zerlegen lässt, ist von Berthelot[1] gelegentlich seiner umfassenden Untersuchungen bereits nachgewiesen worden.

Im Anschlusse an die Versuche über die Kohlensäure habe ich auch wiederholt mit dem Wasserdampfe experimentirt. Die Dissociation desselben lässt sich mit den einfachsten Hülfsmitteln hervorrufen.

Ein mit Funkendrähten versehenes Glasrohr von etwa 30^{cm} Länge und 8^{mm} Weite wird unter möglichstem Ausschluss der Luft mit Quecksilber gefüllt, auf dessen Oberfläche man einen Tropfen Wasser bringt. Das Rohr wird alsdann in einer Quecksilberwanne umgestülpt und mit einem Glasmantel umgeben. Leitet man nun durch den zwischen Rohr und Mantel verbliebenen Raum aus einem Dampfkessel Wasserdampf, so wird nach wenigen Augenblicken das Quecksilber herabgedrückt, indem sich über demselben ein Wasserdampfvolum von 100° und je nach der Länge der aufgestaut gebliebenen Quecksilbersäule von mehr oder weniger vermindertem Atmosphaerendruck bildet. Nun lässt man den Funkenstrom eines von 3 Bunsen'schen Elementen gespeisten Ruhmkorff's mit eingeschalteter Leydener Flasche durch den Dampf hindurchschlagen, wobei eine schön violette Lichtentwickelung beobachtet wird. In 10—12 Minuten ist der Versuch beendet. Unterbricht man nunmehr sowohl den Funkenstrom, als auch den durch den Mantel gehenden Dampfstrom, und lässt den Apparat erkalten, so füllt sich das Rohr nicht wieder ganz mit Quecksilber; über demselben bleibt vielmehr ein erhebliches Volum farblos durchsichtigen Gases. 100^{cc} Wassergas liefern in 10 Minuten $1^{cc}.5$—$1^{cc}.8$ (bei 0° und unter $0^{m}.76$ Druck). Das zurückbleibende Gas giebt sich sofort als Knallgas zu erkennen, wenn man einen Funken durch dasselbe hindurchschlagen lässt; es verschwindet mit einer gelinden Explosion, indem sich wieder Wasser bildet. Der Versuch kann alsbald von Neuem angestellt werden.

Bei diesem Versuche wurde eine Beobachtung gemacht, welche auf den ersten Blick, — aber auch nur auf den ersten Blick — befremdlich erschien. Trotz der nicht unerheblichen Menge Knallgas, welche sich bildete, zeigte das Wassergasvolum bei dem Hindurchschlagen der Funken keine Vergrösserung, und doch mussten aus 2 Vol. Wasserdampf 2 Vol. Wasserstoff und 1 Vol. Sauerstoff = 3 Vol. Knall-

[1] Berthelot a. a. O. vergl. S. 183.

gas entstehen. Warum beobachtete man keine Vermehrung des Gasvolums?

Der Grund ist einfach dieser. Bei dem enormen Volumen Wasserdampf, welches aus dem flüssigen Wasser entsteht — 1 Vol. Wasser liefert bekanntlich 1696 Vol. Dampf —, kann es nicht auffallen, dass die in das Rohr eingebrachte Wassermenge, selbst wenn man sie auf ein Minimum beschränkt hat, für die Erfüllung des auf 100° erhitzten Theils des Rohres in der Regel nicht vollständig verbraucht wird. In der That beobachtet man, dass das Quecksilber genau bis an die Stelle, an welcher der Dampfmantel beginnt, herabgedrückt wird, und dass sich auf der Oberfläche des Metalls stets eine dünne, oft kaum bemerkbare Wasserschicht angesammelt hat. Man begreift, dass, wenn das in dem Rohr gebildete Wasserdampf-Volum durch die Entwickelung von Wasserstoff und Sauerstoff vermehrt wird, das Quecksilber also unter die tiefste noch von dem Dampfstrom umspülte Stelle herabsinkt, eine Condensation von Wasser erfolgt, wodurch das ursprüngliche Gasvolum wiederhergestellt werden muss.

Eine andere Erscheinung, für die man aber nach den Erfahrungen mit der Kohlensäure vorbereitet war, zeigt sich nach der Explosion des Knallgases: es bleibt eine minimale Quantität Gas. Die Untersuchung hat gezeigt, dass dies Gas nichts anderes als Luft ist, welche, wie sorgfältig man das Rohr mit Quecksilber gefüllt habe, zwischen Glaswand und Metall stets haften bleibt. Je mehr man bemüht gewesen ist, die Luft bei der Füllung des Rohrs auszuschliessen, desto kleiner erscheint die nach der Verpuffung zurückbleibende Gasblase.

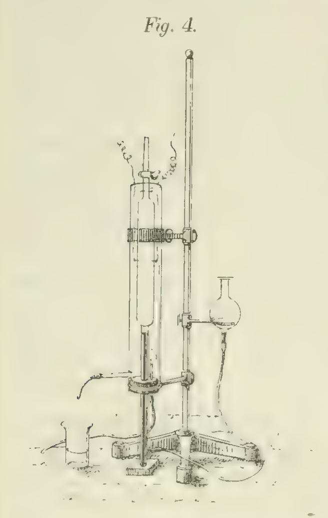
Mit diesem einfachen Apparat lässt sich noch ein Versuch anstellen, welcher für das Wesen der Dissociationserscheinungen recht charakteristisch ist. Hat man das Wassergasvolum, wie oben angegeben ist, durch den Funkenstrom dissociirt und lässt nunmehr den Apparat erkalten, ohne aber den Funkenstrom zu unterbrechen, so steigt das Quecksilber langsam wieder, bis die Röhre erfüllt ist; es könnte scheinen, als sei gar kein Knallgas gebildet worden. Die beiden Gase haben sich allmählich — ohne Explosion — wieder mit einander vereinigt. Indem sich das Dampfvolum bei der Abkühlung stetig verringert, wächst das Volum der Dissociationsgase in jedem Augenblick über das maximale Verhältniss hinaus, in welchem es sich dem Wasserdampf gegenüber halten kann; der jeweilige Überschuss wird daher durch den andauernden Funken in Wasser zurückverwandelt, ohne dass es zu einer Explosion kommen kann.

Ich habe die Dissociation des Wasserdampfes unter sehr verschiedenen Umständen und namentlich unter sehr verschiedenem Druck bewerkstelligt, aber niemals eine ähnliche alternirende Zerlegung und

Rückbildung beobachtet, wie sie bei der Kohlensäure auftritt. Der Versuch wurde sowohl in Eudiometern mit eingeschmolzenen Funkendrähten, als auch unter Zuhülfenahme der U-Röhre mit verstellbaren Funkendrähten ausgeführt, ohne dass jemals eine explosive Rückbildung des Wassers stattgefunden hätte. Dies kann aber auch, angesichts der geringen Menge Wasserdampf, welche dissociirt wird, nicht befremden. Berthelot[1] beobachtete, dass sich in 10 Minuten 1.5—1.9 Volumprocente dissociirten Gases bildeten, je nachdem er kleinere oder grössere Funken in Anwendung brachte. Mit diesen Zahlen stimmt das Ergebniss meiner Versuche (vergl. S. 191) nahezu überein. Über die Menge Wasserdampf, welche die Explosion des Knallgases verhindert, finde ich keine Angaben, aber man weiss aus Bunsen's[2] Versuchen, dass in einer Mischung von Knallgas und Kohlensäure eine Explosion schon nicht mehr stattfindet, wenn der Gehalt an Knallgas unter 25 Volumprocente herabsinkt.

Will man die Dissociation des Wasserdampfs durch den Funkenstrom für den Zweck der Demonstration verwerthen, so gestaltet sich der Versuch eleganter, wenn man statt des einfachen Glasrohrs, wie es oben beschrieben worden ist, eine etwas andere Form wählt. An eine $2^1/_2$ cm weite und etwa 20 cm lange Glasröhre, welche in der Mitte Funkendrähte trägt, ist am oberen Ende eine andere engere von 1 cm Weite und 5—6 cm Länge angeschmolzen, welche oben mit einem Glashahn geschlossen und gleichfalls mit Funkendrähten versehen ist (Fig. 4). Am unteren Ende ist ebenfalls eine Röhre von 1 cm Durchmesser, aber von 40 cm Länge angebracht, welche unten geschlossen ist. Etwa 4 cm über dem Schlusse ist eine seitliche Röhre angesetzt, an welche ein in Leinewand eingenähter, am Ende eine Glasbirne tragender Kautschukschlauch befestigt ist. Die sogestaltete Röhre wird nun mit feuchtem Quecksilber gefüllt und bis nahe an das Ansatzrohr mit Hülfe eines Glasmantels, durch welchen Wasserdampf strömt, auf 100° erhitzt. Alsbald bildet sich Wasserdampf, indem das Quecksilber in den Schlauch

Fig. 4.



[1] Berthelot, Bull. Soc. chim. XIII. 104.

[2] Bunsen, Gasometrische Methoden 260.

und die Birne tritt. Durch Heben und Senken der Birne ist man im Stande, bei sehr verschiedenem Druck zu arbeiten. Hat man Sorge getragen, nicht zu viel Wasser in den Apparat einzubringen, so wird man bei dem grösserem Volum desselben und der Möglichkeit den Druck zu verändern, leicht alles Wasser in Dampf verwandeln und das Dampfvolum überdies so reguliren können, dass sich das Quecksilber in dem unteren engeren Theil der Röhre einstellt. Setzt man nunmehr den Funkenstrom in Gang, so lässt sich auch die durch Dissociation bedingte Ausdehnung des Gasvolums sofort beobachten. Hat man überdies den ganzen Apparat calibrirt, so kann man in der unteren engeren Röhre sowohl das Volum des gebildeten Wasserdampfs als auch seine durch Dissociation erfolgte Ausdehnung, in der oberen engeren Röhre aber das Volum des gebildeten Knallgases sehr genau ermitteln.

Will man nur die Zerlegung des Wassergases durch den Funkenstrom zur Anschauung bringen, ohne die Rückbildung des Wassers sofort in demselben Rohr zu zeigen, so kann dies bequem mit derselben Vorrichtung geschehen, welche für die Kohlensäure oben bereits angegeben wurde (vergl. S. 188). Man leitet einen raschen Wasserdampfstrom durch die mit Funkendrähten versehene beiderseits offene Röhre, während der Funke zwischen den Platinspitzen überspringt. Lässt man das aus der Röhre austretende Gas in kaltes Wasser treten, um den Dampf zu verdichten, so sammelt sich in einem über dem Entbindungsrohr aufgestellten, mit Wasser gefüllten Eudiometer eine erhebliche Menge Gas an, welches sich durch Verpuffung als Knallgas zu erkennen giebt. Bei einem Versuch unter den mehrfach angedeuteten Bedingungen wurden in 10 Minuten $2^{cc}_{.}9$ Gas (bei $0°$ und unter $0^{m}_{.}76$ Druck) erhalten. Auch in diesem Falle bleibt stets eine gewisse Menge Luft zurück — in dem eben erwähnten Versuch $1^{cc}_{.}15$ (bei $0°$ und unter $0^{m}_{.}76$ Druck) —, da es in der That ebenso schwer ist, luftfreien Wasserdampf, wie luftfreie Kohlensäure zu erhalten. Wasserdampf, den man zwei Stunden lang aus einem Dampfkessel hatte ausströmen lassen, enthielt immer noch ganz bemerkenswerthe Quantitäten Luft. Bei Anwendung des grossen Ruhmkorffs entstanden in 10 Minuten 29^{cc} nicht condensirbaren Gases, wovon 4^{cc} Luft (auf $0°$ und $0^{m}_{.}76$ berechnet).

Bei dieser Gelegenheit soll nicht unerwähnt bleiben, dass man die Dissociation des Wasserdampfs auch durch eine glühende Platinspirale bewerkstelligen kann. An das untere Ende eines weiten Glasrohrs ist eine engere angelöthet. Die obere Mündung ist mit einem Korke verschlossen, welcher von zwei dünnen Glasröhrchen durchsetzt ist. In dem weiten Rohre hängt, einen lang gestreckten Bogen bildend,

die Platinspirale. Die Enden der Spirale ragen aus den Röhrchen, in welche sie eingekittet sind, hervor und sind mit den Polen der Batterie verbunden. Bei einer Dicke des Platindrahts von $0^{mm}6$ und einer Länge der Spirale von 16^{cm} sind 8—10 Accumulatoren erforderlich, um den Draht auf eine der Weissgluth nahe Temperatur zu bringen. Lässt man, sobald diese Temperatur erreicht ist, einen recht starken möglichst luftfreien Wasserdampfstrom durch die Röhre streichen, so sammelt sich in wenigen Secunden in einem mit Wasser gefüllten Eudiometer eine Menge Knallgas an, die man eben noch verpuffen kann, ohne das Instrument zu gefährden. Der glühenden Platinspirale gegenüber verhält sich der Wasserdampf also anders wie die Kohlensäure (vergl. S. 189).

Die Dissociation des Wasserdampfs durch die glühende Platinspirale nimmt allerdings weniger Zeit in Anspruch als die durch den Funkenstrom bedingte, allein der Versuch ist umständlicher, einerseits wegen des complicirteren Apparates, andererseits wegen des stärkeren Stromes, dessen man bedarf, des häufigen Springens des Rohrs nicht zu gedenken, welches unfehlbar eintritt, wenn die während des Glühens sich krümmende Platinspirale die Glaswand berührt.

Als die Platinspirale in einem über Quecksilber abgesperrten Wassergasvolum erglühte, konnte ebensowenig wie bei dem entsprechenden Versuche mit Kohlensäure, ein explosives Gas erhalten werden. Die Quecksilbersäule oscillirte auch hier, wie bei der Kohlensäure, in Folge der rasch auf einander folgenden Zerlegung und Rückbildung des Wassers. Nach dem Erkalten des Rohrs blieb eine kleine Menge Gas zurück, welches sich aber als Luft erwies.

Die Versuche mit den elektrisch glühenden Platinspiralen wurden in dem Siemens'schen Laboratorium angestellt, in welchem für derartige Zwecke Hülfsmittel zur Verfügung stehen, wie sie anderwärts kaum zu finden sein dürften. Hr. Dr. Oscar Frölich und Hr. Dr. Howe hatten die grosse Güte, die für die Glühversuche erforderlichen Apparate *ad hoc* herstellen zu lassen, wofür ich ihnen nicht genug danken kann.

Dissociation von Gasen und Dämpfen bei stiller Entladung zwischen grossen Flächen.

Die Zerlegung der Gase durch Einwirkung des elektrischen Funkens wird in der Regel als Wärmewirkung aufgefasst; die Frage, ob die Erscheinungen ausschliesslich der Wärme zuzuschreiben sind, ist aber noch nicht endgültig beantwortet.

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass auch die Elektricität dabei betheiligt ist; hierfür sprechen wenigstens einige Beobachtungen, welche über den Einfluss der stillen Entladung auf Gase bereits vorliegen. Die zersetzende Wirkung derselben ist schon frühzeitig erkannt worden. ANDREWS und TAIT[1] führen bereits gelegentlich ihrer grossen Untersuchungen über das Ozon eine ganze Reihe solcher Zersetzungen an, zumal auch die der Kohlensäure. »*Carbonic acid is rapidly decomposed by the spark, slowly by the silent discharge; in both cases expansion takes place*« heisst es in der Abhandlung. Später haben BERTHELOT[2] und auch Sir BENJAMIN BRODIE[3] ausführlichere Versuche über diesen Gegenstand angestellt.

Es schien mir von Interesse, einige dieser Versuche zu wiederholen und ich habe daher zu verschiedenen Malen einen Strom trockener Kohlensäure durch den bekannten SIEMENS'schen Ozonapparat geleitet. Wie schon BRODIE beobachtet hat, wird hierbei immer noch eine nicht unerhebliche Ozonentwickelung wahrgenommen. Im Hinblick auf die Schwierigkeit, luftfreie Kohlensäure zu erhalten, konnte dieses Ozon der noch vorhandenen Luft zugeschrieben werden. Um in dieser Beziehung Gewissheit zu erhalten, sammelte man das aus dem Ozonapparat austretende Gas über Kalilauge auf, wobei wieder der SCHIFF'sche Apparat mit Vortheil verwendet wurde. Man erkannte sogleich, dass sich über der Kalilauge mehr Gas ansammelte als der in der Kohlensäure enthaltenen Luft entsprach. In ein Eudiometer übergeführt verpuffte es durch den Funken unter Zurücklassung etwa des halben Luftvolums. Die Menge Kohlensäure, welche auf diese Weise dissociirt wird, ist allerdings nicht gross. Bei achtstündigem Durchgang eines langsamen Kohlensäurestromes durch eine solche Ozonröhre wurden $2^{cc}.4$ Dissociationsgase (aus der Menge der bei der Verpuffung gebildeten Kohlensäure berechnet) von $0°$ und $0^{m}.76$ Druck erhalten. Diese Versuche bestätigen aber gleichwohl unzweifelhaft die von ANDREWS und TAIT erkannte und später von BERTHELOT beobachtete Zerlegung der Kohlensäure durch die stille Entladung.

Ich habe analoge Versuche auch über den Wasserdampf angestellt. Über die Einwirkung der stillen Entladung auf denselben liegen nur wenige Angaben vor. ANDREWS und TAIT scheinen keine Beobachtungen in dieser Richtung angestellt zu haben. Auch BERTHELOT macht keine eingehendere Mittheilung über Versuche mit dem Wasserdampf, er erklärt aber doch im Anschluss an das, was er über das

[1] ANDREWS und TAIT, Phil. Trans. 1860. 125 (vergl. auch: The scientific papers of the late THOM. ANDREWS. 1889. 285).

[2] BERTHELOT, Ann. chim. phys. [5] X 72. (1877).

[3] Sir BENJAMIN BRODIE, R. Soc. Proc. XXI 485. (1873).

Verhalten einer Mischung von Wasserstoff und Sauerstoff angiebt, dass der Wasserdampf, sowohl in einer zugeschmolzenen Röhre, als auch über Quecksilber abgesperrt in mit Platinspiralen umwundener Röhre der stillen Entladung widerstehe. »*La vapeur d'eau*«, sagt er[1], »*n'est pas davantage décomposée par l'effluve dans ces conditions.*«

Dagegen haben Dehérain und Maquenne[2] den *in vacuo* gebildeten Wasserdampf durch die stille Entladung zerlegen können. Meine Versuche haben auch für den Wasserdampf bei gewöhnlichem Druck zu ähnlichen Ergebnissen geführt. Als Wasserdampf — unter denselben Bedingungen, wie bei dem Versuch mit der Kohlensäure, — durch die Siemens'sche Ozonröhre geleitet wurde, erschien in dem über der Mündung der Austrittsröhre aufgestellten Eudiometer jedesmal eine erhebliche Menge Knallgas, welches durch den Funken explodirt werden konnte.

Angesichts der entgegengesetzten Angaben Berthelot's glaubte ich für meine Beobachtungen eine weitere Bestätigung suchen zu müssen. Obige Versuche waren mit dem gewöhnlichen Siemens'schen Ozonapparat angestellt worden, welcher bekanntlich aus einer engeren mit dem Rande in eine weitere eingeschmolzenen Glasröhre besteht. Die eine Elektrode ist eine Kupferspirale, welche in der inneren Röhre hängt, die andere ein Kupferdraht, welcher die Zinnfoliebekleidung der äusseren Röhre umschlingt. Bei dieser Anordnung lässt sich die elektrische Entladung wegen der undurchsichtigen Metallumhüllung nicht beobachten. Sprängen an irgend einer Stelle in Folge einer Ungleichartigkeit der Oberfläche elektrische Funken über, so wäre der Schluss, dass die stille elektrische Entladung auch den Wasserdampf dissociire, hinfällig geworden. Um diesen Einwand zu entkräften, wurde der Versuch mit einer von Berthelot angegebenen Modification des Siemens'schen Apparates wiederholt, bei welcher die innere Röhre mit schwefelsäurehaltigem Wasser gefüllt ist, während die äussere Röhre, statt in Zinnfolie eingehüllt zu sein, von einem etwas weiteren Cylinder umgeben ist, welcher ebenfalls schwefelsäurehaltiges Wasser enthält. Die Elektroden tauchen in die mit Wasser gefüllten Röhren. Bei der völligen Durchsichtigkeit dieses Apparates kann man sich durch directe Beobachtung versichern, dass kein Funke überspringt. Der ganze Apparat zeigte bei dem Durchgange der Elektricität einen vollkommen gleichartigen bläulichen Lichtschimmer, der indessen nur im Dunkeln sichtbar ist.

Aber auch mit diesem Apparate wurde jedesmal eine erhebliche Menge Knallgas erhalten.

[1] Berthelot, Ann. chim. phys. [5] XVII 143. 1879.
[2] Dehérain und Maquenne, Compt. Rend. XC, 895. (1881).

Gegen das so erhaltene Ergebniss konnte indessen noch ein Einwurf geltend gemacht werden. Bei Ausführung des Versuchs verdichtete sich begreiflich zunächst Wasser in dem für den Durchgang des Dampfes bestimmten Raume. Aber bald gerieth die Flüssigkeit in der äusseren diesen Raum umgebenden Röhre in's Sieden, wodurch das zunächst condensirte Wasser wieder gasförmig wurde. Eine kleine Menge flüssigen Wassers wurde aber gleichwohl in dem unteren Theil der Röhre, wo die weitere in die engere übergeht, mit Hartnäckigkeit zurückgehalten. Man könnte einwenden, das beobachtete Knallgas sei durch Elektrolyse des an gedachter Stelle angesammelten flüssigen Wassers entstanden. Eine derartige Elektrolyse ist aber ganz und gar ausgeschlossen. Als der für den Durchgang des Dampfes bestimmte Raum mit Wasser angefüllt wurde, welches beinahe zum Sieden erhitzt war, bildete sich bei stundenlang fortgesetzter Entladung keine Spur von Knallgas.

Die Zerlegung des Wasserdampfes bei der stillen Entladung ist aber noch durch einen anderen Versuch erhärtet worden, bei welchem jede Spur von flüssigem Wasser ausgeschlossen war. Nachdem man festgestellt hatte, dass reines Salzsäuregas beim Durchgang durch den Ozonapparat keinerlei Veränderung erfährt, wurde ein Strom von Salzsäuregas durch Salzsäureflüssigkeit geleitet, welche auf etwa 50° erwärmt worden war. Das feuchte Gas trat in den Ozonapparat, während das Wasser in der äusseren Glashülle durch einen eingeleiteten Wasserdampfstrom im Sieden gehalten wurde. Bei dieser Anordnung des Versuchs konnte in dem Ozonapparat auch nicht der leichteste Anflug von Feuchtigkeit beobachtet werden. Das aus dem Apparate ausströmende Gas liess man in eine mit Kalilauge gefüllte Röhre eintreten; sofort sammelte sich über der Lauge wieder ein erhebliches Volum von Knallgas an, welches beim Durchschlagen des Funkens explodirte.

Berthelot hat auch die Einwirkung der stillen Entladung auf das Ammoniakgas untersucht: Er fand, das dasselbe in seine elementaren Bestandtheile gespalten wird. Ich habe auch diesen Versuch wiederholt und bin, wie ich nicht anders erwartete, zu genau denselben Ergebnissen gelangt.

Noch sei bemerkt, dass die Dissociation des Dampfes organischer Verbindungen, in ähnlicher Weise ausgeführt, wie die des Wasserdampfes, vielleicht zu bemerkenswerthen Ergebnissen führen dürfte. Schon heute will ich erwähnen, dass der Dampf von Methyl- und Aethylalkohol, ebenso von Aethylaether mit der grössten Leichtigkeit dissociirt wird. 100^{cc} der bei 100° vergasten Verbindungen liefern in 5 Minuten etwa $50-60^{cc}$ Gas, welches sich beim Abkühlen der Röhre nicht mehr verdichtet. Auch Benzolgas wird unter reichlicher

Ausscheidung von Kohle in ein farblos durchsichtiges Gas verwandelt, welches bei gewöhnlicher Temperatur nicht flüssig wird. Diese Erscheinungen verdienen ein eingehenderes Studium, als ich ihnen bislang zu widmen im Stande gewesen bin.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, HH. Dr. G. Pulvermacher und Dr. A. Kuhlwein, Assistenten am hiesigen chemischen Laboratorium, für die mir bei dieser Arbeit geleistete treffliche Hülfe meinen besten Dank auszusprechen. Auch möchte ich nicht unerwähnt lassen, wie sehr ich Hrn. Dr. Walth. Wolff, für freundliche Betheiligung bei einigen der beschriebenen Versuche verbunden bin.

Ausgegeben am 6. März.



1890.

XI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

27. Februar. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. MOMMSEN.

Hr. PERNICE las: Über den Modus bei Übereignungsgeschäften im klassischen römischen Rechte.

Ausgegeben am 6. März.



1890.
XII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

27. Februar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

Hr. Roth las über die Veränderungen, welche die Gesteine durch Contact mit Eruptivgesteinen erleiden.

Die Mittheilung bildet den Schluss der am 16. Mai v. J. gelesenen (1889. I. Hlbbd. St. XXVI. S. 403), und wird mit ihr an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Ausgegeben am 6. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei



1890.

XIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

6. März. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Pringsheim legte eine Mittheilung des correspondirenden Mitgliedes der Akademie, Hrn. Prof. Strasburger in Bonn, vor über die Vertreterinnen der Geleitzellen im Siebtheile der Gymnospermen.

Die Mittheilung folgt umstehend.

2. Hr. Curtius legte eine Abhandlung des Hrn. Prof. R. Lepsius in Darmstadt vor, welche die griechischen Marmorbrüche und die Benutzung derselben im Alterthum zum Gegenstande hat.

Die Mittheilung wird in den akademischen Denkschriften erscheinen.

Die Wahl des ordentlichen Professors in der theologischen Facultät der Friedrich-Wilhelms-Universität hierselbst, Hrn. Dr. theol. et phil. Adolph Harnack, zum ordentlichen Mitglied der Akademie in ihrer philosophisch-historischen Classe, ist durch Allerhöchsten Erlass vom 10. Februar d. Js. bestätigt worden.



Die Vertreterinnen der Geleitzellen im Siebtheile der Gymnospermen.

Von E. Strasburger
in Bonn.

Hierzu Taf. I.

So weit fremde und meine eigenen Beobachtungen reichen, werden die Siebröhren der Angiospermen stets von Geleitzellen begleitet. Auch darf angenommen werden, dass alle Geleitzellen dort Schwesterzellen der Siebröhrenglieder sind, aus einer Gewebemutterzelle mit denselben entstanden.

Dieses Verhältniss bleibt bis in die feinen Auszweigungen der Gefässbündel innerhalb der Blattspreite erhalten, nur dass die Geleitzellen dort auf Kosten der Siebröhrenglieder bedeutend anzuschwellen pflegen. Schliesslich setzen schlauchförmige, plasmareiche Gebilde, welche das Aussehen angeschwollener Geleitzellen haben, den Siebröhrenapparat allein, ohne Siebröhren, fort. Diese Zellen verdanken ungetheilt gebliebenen Gewebemutterzellen, wie solche sonst Siebröhren und Geleitzellen zugleich erzeugen, ihren Ursprung. Alfred Fischer hat für die angeschwollenen Geleitzellen die Bezeichnung »Übergangszellen« vorgeschlagen.[1] Ich möchte mir diese Bezeichnung aneignen, dieselbe aber nur auf die ungetheilt gebliebenen, plasmareichen Endglieder der Siebtheile anwenden, im Übrigen, soweit noch wirkliche Geleitzellen im Spiel, dieselben nur als »angeschwollene Geleitzellen« unterscheiden.

Bei den Gefässkryptogamen sind die Siebröhren ohne Geleitzellen, wenigstens ohne solche Geleitzellen, die morphologisch den Geleitzellen der Angiospermen entsprechen würden. Denn die procambialen Zellen, welche den Siebröhren den Ursprung geben, erfahren keine Längstheilung, die zur Abgrenzung der Geleitzellen führen könnte. Die physiologische Rolle der Geleitzellen übernehmen aber gestreckte, mehr oder weniger plasmareiche Parenchymzellen, welche die Sieb-

[1] Untersuchungen über das Siebröhren-System der Cucurbitaceen. 1884. S. 16.

röhren umhüllen, bez. zwischen dieselben eingeschaltet sind. So folgen beispielsweise in einem Gefässbündel von *Pteris aquilina* die plasmareichen Parenchymzellen auf die Siebröhren nach aussen, und sind auch einzeln denselben untermischt, während nach innen zu die Siebröhren an das stärkeführende Parenchym grenzen, das die Gefässe umhüllt. Ich rechne die plasmareichen Elemente, welche die Siebröhren der Gefässkryptogamen begleiten, zum Siebtheil der Gefässbündel und bezeichne dieselben, gemäss der von mir im »Botanischen Practicum« gewählten Terminologie, als Cribralparenchym. Die stärkeleitenden Parenchymzellen, welche die Gefässe bez. Tracheïden begleiten, dieselben als Ganzes umgeben und zwischen denselben vertheilt sind, rechne ich zum Gefässtheil, als Vasalparenchym. Diese Trennung und Bezeichnung lässt sich durch den Vergleich mit den Elementen der phanerogamen Gefässbündel rechtfertigen und begründen.

Bei den Gymnospermen werden von den Gewebemutterzellen, welche den Siebröhrengliedern den Ursprung geben, Geleitzellen ebenfalls nicht abgetrennt, und sind mir auch keine bestimmten Angaben über das Vorhandensein von Elementen bekannt, welche in die, den Geleitzellen der Angiospermen zufallende Function hier eintreten sollten. Nichtsdestoweniger sind solche Elemente im Siebtheil der Gymnospermen vertreten und sogar in äusserst praegnanter Weise dort entwickelt.

Es sei mir gestattet, im Folgenden einige Typen der Ausbildung der in Betracht kommenden Elemente für Gymnospermen hier zu schildern. Ich greife diese Schilderung aus einer umfangreicheren Arbeit heraus, die sich mit dem Bau und der Function des Gefässbündelsystems überhaupt befassen soll und die ich beabsichtige, in nächster Zeit zur Publication zu bringen.

Diese Schilderung wird ergeben, dass es sich bei den Gymnospermen um ein ganz besonders instructives Verhältniss zwischen den Siebröhren und bestimmten parenchymatischen Elementen der Umgebung handelt, ein Verhältniss, das geeignet ist, Licht über die Functionen des Siebröhrensystems überhaupt zu verbreiten.

Das Gesammtergebniss meiner am secundären Zuwachs des Siebtheils, dem Baste der Coniferen, angestellten Beobachtungen lautet zunächst dahin: dass bei den Abietineen die Functionen der Geleitzellen von bestimmten Zellreihen der Markstrahlen, bei einem Theile der Cupressineen und Taxodineen von bestimmten Zellreihen der Markstrahlen und von bestimmten Bastparenchymzellreihen, endlich bei einem anderen Theile der Cupressineen und Taxodineen und bei den Taxineen und Araucarien nur von bestimmten Bastparenchymzellreihen vollzogen werden.

Allen diesen in eine bestimmte Beziehung zu den Siebröhren tretenden parenchymatischen Elementen kommt gemeinsam zu, dass sie relativ plasmareich sind und im Culminationspunkte ihrer Thätigkeit keine Stärke führen; dass sie mit den Siebröhren zugleich in Function treten, zugleich mit diesen sich auch entleeren und collabiren: dass sie endlich allein durch besonders ausgebildete Tüpfel mit den Siebröhrengliedern in Verbindung stehen.

Wo die eiweissleitenden[1] Zellreihen den Markstrahlen angehören, nehmen sie im Allgemeinen die Ränder derselben ein (Fig. 1), können übrigens auch wie bei *Cedrus* und *Tsuga* zwischen die stärkeführenden Zellreihen eingeschaltet sein. Bei den Abietineen, deren Markstrahlen im Holzkörper eine doppelte Zusammensetzung zeigen, das heisst aus tracheïdalen und aus lebendigen Elementen dort bestehen, sieht man meist die tracheïdalen Zellreihen sich im Bast in die eiweissleitenden fortsetzen. Im Allgemeinen ist aber die eiweissleitende Zellreihe im Baste nur einfach, auch wenn im Holzkörper der tracheïdale Saum aus mehreren Etagen bestand. Es können aber auch stärkeführende Zellreihen der Markstrahlen im Holze[1] sich gelegentlich in eiweissleitende im Baste fortsetzen. Das muss ganz allgemein geschehen bei denjenigen Abietineen, die der tracheïdalen Markstrahlelemente im Holze entbehren. Niemals kommt es aber vor, dass ein nur von eiweissleitenden Zellen gebildeter, einstöckiger Markstrahl des Bastes sich in eine stärkeleitende Zellreihe im Holzkörper fortsetze. Das ist ja auch schlechterdings unmöglich, da eben die eiweissleitende Zellreihe im Baste keine Stärke führt und diese somit auch nicht der Zellreihe im Holzkörper übermitteln könnte. Hingegen beobachtet man häufig genug bei den Abietineen, Araucarien, Taxodineen und Cupressineen, dass ein einstöckiger, eiweissleitender Markstrahl des Bastes sich innerhalb des Holzkörpers in eine Zellreihe fortsetzt, deren Elemente gewaltsam radial gestreckt, ja zum Theil von einander getrennt erscheinen. Das hängt damit zusammen, dass vielfach, den Anforderungen des Bastes gemäss, neue einstöckige, selten zweistöckige, eiweissleitende Markstrahlen im Cambium eingeschaltet werden, nach der Holzseite zu aber mangelhaft ernährt werden, nur wenige Elemente in dieser Richtung zugetheilt erhalten, welche wenigen Elemente im Verlaufe des weiteren Dickenwachsthums dann eine Dehnung erfahren. Solche Zellreihen sind meist auch nicht weit im Holzkörper zu verfolgen. Über ihr Aussehen mag uns Fig. 2 belehren. Es kann übrigens ein solcher aus eiweissleitenden Elementen ausschliesslich bestehender Markstrahl[1] im Cambium seinen Abschluss finden und in

[1] So der Kürze wegen; richtiger eiweissartige Substanzen leitenden.

den Holzkörper überhaupt nicht übergehen. — Ähnlich wie neue plasmaleitende Markstrahlen in den Bast eingeschaltet werden, erhalten bei den Abietineen die aus dem Holzkörper kommenden vielfach beim Eintritt in den Bast neue eiweissleitende Zellreihen den Rändern aufgesetzt. Das Aufsetzen solcher Zellreihen kommt besonders bei denjenigen Abietineen vor, welche, wie die Edeltanne, ohne tracheïdale Elemente an den Markstrahlen innerhalb des Holzkörpers sind.

Bei demjenigen Theile der Taxodineen und Cupressineen, welche ausser den eiweissleitenden Zellen im Bastparenchym solche auch in den Markstrahlen besitzen, sind eiweissleitende Zellreihen an den aus dem Holzkörper in den Bast sich fortsetzenden Markstrahlen eine Ausnahme; es werden vielmehr im Cambium neue, nur eiweissleitende, einstöckige Markstrahlen für den Bast eingeschaltet. Die Zahl solcher Markstrahlen ist hier aber im Verhältniss nicht gross, was sich ja daraus erklärt, dass sie nur die Function der anderweitig im Bastparenchym schon vertretenen, eiweissleitenden Zellenzüge zu unterstützen haben. Die im Bastparenchym in gleicher Richtung wie die Siebröhren und in Contact mit denselben verlaufenden, eiweissleitenden Parenchymzellen, ob sie nun allein vorhanden, oder das Geschäft mit den Markstrahlen theilen, bilden keine ununterbrochenen Reihen, sind vielmehr in stärkeführende Parenchymbänder eingeschaltet. Es kommt vor, dass ein Faden aus eiweissleitenden Bastparenchymzellen eine nicht unbedeutende Länge erreicht, doch zeigt sich ein solcher Faden weit häufiger durch Einschaltung stärkehaltiger Elemente unterbrochen. Eine solche Mischung eiweiss- und stärkeleitender Elemente kommt innerhalb der Markstrahlen hingegen kaum vor; in Markstrahlen, die nur aus eiweissleitenden Zellen bestehen, habe ich sie überhaupt nicht beobachtet.

Im Bast der Abietineen pflegen sich die an den Markstrahlrändern befindlichen eiweissleitenden Zellen durch grössere Höhe und geringeren radialen Durchmesser vor den stärkeführenden Elementen auszuzeichnen. Die grössere Höhe fällt besonders zur Zeit der Vegetationsruhe in der Cambialzone auf (Fig. 1). Die eiweissleitenden Markstrahlzellen richten sich in auffälliger Weise nach der Breite der angrenzenden Siebröhrenglieder, denen sie angeschmiegt sind, ein. In dem Maasse als mit der Entfernung vom Cambium die Breite der Siebröhren wächst, nimmt auch der radiale Durchmesser dieser Markstrahlzellen zu. Ebenso fallen durch die relativ bedeutendere Höhe ihrer Elemente die nur aus eiweissleitenden Zellen bestehenden Markstrahlen auf. Soweit sich die eiweissleitenden Markstrahlzellen und nicht minder die eiweissleitenden Bastparenchymzellen noch innerhalb der Cambialzone befinden, können sie auch Stärke enthalten, nicht

so später, wenn sie in der Ausübung ihrer Function stehen. Die dem Bastparenchym zugehörigen eiweissleitenden Zellen sind von den stärkeführenden der Gestalt nach nicht verschieden, gestreckt tonnenförmig wie jene.

Während die stärkeführenden Elemente des Markstrahls unter einander und mit den stärkeführenden Bastparenchymzellen durch flache Tüpfel, mit den angrenzenden Bastfasern, falls solche vorhanden, durch enge Tüpfel communiciren, sind sie ohne jegliche Verbindung mit den eiweissleitenden Zellen, ob nun des Markstrahls selbst oder des Bastparenchyms. Zwischen den eiweissleitenden Zellen und den Bastfasern fehlt auch jede Communication. Hingegen lässt sich, vornehmlich bei den Abietineen, auf tangentialen Längschnitten leicht feststellen, dass die Siebröhren durch Siebtüpfel mit den eiweissleitenden Markstrahlzellen verbunden sind (Fig. 3). Sehr schön lassen sich solche Tüpfel auch bei den Araucarien zwischen Siebröhren und den eiweissleitenden Bastparenchymzellen nachweisen (Fig. 4). Die Callusstäbchen gehen in diesen Siebtüpfeln nur bis zur Mittellamelle und sind nur an der Siebröhrenseite entwickelt. Das fiel schon Russow[1] auf, welcher bemerkte, dass »zuweilen, aber im ganzen doch selten, in der Wand der Siebröhre, dort wo diese an eine Baststrahlzelle grenzt, Siebtüpfel sich bilden«.

Jenseits der thätigen Siebröhrenzone werden die eiweissleitenden Elemente, ob sie den Markstrahlen oder dem Bastparenchym angehören, für alle Fälle entleert. Dieser Entleerung geht eine Abnahme ihres protoplasmatischen Inhalts voran. Vielfach, doch nicht immer, wird bei den Abietineen und Araucarien, von den Siebröhren aus, den einseitigen Siebtüpfeln eine Callusplatte aufgesetzt. Die Auflösung der Calli in den Siebröhren folgt erst auf die Entleerung der eiweissleitenden Elemente des Markstrahls und Bastparenchyms, so dass diese nicht etwa dazu bestimmt sein können, auch die Producte dieser Auflösung in sich aufzunehmen und sie weiter zu befördern. Hierdurch gewinnt auch die Annahme eine Stütze, dass die Calli keine weiter zu verwerthende Substanz im Pflanzenkörper repraesentiren, eine Annahme, die sich sehr gut mit der Thatsache deckt, dass die Calli in den Siebröhren der Blätter, so weit sie dort entstehen, zugleich mit den Blättern abgeworfen werden.

Die entleerten eiweissleitenden Elemente der Markstrahlen sowohl als auch des Bastparenchyms sinken zusammen, wobei sich ihre Wandungen von denjenigen angrenzender Elemente stellenweise ab-

---

[1] Russow: Über den Bau und die Entwickelung der Siebröhren. Sitzungsberichte der Dorpater naturforschenden Gesellschaft. 1882. S. 274.

lösen können (Fig. 7). Innerhalb des Bastparenchyms erhalten die etwas gequollenen, feinporösen Querwände dieser Elemente zugleich vielfach eine charakteristische Faltung (Fig. 6), die ihr Erkennen in der inactiven Siebröhrenzone wesentlich erleichtert.

Während die Siebröhren und die eiweissleitenden Elemente der Markstrahlen und des Bastparenchyms jenseits der activen Siebröhrenzone sich entleeren, nehmen dort, wie bekannt, die stärkeführenden Elemente an Umfang zu.

Die Siebröhren sind ihrem ganzen Bau und ihrer gegenseitigen Verbindung nach, für longitudinale Leitung eingerichtet. Ihren Inhalt können benachbarte Siebröhren bei den Coniferen ausserdem nur in tangentialer Richtung austauschen. In radialer Richtung ist dieser Austausch nicht möglich, da eine Verbindung durch Tüpfel in dieser Richtung fehlt. Ausserdem haben bei zahlreichen Taxodineen, Cupressineen und Taxineen die Siebröhrenbänder nur einschichtige Tiefe und werden durch anderweitiges Gewebe, das den Zusammenhang in radialer Richtung unmöglich macht, von einander getrennt. Der radiale Transport der in den Siebröhren enthaltenen Stoffe erfolgt somit nur durch Vermittelung der Markstrahlen. Das gilt nicht nur für Gymnospermen, sondern auch für die Dicotylen. Bei letzteren dienen die nämlichen Zellenzüge der Markstrahlen zugleich für den Transport der eiweissartigen Stoffe und der Kohlehydrate, dasselbe ist der Fall bei denjenigen Coniferen, die eiweissleitende Zellenzüge nur im Bastparenchym aufweisen. Um so interessanter erscheinen diejenigen Coniferen, die besondere Zellenzüge für die Leitung der eiweissartigen Stoffe ausser in dem Bastparenchym auch in den Markstrahlen, oder in den Markstrahlen allein, aufweisen. Die Fälle der letzteren Art belehren uns zugleich in der auffälligsten Weise, dass es sich um die Zuleitung dieser eiweissartigen Stoffe nur bis zum Cambium handelt. Denn während die stärkeleitenden Bahnen aus dem Baste in das Holz übergehen, hören die eiweissleitenden an der Grenze beider auf. Was die longitudinal verlaufenden eiweissleitenden Bastparenchymzellen anbetrifft, so fällt diesen, wo sie hier vorhanden, die Aufgabe zu, die Inhaltsstoffe der Siebröhren an die Markstrahlen zu übermitteln. Für longitudinale Leitung auf längere Strecken sind dieselben nicht eingerichtet, wie ja die Thatsache lehrt, dass ihre Zellenzüge vielfach in der Längsrichtung unterbrochen sind. Sicher ist aber in allen Fällen zu constatiren, dass ein solcher Zellenzug aus eiweissleitenden Bastparenchymzellen stets in Verbindung mit einem, ja für gewöhnlich mit mehreren Markstrahlen steht. Dieselbe Rolle wie diesen eiweissleitenden Bastparenchymzellen der Coniferen fällt den Geleitzellen im secundären Zuwachs der Angiospermen zu, sie

übermitteln die Abgabe der in den Siebröhren enthaltenen Stoffe an die Markstrahlen zur Weiterbeförderung nach dem Cambium. Und auch von diesen Geleitzellen kann ich behaupten, dass sie keine continuirlichen longitudinalen Züge bilden, wohl aber stets mit Markstrahlen in Verbindung stehen. Ob der Inhalt der Siebröhren innerhalb der Geleitzellen eine Veränderung erfährt, oder als solcher transportirt wird, mag dahingestellt bleiben. Ich halte auch das letztere für möglich, da die Verarbeitung der durch die Siebröhren gelieferten Stoffe sehr wohl erst in den cambialen, auf die Neubildung von Protoplasma eingerichteten Zellen erfolgen könnte. Dadurch aber, dass die Geleitzellen, bez. die eiweissleitenden Elemente, den Siebröhren den Inhalt entziehen, veranlassen sie eine Bewegung dieses Inhalts nach den Verbrauchsorten. Denn der Inhalt der Siebröhren steht, wie sein Hervorquellen aus Querschnittsflächen lehrt, unter Druck, und so wird er dann auch innerhalb seiner Bahnen dahin gedrängt werden, wo Raum für ihn entsteht.

Der Siebröhrenapparat im secundären Zuwachs der Gnetaceen schliesst am nächsten an denjenigen der Araucarien an. Eiweissleitende, in Beziehung zu den Siebröhren stehende Zellreihen sind im Bastparenchym vertreten, während die Markstrahlen keine besonderen Elemente für Eiweissleitung aufzuweisen haben.

Ebenso haben auch die Cycadeen in ihrem Bastparenchym besondere Zellenzüge aufzuweisen, welche sich an die Siebröhren halten und die den Geleitzellen der Angiospermen zukommenden Functionen ausüben. Ein 20^{cm} dicker Stamm von *Cycas circinalis*, der drei Gefässbündelringe besass, zeigte die Siebröhren und eiweissleitenden Elemente des Bastparenchyms nur in dem äussersten Gefässbündelringe noch in Thätigkeit, in den beiden inneren bereits collabirt. Die entleerten eiweissleitenden Stränge der Bastparenchymzellen zeigen auch bei den Cycadeen die charakteristische Einfaltung der Querwände.

In den primären Gefässtheilen aller Gymnospermenbündel sind die eiweissleitenden Zellenzüge als fortlaufende Zellreihen zwischen die Siebröhren eingeschaltet und lassen sich sicher an ihren Zellkernen wie auch daran erkennen, dass sie weiterhin wie die Siebröhren entleert und zerdrückt werden. Diese ununterbrochen fortlaufenden Zellreihen werden erst mit Ausbildung der Markstrahlen im secundären Zuwachs unterbrochen oder schwinden im Bastparenchym vollständig. Wo letzteres geschieht, sieht man die longitudinal verlaufenden Zellenzüge sich ganz ähnlich, bei ihrem allmählichen Übergang in einen Markstrahl, zusammenziehen, wie es auf der Gefässtheilseite das Vasalparenchym bei seinem gleichzeitigen Übergang in die Markstrahlen des Holzkörpers thut. Doch diese Verhältnisse seien hier nur angedeutet.

Ebenso sei nur kurz erwähnt, dass in den Siebtheilen des Centralcylinders der Wurzel die eiweissleitenden Parenchymzellreihen nicht fehlen und ebenfalls an ihren Zellkernen, so auch der geringeren Länge, von den mit kaum geneigten Siebplatten abschliessenden Siebröhrengliedern zu unterscheiden sind. Diese eiweissleitenden Parenchymzellen stellen aber auch in den Wurzeln der Gymnospermen nicht Schwesterzellen der Siebröhren, sondern nur parallel zu denselben laufende Zellenzüge dar.

Mit der vorausgegangenen Schilderung der primären Gefässtheile im Stamm ist auch das Verhalten des Siebtheils innerhalb des Blattes gekennzeichnet. Ganz abgesehen von den im Siebtheil der Blattbündel vertheilten eiweissleitenden Parenchymzellzügen, treten am Rande des Siebtheils dort Elemente auf, welche bisher keine Berücksichtigung gefunden. Beschrieben worden sind vielfach die tracheïdalen Säume, welche den Rand des Gefässtheils an den Blattbündeln der Gymnospermen begleiten; ein ganz ähnlicher Saum aus eiweisshaltigen Zellen folgt aber auch dem Rande des Siebtheils. Wendet man mit Alkohol fixirtes Material für die Untersuchung an, so fallen diese eiweissreichen Zellen an jedem Querschnitt auf. Sie zeichnen sich nicht nur durch ihren Plasmareichthum, sondern auch durch ihre nicht unbedeutende Weite und ihre grossen Zellkerne aus. Ihre Länge ist aber nur gering. Die Zahl der diesen Saum bildenden Zellreihen nimmt rasch ab und besteht beispielsweise in der beigefügten Figur 8, von *Pinus silvestris*, am Siebtheil zunächst aus drei, dann aus zwei, endlich aus einer Zellreihe. Ist der tracheïdale Saum am Rande der Gefässtheile der Blattbündel bei den Gymnospermen als Vertreter der letzten tracheïdalen Auszweigungen in den Blättern der Angiospermen anzusehen, so entspricht der Saum der plasmareichen Zellen am Siebtheil der ersteren, den »Übergangszellen«, mit welchen der Siebröhrenapparat bei den Angiospermen abschliesst. Bei *Gnetum*, welches ganz nach Art der Dicotylen ausgebildete Blätter, mit netzadriger Nervatur, besitzt, sind es aber die Nervenenden, welche in solche den Säumen der Coniferen entsprechenden Elemente auslaufen. An das unverzweigte, einfache Gefässbündel einer Blattfieder von *Cycas* schliesst wiederum ein ganz ähnlicher Saum aus tracheïdalen Elementen und Übergangszellen an, wie wir ihn bei den Coniferen gefunden. Der tracheïdale Saum dient aber bei *Cycas* zum Ansatz für jene merkwürdigen, tracheïdalen, humerusartigen Elemente, welche quer zum Fiederrande verlaufen. Die mit zahlreicheren Nerven versehenen Fiedern anderer Cycadeen haben die gleichen Säume wie *Cycas* aufzuweisen, entbehren aber des queren tracheïdalen Apparates. Die reichlicher vertretenen Gefässbündel reichen dort mit ihren Säumen für das Geschäft der Wasservertheilung in der Blattspreite aus.

Der Bau und die Vertheilung der die Geleitzellen vertretenden Elemente im Baste der Coniferen drängten uns zu der Vorstellung, dass diese Elemente dort der Entnahme der in den Siebröhren beförderten Stoffe dienen. Dieselbe Rolle fällt dann auch dem eiweissleitenden Parenchym im primären Siebtheile der Bündel zu. Die Übergangszellen in den Säumen der Siebtheile dienen hingegen allem Anschein nach dazu, um aus dem Blattgewebe diejenigen Substanzen aufzusammeln, welche die Siebröhren zur Abwärtsleitung erhalten sollen, und um sie den Siebröhren zu übermitteln. Dass diese Substanzen in den Blättern ausgearbeitet werden, ist nach SCHIMPER's Untersuchungen[1] sehr wahrscheinlich geworden. Auch spricht ja thatsächlich dafür der Umstand, dass die Gefässbündel mit ihren Enden in den Blattspreiten münden, und dass nicht nur der Gefässtheil, sondern auch der Siebtheil dort in ein besonders nahes Verhältniss zu dem Blattgewebe tritt. In dem fertigen Blatte, für welches der ausharrende Siebtheil, nach Beseitigung der Erstlinge, doch thatsächlich ausgebildet wird, kann derselbe nicht der Zufuhr, sondern nur der Abfuhr plastischer Substanzen dienen.

[1] Botanische Zeitung. 1888. Sp. 65 ff.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Radialer Längsschnitt aus einem älteren Stamme von *Pinus silvestris*, von welchem entsprechende Stücke zur Winterzeit in Alkohol eingelegt worden waren. Der Schnitt ist an der Grenze von Holz und Bast geführt. Innerhalb des Bastes zeichnen sich die eiweissleitenden Markstrahlzellen durch ihre Höhe und unregelmässige Gestalt aus. Das Praeparat war mit Anilinblau tingirt, daher die Zellkerne so scharf hervortreten. Vergr. 240.

Fig. 2. Radialer Längsschnitt aus einem älteren Stamme von *Taxodium distichum*; ebenfalls Alkoholmaterial, zur Winterzeit eingelegt. Der Schnitt, an der Grenze von Holz und Bast geführt, zeigt einen einstöckigen, eiweissleitenden Markstrahl, der alsbald blind im Holzkörper endet, dort Zerrungen und Zerreissungen ausserdem erfahren hat. Die Fortsetzung des Mark-

strahles im Bast war bei nicht genau radialem Verlauf desselben durch das Messer weggeschnitten worden. Vergr. 240.

Fig. 3. Der obere Theil eines Markstrahls von *Pinus silvestris* in tangentialem Längsschnitt, aus der activen Siebröhrenzone. Die obere, eiweissleitende Markstrahlzelle zeigt die einseitigen Siebtüpfel, welche sie mit einer angrenzenden Siebröhre verbinden. Die nächst untere, nur halb abgebildete Markstrahlzelle, stärkeleitend, ohne solche Tüpfel. Das Praeparat war mit Anilinblau gefärbt. Vergr. 500.

Fig. 4. Theil einer Siebröhre nebst angrenzendem eiweissleitendem Bastparenchym von *Dammara australis* aus der activen Siebröhrenzone. Tangentialer Längsschnitt. Vergr. 240.

Fig. 5. Der obere Theil eines Marksrahls von *Pinus silvestris* aus der Zone der ausser Thätigkeit tretenden Siebröhren. Die einseitigen, in die zuvor eiweissleitende Markstrahlzelle führenden Siebtüpfel mit Callusplatten von der Siebröhrenseite belegt. Vergr. 500.

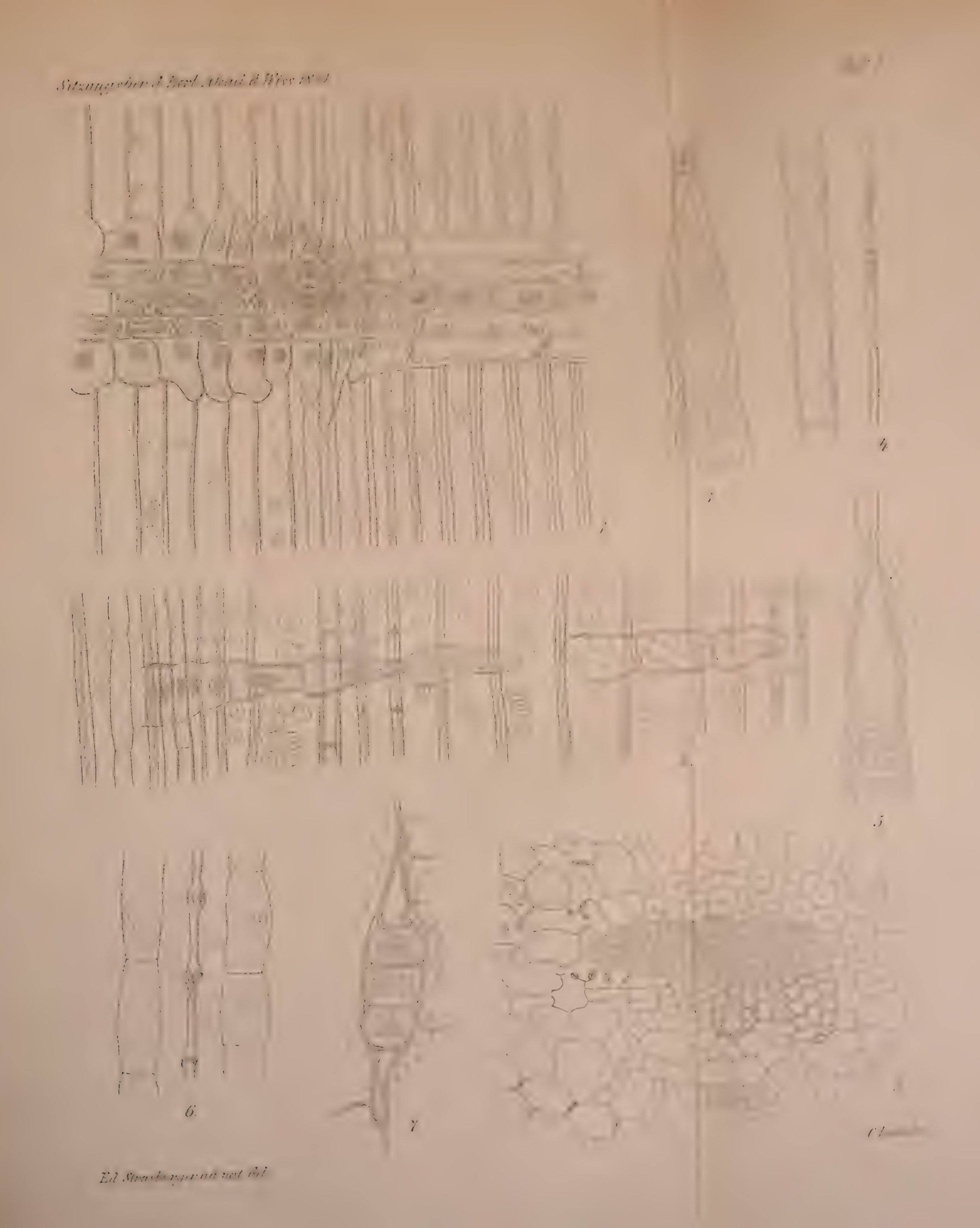
Fig. 6. Partie aus einem radialen Längsschnitt ausserhalb der activen Siebröhrenzone von *Ginkgo biloba*. In der Mitte eine collabirte, mit den charakteristisch gefalteten Querwänden versehene Zellreihe von Bastparenchymzellen, die innerhalb der activen Siebröhrenzone eiweissleitend waren; an den beiden Seiten dieser Zellreihe je eine entleerte Siebröhre, weiter, an beiden Rändern des Bildes, je eine in Thätigkeit verbliebene Zellreihe angeschwollenen, stärkeleitenden Bastparenchyms. Vergr. 240.

Fig. 7. Ein Markstrahl von *Pinus silvestris* ausserhalb der activen Siebröhrenzone. Die stärkeleitenden Zellen desselben in Thätigkeit und angeschwollen, die den oberen und den unteren Rand einnehmende, zuvor eiweissleitende Zellreihe collabirt. Vergr. 240.

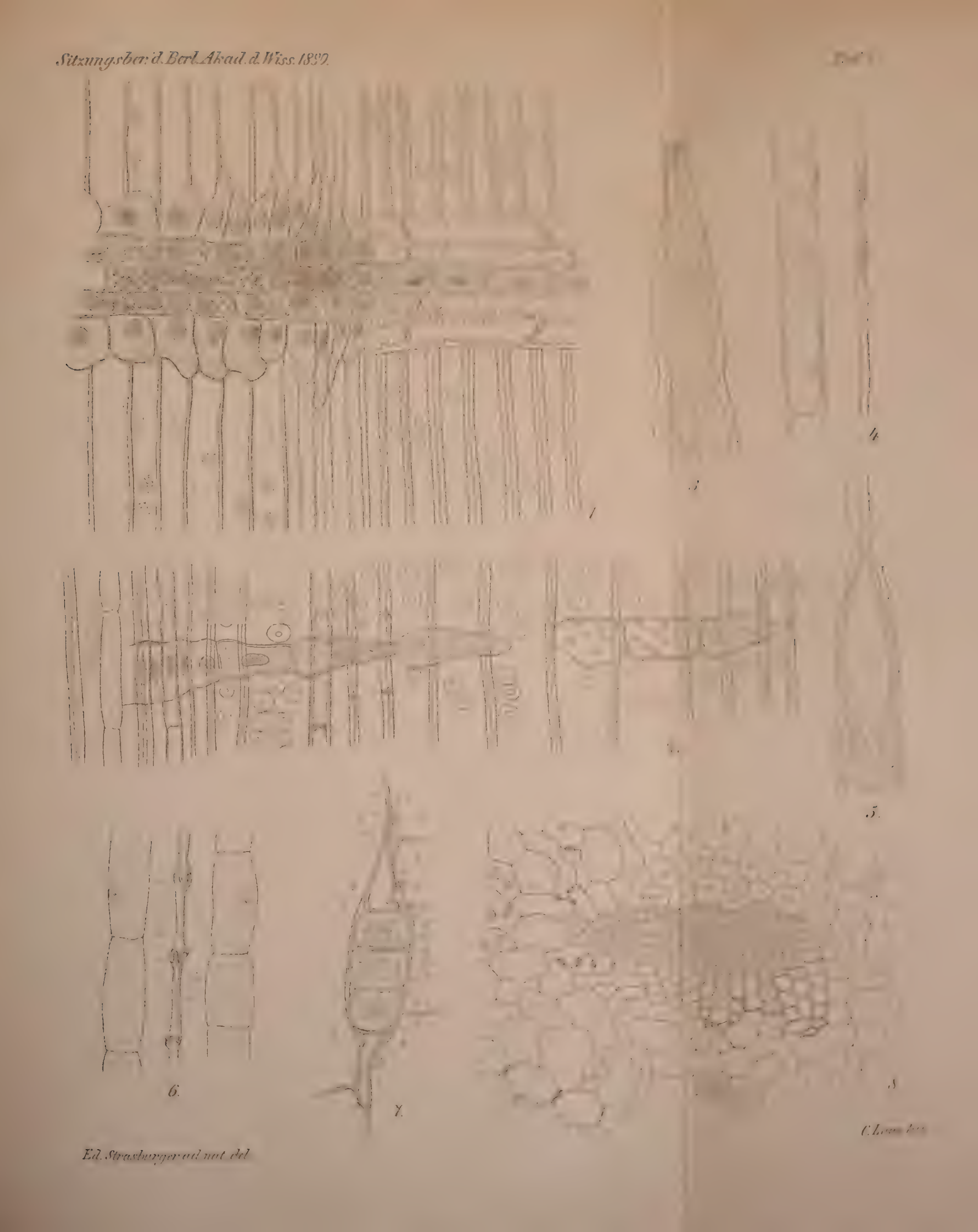
Fig. 8. Partie an dem Centralcylinder einer Nadel von *Pinus silvestris*, das eine der beiden Gefässbündel und das angrenzende Gewebe zeigend. Am linken Rande des Gefässbündels, an den Siebtheil ansetzend, die plasmareichen »Übergangszellen«, darunter, an den Gefässtheil ansetzend, der tracheïdale Saum. Vergr. 240.

Ausgegeben am 13. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.






1
3
4
5
6
7
8
Ed. Strasburger ad nat. del.



1890.
XIV.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

13. März. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Kronecker las: Zur Theorie der elliptischen Functionen.

2. Hr. du Bois-Reymond legte einen Bericht des Hrn. Prof. V. Hensen in Kiel über die von ihm geleitete Plankton-Expedition im atlantischen Ocean vor.

Beide Mittheilungen folgen umstehend.



Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 6. Februar [St. VII].)

§. 8.

Der Ausdruck:

$$(\mathfrak{V})\qquad \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)} \qquad \begin{pmatrix} u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w \\ u = \sigma v + \tau w \end{pmatrix},$$

auf welchen die Summation der Reihe:

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw} \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

geführt hat, ist eine Function der sechs Grössen:

$$\sigma_0,\ \tau_0,\ \sigma,\ \tau,\ v,\ w,$$

welche ihren Werth nicht ändert, wenn:

$$\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \ \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ \ \alpha\sigma + \beta\tau,\ \ \alpha'\sigma + \beta'\tau,\ \ \beta' v - \alpha' w,\ \ -\beta v + \alpha w$$

für:

$$\sigma_0 \quad , \quad \tau_0 \quad , \quad \sigma \quad , \quad \tau \quad , \quad v \quad , \quad w$$

substituirt wird, vorausgesetzt, dass α, β, α', β' ganze Zahlen sind, welche der Bedingung:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

genügen. Setzt man also:

$$(\mathfrak{V}')\qquad \begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0\ , & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0\,, \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau\ , & \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau, \\ v' &= \beta' v - \alpha' w\ , & w' &= -\beta v + \alpha w, \end{aligned}$$

und bezeichnet alsdann die Systeme:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w),\ \ (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

als einander aequivalent, so stellt jener Ausdruck ($\mathfrak{V}$) eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \backsim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

dar.

Man kann den Ausdruck ($\mathfrak{B}$) auch als eine Function der vier complexen Grössen:

$$u_0, \quad u, \quad v, \quad w$$

auffassen, da die reellen Grössen σ_0, τ_0, σ, τ durch u_0, u, v, w vollkommen definirt sind. Es sind nämlich τ_0, τ als diejenigen reellen Grössen bestimmt, für welche die aus den Gleichungen:

$$\sigma_0 = \frac{u_0 - \tau_0 w}{v}, \quad \sigma = \frac{u - \tau w}{v}$$

hervorgehenden Grössen σ_0 und σ reell werden. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen u_0 und u selbst Invarianten jener Aequivalenz $(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \backsim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$ sind.

Die Invarianteneigenschaft der durch ($\mathfrak{B}$) dargestellten Function von u_0, u, v, w tritt klar hervor, wenn man darin die ϑ-Functionen durch jene Function *Alpha* ausdrückt, welche ich im §. 1 des art. XIX eingeführt habe.[1] Es ist a. a. O. mit $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ der Ausdruck:

$$\left(\frac{2\pi}{\vartheta'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma+\tau w)\tau\pi i}\, \vartheta(\sigma + \tau w, w)$$

oder der, seinem Werthe nach, damit übereinstimmende Ausdruck:

$$e^{\left(\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) w + \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{2}\right)\pi i} \prod_{\varepsilon, n} \left(1 - e^{(nw + \varepsilon\sigma + \varepsilon\tau w)2\pi i}\right)$$

$$(\varepsilon = +1;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\quad \varepsilon = -1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bezeichnet worden, und die reellen Grössen a_0, b_0, c_0 waren dabei durch die Gleichungen:

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

bestimmt. Die Bezeichnung *Alpha* hatte ich als den Anfangsbuchstaben des Wortes ἄτροπος gewählt, welches wohl als der griechische Ausdruck für Invariante gelten kann. Da aber für den vorliegenden Zweck an Stelle der Grössen σ, τ, a_0, b_0, c_0 die Grössen u, v, w eingeführt werden müssen, welche mit jenen durch die Gleichungen:

$$u = \sigma v + \tau w, \quad (b_0 - i)v + 2c_0 w = 0$$

verbunden sind, so soll nunmehr:

$$(\mathfrak{W}) \qquad \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \mathrm{Atr}(u, v, w)$$

---

[1] Sitzungsbericht vom 4. April 1889, Stück XIX.

gesetzt werden. Die Function $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ kann demnach durch die Gleichung definirt werden:

$$(\mathfrak{W}^0)\quad \mathrm{Atr}(u, v, w) = 2e^{\left(\tau u + \frac{1}{6} w\right)\frac{\pi i}{v}} \sin\frac{u\pi}{v} \prod_{\varepsilon, n}\left(1 - e^{(nw + \varepsilon u)\frac{2\pi i}{v}}\right),$$

$$(\varepsilon = +1, -1;\; n = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.})$$

und τ ist hierbei als diejenige reelle Grösse bestimmt, für welche die Grösse:

$$\frac{u - \tau w}{v}$$

reell wird.

Es ist klar, dass der Werth von $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ nur von den Verhältnissen $u : v : w$ abhängt, aber der Grenzwerth:

$$\lim_{\sigma=0, \tau=0} \frac{\mathrm{Atr}(\sigma v + \tau w, v, w)}{\sigma v + \tau w},$$

welcher mit $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ bezeichnet werden möge, ist nicht bloss von dem Verhältnisse $v : w$ abhängig. Bedeutet $\mathrm{A}'(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ die nach σ genommene Ableitung der Function $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, so ist gemäss der Gleichung $(\mathfrak{W})$:

$$\mathrm{A}'(0, 0, a_0, b_0, c_0) = v\,\mathrm{Atr}'(0, v, w),$$

und es finden zwischen den Functionen ϑ und Atr folgende Relationen statt:

$$(\mathfrak{W}')\quad \begin{aligned} 2\pi\left(\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)\right)^2 &= v e^{-\frac{2\tau u\pi i}{v}} \mathrm{Atr}'(0, v, w)\left(\mathrm{Atr}(u, v, w)\right)^2, \\ 2\pi\left(\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\right)^2 &= \left(v\,\mathrm{Atr}'(0, v, w)\right)^3. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun, wie oben, zwei Systeme (u, v, w), (u', v', w') als aequivalent, wenn zwischen denselben die Beziehungen bestehen:

$$u = u', \; v = \alpha v' + \alpha' w', \; w = \beta v' + \beta' w' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

so sind die zwölften Potenzen der Functionen $\mathrm{Atr}(u, v, w)$ und $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ Invarianten dieser Aequivalenz:

$$(u, v, w) \backsim (u', v', w');$$

denn mit Hülfe der für die ϑ-Function geltenden Transformationsgleichungen:

$$\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w + v}{v}\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right),$$

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{v}{w}\right) = \sqrt{\frac{-wi}{v}}\; e^{\frac{u^2 w\pi i}{v}}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

erschliesst man aus den Relationen ($\mathfrak{W}'$), dass für ganze Zahlen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, welche die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllen, die Gleichung besteht:

$$(\mathfrak{W}'') \qquad \mathrm{Atr}(u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}} \mathrm{Atr}(u, v, w),$$

in welcher h einen ganzzahligen Werth hat, und es findet demgemäss auch für $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ die Transformationsrelation statt:

$$(\mathfrak{W}''') \qquad \mathrm{Atr}'(0, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}} \mathrm{Atr}'(0, v, w).$$

Der Ausdruck ($\mathfrak{B}$) geht, wenn man darin gemäss den Gleichungen ($\mathfrak{W}'$) die Invarianten $\mathrm{Atr}(u, v, w)$, $\mathrm{Atr}'(0, v, w)$ für die ϑ-Functionen einsetzt, in folgenden über:

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i} \frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u, v, w)}.$$

und dessen Invarianteneigenschaft für die Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

leuchtet unmittelbar ein, da erstens der mit $e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}$ multiplicirte Ausdruck, vermöge der Gleichungen ($\mathfrak{W}''$) und ($\mathfrak{W}'''$), beim Übergange von v, w in $\alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w$ ungeändert bleibt, und da zweitens, weil hierbei zugleich die Grössen

$$\sigma \quad , \qquad \tau \quad , \qquad \sigma_0 \quad , \qquad \tau_0$$

in

$$\beta'\sigma - \beta\tau, \quad -\alpha'\sigma + \alpha\tau, \quad \beta'\sigma_0 - \beta\tau_0, \quad -\alpha'\sigma_0 + \alpha\tau_0$$

übergehen, auch der Factor $e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}$ seinen Werth nicht ändert.

Durch den Ausdruck ($\mathfrak{B}^0$) wird es also in Evidenz gesetzt, dass derselbe eine Function der sechs Grössen:

$$\sigma_0, \quad \tau_0, \quad \sigma, \quad \tau, \quad v, \quad w.$$

oder der vier Grössen:

$$u_0, \quad u, \quad v, \quad w,$$

darstellt, welche eine Invariante der Aequivalenzen:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w'),$$
$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w'),$$

ist, wenn die Beziehung der beiden aequivalenten Grössensysteme durch die Relationen:

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0\,, \quad \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0\,, \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau\,, \quad \tau' = \alpha'\sigma + \beta'\tau\,, \\ v' &= \beta' v - \alpha' w\,, \quad w' = -\beta v + \alpha w\,, \\ u_0 &= \sigma_0 v + \tau_0 w = \sigma_0' v' + \tau_0' w', \\ u &= \sigma v + \tau w = \sigma' v' + \tau' w' \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

definirt wird.

Bezeichnet man zur Abkürzung die durch den Ausdruck ($\mathfrak{B}^{\circ}$) dargestellte Function mit $\mathrm{Atr}(u_0, u, v, w)$, so bestehen die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{X})\qquad \begin{aligned} \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) &= e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}\, \frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\, \mathrm{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\, \mathrm{Atr}(u, v, w)}, \\ \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) &= \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1), \end{aligned}$$

von denen die erstere die Definition der Function $\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w)$ enthält, und die letztere ihre Invarianteneigenschaft darlegt.

§. 9.

Bei Anwendung der für zwei beliebige ganze Zahlen s, t bestehenden Relation:

$$\vartheta\begin{pmatrix} u + sv + tw, & w \\ v & v \end{pmatrix} = e^{-(t^2 w + 2tu + sv + tv)\frac{\pi i}{v}}\, \vartheta\begin{pmatrix} u, & w \\ v & v \end{pmatrix}$$

ergiebt sich aus der Definition von $\mathrm{Atr}\,(u, v, w)$, welche in der ersten von den Gleichungen ($\mathfrak{W}'$) enthalten ist, die Relation:

$$\mathrm{Atr}\,(u + sv + tw, v, w) = (-1)^{(st + s + t)}\, e^{(s\tau - t\sigma)\pi i}\, \mathrm{Atr}\,(u, v, w),$$

aus welcher für die Function $\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w)$ die Gleichung folgt:

$$(\mathfrak{X})\quad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0 + s_0 v + t_0 w, u + sv + tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\, \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w).$$

Nun ist:

$$u_0 + s_0 v + t_0 w = (\sigma_0 + s_0)v + (\tau_0 + t_0)w, \quad u + sv + tw = (\sigma + s)v + (\tau + t)w;$$

setzt man also:

$$(\mathfrak{B}'')\qquad \begin{aligned} \sigma''_0 &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0, & \tau''_0 &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma'_0, \\ \sigma'' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & \tau'' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', \\ v'' &= \beta' v - \alpha' w, & w' &= -\beta v + \alpha w, \\ u''_0 &= \sigma''_0 v'' + \tau''_0 w'' = u + \gamma_0 v'' + \gamma'_0 w'', \\ u'' &= \sigma'' v'' + \tau'' w'' = u + \gamma v'' + \gamma' w'', \end{aligned}$$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \gamma_0, \gamma'_0$ ganze Zahlen bedeuten, für welche

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

ist, so kommt:

$$\mathrm{Atr}(u''_0, u'', v'', w'') = e^{(\gamma\tau''_0 - \gamma'\sigma''_0)2\pi i}\, \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\mathfrak{X}')\quad \overline{\mathrm{Atr}}(u''_0, u'', v'', w'') = e^{((\alpha'\gamma - \alpha\gamma')\sigma_0 + (\beta'\gamma - \beta\gamma')\tau_0)2\pi i}\, \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)\,2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = \overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w),$$

so ergiebt sich aus der Gleichung $(\mathfrak{X}')$ die folgende:

$$\mathrm{Atr}_1(u_0'', u'', v'', w'') = e^{(\gamma_0\tau'' - \gamma_0'\sigma'')\,2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\mathfrak{X}'')\quad \overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0'', u'', v'', w'') = e^{((\alpha'\gamma_0 - \alpha\gamma_0')\sigma + (\beta'\gamma_0 - \beta\gamma_0')\tau)\,2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w).$$

Nimmt man $\gamma = \gamma' = 0$, so ist:

$$\mathrm{Atr}(u_0'', u'', v'', w'') = \mathrm{Atr}(u_0, u, v, w),$$

und es zeigt sich also, dass $\mathrm{Atr}(u_0, u, v, w)$ nicht bloss, wie im vorigen Paragraphen dargethan ist, eine Invariante der Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

sondern auch eine Invariante der weiteren Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0 + \gamma_0 v + \gamma_0' w, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w)$$

ist, in welcher $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma_0, \gamma_0'$ beliebige, nur der Bedingung:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

unterworfene, ganze Zahlen bedeuten.

Nimmt man aber $\gamma_0 = \gamma_0' = 0$, so ist:

$$\overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0'', u'', v'', w'') = \mathrm{Atr}_1(u_0, u, v, w),$$

und es zeigt sich also, dass die Function $\mathrm{Atr}_1(u_0, u, v, w)$ eine Invariante der Aequivalenz:

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u + \gamma v + \gamma' w, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w)$$

ist, in welcher $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ ganze Zahlen sind, welche nur die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllen müssen.

§. 10.

Sind $\sigma_0'', \tau_0'', \sigma'', \tau''$ irgend welche reelle Grössen und $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ irgend welche der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügende ganze Zahlen, so lassen sich offenbar die ganzen Zahlen:

$$s_0, t_0, s, t$$

so bestimmen, dass die durch die Gleichungen:

$$\sigma_0'' = \alpha(\sigma_0 + s_0) + \beta(\tau_0 + t_0), \qquad \tau_0'' = \alpha'(\sigma_0 + s_0) + \beta'(\tau_0 + t_0),$$
$$\sigma'' = \alpha(\sigma + s) + \beta(\tau + t)\quad, \qquad \tau'' = \alpha'(\sigma + s) + \beta'(\tau + t)$$

definirten Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ nicht negativ und kleiner als Eins werden. Nimmt man alsdann in den Gleichungen $(\mathfrak{V}'')$ des vorigen Paragraphen:

$$\gamma_0 = \alpha s_0 + \beta t_0, \quad \gamma'_0 = \alpha' s_0 + \beta' t_0, \quad \gamma = \alpha s + \beta t, \quad \gamma' = \alpha' s + \beta' t,$$

so geht die Gleichung $(\mathfrak{X}')$ in folgende über:

$$(\mathfrak{X}^0) \qquad \mathrm{Atr}\,(u''_0, u'', v'', w'') = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\,\mathrm{Atr}\,(u_0, u, v, w),$$

mittels deren sich die mit Atr bezeichnete Function irgend welcher Argumente u''_0, u'', v'', w'' auf eine solche zurückführen lässt, bei welcher die Argumente v, w durch Transformationsgleichungen:

$$v = \alpha v'' + \alpha' w'', \quad w = \beta v'' + \beta' w'' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

mit gegebenen Coefficienten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, aus den Argumenten v'', w'' hervorgehen, während die durch die Gleichungen:

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \quad u = \sigma v + \tau w$$

bestimmten reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ sämmtlich innerhalb des Intervalls $(0, 1)$ oder an seiner unteren Grenze liegen. Dabei ist zu bemerken, dass die Function Atr (u_0, u, v, w), wie aus der am Schlusse des §. 8 gegebenen Definition $(\mathfrak{X})$ hervorgeht, dann und nur dann keinen endlichen Werth hat, wenn u_0 oder u gleich Null wird, d. h. also, wenn die beiden Argumente σ_0 und τ_0 oder die beiden Argumente σ und τ gleichzeitig Null werden.

Für die Function $\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w)$, in welcher:

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \quad u = \sigma v + \tau w \qquad (0 \leqq \tau_0 < 1, \; 0 \leqq \tau < 1)$$

ist, gilt gemäss der im §. 7 hergeleiteten Gleichung $(\mathfrak{T}_1)$ die Reihenentwickelung:

$$(\mathfrak{Y}) \quad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = -\frac{2\pi i}{v}\, e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m, n} \varepsilon\, e^{(\varepsilon m(\varepsilon n w + u) + \varepsilon n u_0)\frac{2\pi i}{v}}.$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = +1; & m = 0, 1, 2, \ldots M; & n = 0, 1, 2, \ldots N \\ \varepsilon = -1; & m = 1, 2, \ldots M; & n = 1, 2, \ldots N \end{pmatrix}$$

Ferner geht aus der bereits im §. 6 angewendeten, dort mit $(\mathfrak{O})$ bezeichneten Formel:

$$(\mathfrak{Z}^0) \qquad \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \frac{e^{-2m\zeta\pi i}}{z+m} = \frac{2\pi i\, e^{2\zeta z\pi i}}{e^{2z\pi i} - 1}$$

die für jeden positiven Bruch ζ und für jede beliebige complexe (nicht reelle) Grösse z gültige Gleichung hervor:

$$(\mathfrak{Z}) \qquad \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \frac{e^{-2\zeta(m+z)\pi i}}{m+z} = -2\varepsilon\pi i \lim_{M=\infty} \sum_{m} e^{2\varepsilon m z\pi i}.$$

in welcher ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils der com-

plexen Grösse z bedeutet, und die Summation rechts für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe:

$$m = 0, 1, 2, \ldots M,$$

für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe:

$$m = 1, 2 \ldots M$$

zu erstrecken ist.

Nimmt man in der Gleichung ($\mathfrak{Z}$):

$$\zeta = \tau_0, \quad z = \frac{\varepsilon m v + u}{v} = \sigma + (\varepsilon n + \tau)\frac{w}{v},$$

so kann dieselbe auf die in ($\mathfrak{Y}$) vorkommende Summation:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m} \varepsilon e^{\varepsilon m(\varepsilon n w + u)\frac{2\pi i}{v}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1; & m = 0, 1, 2, \ldots M \\ \varepsilon = -1; & m = 1, 2 \ldots M \end{pmatrix}$$

angewendet werden, weil dort die Zahl n für $\varepsilon = +1$ die Werthe:

$$0, 1, 2, \ldots N,$$

für $\varepsilon = -1$ aber nur die Werthe:

$$1, 2, \ldots N$$

annimmt und also auf Grund der Voraussetzungen, dass $0 < \tau < 1$ und der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{v}$ positiv sei, ε stets das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils der complexen Grösse:

$$\sigma + (\varepsilon n + \tau)\frac{w}{v} \text{ oder } \varepsilon m v + u$$

ist. Benutzt man demnach die in der angegebenen Weise aus ($\mathfrak{Z}$) resultirende, sowohl für $\varepsilon = +1$ als auch für $\varepsilon = -1$ geltende Gleichung:

$$-\frac{2\varepsilon\pi i}{v} \lim_{M=\infty} \sum_m e^{\varepsilon m(\varepsilon n w + u)\frac{2\pi i}{v}} = \lim_{M=\infty} \sum_m \frac{e^{-\tau_0(u + mv + \varepsilon n w)\frac{2\pi i}{v}}}{u + mv + \varepsilon n w}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = +1, & m = 0, 1, 2, \ldots M \\ \varepsilon = -1, & m = 1, 2 \ldots M \end{pmatrix} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M)$$

für die Ausführung der auf m bezüglichen Summation auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{Y}$), so kommt:

$$\mathrm{Atr}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, m, n} \frac{e^{(\varepsilon n \sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + \varepsilon n w}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad \varepsilon = +1: n = 0, 1, 2, \ldots N; \quad \varepsilon = -1; n = 1, 2, \ldots N)$$

oder also:

$$(\mathfrak{Z}') \qquad \mathrm{Atr}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m, n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw}.$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

Von den bei der Herleitung dieser Gleichung gebrauchten Bedingungen:

$$0 < \tau_0 < 1, \quad 0 < \tau < 1$$

kann nunmehr abgesehen werden. Denn die Gleichung ($\mathfrak{Z}'$) behält ihre Gültigkeit, wenn man darin $\tau_0 + t_0$ für τ_0 und $\tau + t$ für τ substituirt, vorausgesetzt dass t_0 und t irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Bei dieser Substitution geht nämlich die Gleichung ($\mathfrak{Z}'$) in folgende über:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0 + t_0 w\,,\, u + tw\,,\, v\,,\, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)\,2\pi i}}{u + mv + (n+t)\,w}\,,$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

welche vermöge der Relation ($\mathfrak{X}$) im §. 9 so dargestellt werden kann:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0\,,\, u\,,\, v\,,\, w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{((n+t)\,\sigma_0 - m\tau_0)\,2\pi i}}{u + mv + (n+t)\,w}\,,$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

und es ist also nur zu zeigen, dass der Werth der Summe auf der rechten Seite sich von demjenigen der Summe auf der rechten Seite von ($\mathfrak{Z}'$) nicht unterscheidet. Nun ist die Differenz dieser beiden Summen gleich:

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\varepsilon, h} \sum_{m=-M}^{m=+M} \varepsilon \frac{e^{((\varepsilon N + h)\,\sigma_0 - m\tau_0)\,2\pi i}}{u + mv + (\varepsilon N + h)\,w} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1;\ h = 1, 2, \ldots t \\ \varepsilon = -1;\ h = 0, 1, \ldots t-1 \end{pmatrix},$$

und wenn man hierin die Summation in Beziehung auf m gemäss der Formel ($\mathfrak{Z}^0$) ausführt, indem man darin:

$$\zeta = \tau_0\,, \quad z = \frac{u + (\varepsilon N + h)\,w}{v}$$

setzt, so kommt:

$$\frac{e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}}{v} \lim_{N=\infty} \sum_{\varepsilon, h} \varepsilon \frac{e^{(\varepsilon N + h)(\sigma_0 v + \tau_0 w)\frac{2\pi i}{v}}}{e^{(u + (\varepsilon N + h)\,w)\frac{2\pi i}{v}} - 1} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = +1;\ h = 1, 2, \ldots t \\ \varepsilon = -1;\ h = 0, 1, \ldots t-1 \end{pmatrix}.$$

Jedes der $2t$ Glieder, aus denen diese Summe besteht, verschwindet aber für $N = \infty$, da für $\varepsilon = +1$ der Grenzwerth gleich demjenigen von:

$$e^{\tau_0 (N + h) \frac{2w\pi i}{v}},$$

für $\varepsilon = -1$ gleich demjenigen von:

$$e^{(1 - \tau_0)(N - h) \frac{2w\pi i}{v}}$$

wird, und da sowohl τ_0 als auch $1-\tau_0$ positiv, also der reelle Theil beider Exponenten von e negativ ist. Die Gültigkeit der Gleichung ($\mathfrak{Z}'$) ist hiernach nur noch an die Bedingung geknüpft, dass weder τ noch τ_0 einen ganzzahligen Werth habe, und dass der mit i multiplicirte Theil von $\dfrac{w}{v}$ positiv sei.

§. 11.

Setzt man, wie in den Substitutionsgleichungen ($\mathfrak{B}'$) des §. 8:

$$\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0\,,\quad \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0\,,\qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$
$$v' = \beta' v - \alpha' w\,,\quad w' = -\beta v + \alpha w$$

und führt die hierdurch bestimmten Grössen v', w', σ_0', τ_0' in der Gleichung ($\mathfrak{Z}'$) des vorigen Paragraphen ein, so kommt:

$$\overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v', w') = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\overrightarrow{\sum_{m,n}}\frac{e^{(n\sigma_0' - m\tau_0')\,2\pi i}}{u + mv' + nw'}\quad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}.$$

Da nun gemäss der zweiten von den Gleichungen ($\mathfrak{X}$) im §. 8:

$$\mathrm{Atr}\,(u_0, u, v', w') = \mathrm{Atr}\,(u_0, u, v, w)$$

ist, so resultirt, wenn noch:

$$m' = m\beta' - n\beta\,,\quad n' = -m\alpha' + n\alpha$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$(\mathfrak{Z}'')\qquad \overline{\mathrm{Atr}}\,(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\overrightarrow{\sum_{m,n}}\frac{e^{(n'\sigma_0 - m'\tau_0)\,2\pi i}}{u + m'v + n'w},$$

$$(m' = m\beta' - n\beta,\ n' = -m\alpha' + n\alpha;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

welche die Gleichung ($\mathfrak{Z}'$) als speciellere mit umfasst.

Die Gleichung ($\mathfrak{Z}''$) kann auch so dargestellt werden:

$$(\mathfrak{Z}''')\quad \overline{\mathrm{Atr}}\,(\sigma_0 v + \tau_0 w\,,\ \sigma v + \tau w\,,\ v\,,\ w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\overrightarrow{\sum_{m,n}}\frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w}.$$

$$(\alpha m + \beta n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M,\ \ \alpha' m + \beta' n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

Hier bedeuten α, β, α', β' irgend welche ganze Zahlen, für die $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, v, w irgend welche complexe Grössen, für die $\dfrac{wi}{v}$ einen negativen reellen Theil hat, und die reellen Grössen σ_0, τ_0, σ, τ sind einzig und allein der Beschränkung unterworfen, dass weder τ_0' noch τ', d. h. also

weder $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$ noch $\alpha'\sigma + \beta'\tau$

einen ganzzahligen Werth haben darf.

Wenn man die Function von u_0, u, v, w auf der linken Seite der Gleichung ($\mathfrak{Z}''$) oder ($\mathfrak{Z}'''$), mit Hülfe der Gleichungen ($\mathfrak{X}$) und ($\mathfrak{W}'$), im §. 8 durch ϑ-Functionen ausdrückt, so gelangt man zu jener am Schlusse des §. 7 aufgestellten »Hauptgleichung« ($\mathfrak{U}_1$). Das in derselben enthaltene Resultat ist also hiermit nochmals begründet, und zwar insofern auf entgegengesetztem Wege, als dort im §. 7 von der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{Z}''$) oder ($\mathfrak{Z}'''$) ausgegangen und deren Summation mittels ϑ-Functionen bewirkt worden ist, während hier in den §§. 8—11 der aus ϑ-Functionen zusammengesetzte Ausdruck ($\mathfrak{B}$) zum Ausgangspunkt genommen und nach Darlegung seiner Invarianteneigenschaft in jene zweifach unendliche Reihe entwickelt worden ist, welche die rechte Seite der Gleichung ($\mathfrak{Z}'''$) bildet, und welche in der citirten Hauptgleichung ($\mathfrak{U}_1$) mit $\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w)$ bezeichnet ist. Darauf, dass bei dieser letzteren Methode die Darlegung der charakteristischen Eigenschaften des ϑ-Ausdrucks, auf welchen die Summation der Reihe $\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w)$ führt, der weiteren Untersuchung vorangeschickt worden ist, beruht ihre grössere Durchsichtigkeit.

§. 12.

Die Gleichung ($\mathfrak{Z}'''$) im vorigen Paragraphen ergiebt für die Function $\operatorname{Atr}_1(u_0, u, v, w)$, gemäss deren Definition im §. 9, die Reihenentwickelung:

$$(\mathfrak{Z}^{\mathrm{IV}})\quad \overline{\operatorname{Atr}}_1(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{((\tau+n)\sigma_0-(\sigma+m)\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$
$$(\alpha m+\beta n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\ \alpha' m+\beta' n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

und aus dieser erhellt unmittelbar, dass ihr Werth ungeändert bleibt, wenn man σ oder τ um eine ganze Zahl vermehrt oder vermindert.

Aus der am Schlusse des §. 8 gegebenen Definition der Function $\operatorname{Atr}(u_0, u, v, w)$:

$$\overline{\operatorname{Atr}}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\,\frac{\operatorname{Atr}'(0, v, w)\operatorname{Atr}(u_0+u, v, w)}{\operatorname{Atr}(u_0, v, w)\operatorname{Atr}(u, v, w)}$$

ergiebt sich ferner, dass der Werth der Function:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\operatorname{Atr}}(u_0, u, v, w)\ \text{oder}\ e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\operatorname{Atr}}(\sigma_0 v+\tau_0 w, \sigma v+\tau w, v, w)$$

ungeändert bleibt, wenn man u mit u_0, oder also zu gleicher Zeit σ mit σ_0 und τ mit τ_0 vertauscht. Es ist demnach:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\,\overline{\operatorname{Atr}}(\sigma_0 v+\tau_0 w, \sigma v+\tau w, v, w) = e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\,\overline{\operatorname{Atr}}(\sigma v+\tau w, \sigma_0 v+\tau_0 w, v, w),$$

und man gelangt daher mittels der Gleichung ($\mathfrak{Z}'''$) zu der merkwürdigen Reihenrelation:

$$(\mathfrak{Z}^{\mathrm{v}})\quad e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}$$

$$=e^{(\sigma\tau_0-\sigma_0\tau)\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w},$$

$$(\alpha m+\beta n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\pm M;\quad \alpha' m+\beta' n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\pm N)$$

immer vorausgesetzt, dass $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ genügen, und dass weder $\alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0$ noch $\alpha'\sigma+\beta'\tau$ einen ganzzahligen Werth hat.

XXI.

Die im §. 7 des vorigen Abschnitts entwickelte Hauptgleichung ($\mathfrak{A}_1$), ebenso wie die damit übereinstimmende Gleichung ($\mathfrak{Z}'''$) im §. 11, legt dar, dass die Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$

wenn man die Summation auf alle den Ungleichheitsbedingungen:

$$|\alpha m+\beta n|\leq M,\quad |\alpha' m+\beta' n|\leq N$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt und alsdann M und N ins Unendliche wachsen lässt, stets einerlei Werth erhält, wie man auch die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ gemäss, wählen mag. Dieses Resultat zeigt sich an den bezeichneten Stellen als eine Folge der Invarianteneigenschaften des durch ϑ-Functionen ausgedrückten Werthes der Reihe, Eigenschaften, die nur mit Hülfe der linearen Transformation der ϑ-Functionen erschlossen werden können. Desshalb ist es aber von besonderem Interesse, das erwähnte Resultat direct aus der Natur der Reihe herzuleiten, zumal alsdann umgekehrt ein Theil der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen daraus hervorgeht. Es ist nämlich in der Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{u+mv+nw}$$

überhaupt ein neues Fundament für die Theorie der elliptischen und ϑ-Functionen gewonnen, auf welchem sich wenigstens gewisse Theile

dieser Theorie in höchst einfacher Weise aufbauen. Auch der Fortschritt von den Kreisfunctionen zu den Quotienten von ϑ-Functionen wird dabei durch den Übergang von der einfachen Reihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2m\tau\pi i}}{u+mv}$$

zu jener Doppelreihe deutlich illustrirt: denn die genaue Analogie der beiden Formeln:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \frac{(-1)^m e^{-(u+m)2\tau\pi i}}{u+m} = \frac{\pi}{\sin u\pi} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}<\tau<\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{(-1)^m e^{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma_0-(u+m)\tau_0\right)2\pi i}}{u+m+\left(n+\frac{1}{2}\right)w} = \frac{\vartheta'(0,w)\,\vartheta(u_0+u,w)}{\vartheta_0(u_0,w)\,\vartheta_0(u,w)}$$
$$(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M;\; n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N)$$

zeigt, dass man den schon in meiner Notiz vom 22. December 1881 eingeführten ϑ-Quotienten[1], welcher auf der rechten Seite der letzteren Formel steht, als die, dem reciproken Sinus oder der Cosecante entsprechende, nächst höhere Function betrachten kann.

Ich bemerke noch, dass die letztere Formel aus der Gleichung $(\mathfrak{U}_1)$ im §. 7 hervorgeht, wenn man darin für:

$$\begin{array}{lcccc} & \tau_0\ , & u_0\ , & u\ , & v \\ \text{beziehungsweise:} & \tau_0+\frac{1}{2}\ , & u_0+\frac{1}{2}w\ , & u+\frac{1}{2}w\ , & 1 \end{array}$$

setzt.

§. 1.

Den Ausgangspunkt der folgenden Entwickelungen bildet die endliche Reihe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}} \qquad (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M).$$

Hierbei bedeutet M eine positive und ρ eine nicht negative ganze Zahl: σ_0 und τ_0 sind beliebige reelle und u, v, w beliebige complexe Grössen, die nur insoweit beschränkt sind,

> dass weder σ_0 noch τ_0 eine ganze Zahl sein darf, dass ferner das Verhältniss $v:w$ nicht reell, und dass $u+mv+nw$ für kein Werthsystem (m,n) gleich Null sein darf.

Der eigentliche Zweck der Untersuchung besteht darin, das Verhalten der Reihe zu ermitteln, wenn die Summation über alle Zahlen m, n von $-\infty$ bis $+\infty$, und zwar in gewissen verschiedenen Reihenfolgen, erstreckt wird. Es würde demgemäss, da die Reihe für $\rho>1$

[1] Monatsbericht vom December 1881, S. 1168 (I′).

absolut convergirt, genügen $\rho = 0$ und $\rho = 1$ zu nehmen, aber die Entwickelung wird durch eine solche Beschränkung nicht vereinfacht.

Die Reihe kann auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\sum_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, m, n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0) 2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_0 = +1; & m = 0, 1, \dots M, \\ \varepsilon_0 = -1; & m = 1, 2, \dots M, \\ \varepsilon_1 = +1; & n = 0, 1, \dots M, \\ \varepsilon_1 = -1; & n = 1, 2, \dots M. \end{pmatrix}.$$

Ist nun:

$$w = v(\varepsilon\phi + \varepsilon'\psi i),$$

wo ϕ und ψ reelle positive Grössen und $\varepsilon, \varepsilon'$ positive oder negative Einheiten bedeuten, und bestimmt man die Grössen a, b, c so, dass die Gleichung:

$$(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)\,(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon'\phi i) = (am + bn + c)\,v$$

für unbestimmte Werthe von m und n erfüllt wird, so sind a und b complexe Grössen mit positiven reellen Theilen. Denn der reelle Theil von a ist 2ψ und derjenige von b ist $\phi\psi$. Der reelle Theil von $am + bn + c$ wird demnach positiv sein, wenn der Zahlenwerth von m und n eine gewisse Grösse übersteigt. Erfüllt m_0 oder n_0 diese Bedingung, so kann bei der Summation:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_{m, n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0) 2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} m = m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \dots m_0 + h - 1 \\ n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots n_0 + k - 1 \end{pmatrix}.$$

bei welcher h, k beliebige positive Zahlen bedeuten, der Factor:

$$\frac{1}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}},$$

welcher gleich:

$$\frac{\left(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon_0\varepsilon - \varepsilon_1)\,\varepsilon'\phi i\right)^{1+\varrho}}{v^{1+\varrho}(am + bn + c)^{1+\varrho}}$$

ist, nach Dirichlet's Vorgang durch den Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}') \qquad \frac{\left(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon_0\varepsilon - \varepsilon_1)\,\varepsilon'\phi i\right)^{1+\varrho}}{v^{1+\varrho}\Gamma(1 + \rho)} \int_0^\infty e^{-(am + bn + c)z} z^\varrho \, dz$$

ersetzt werden, da der reelle Theil von $am + bn + c$ für die bei der Summation in $(\mathfrak{A})$ vorkommenden Werthe von m und n positiv ist. Bezeichnet man den Factor des Integrals in $(\mathfrak{A}')$ zur Abkürzung mit A und setzt:

$$x = 2\varepsilon_0\tau_0\pi, \quad y = -2\varepsilon_1\sigma_0\pi,$$

so resultirt für die mit $(\mathfrak{A})$ bezeichnete Summe der Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}^0) \quad A e^{-(m_0 x + n_0 y) i} \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-h(az + xi)}\right)\left(1 - e^{-k(bz + yi)}\right)}{\left(1 - e^{-(az + xi)}\right)\left(1 - e^{-(bz + yi)}\right)} e^{-(am_0 + bn_0 + c)z} z^\varrho \, dz.$$

Der absolute Werth des Ausdrucks, welcher unter dem Integralzeichen mit:

$$e^{-(am_0+bn_0+c)z}\, z^\rho\, dz$$

multiplicirt ist, bleibt innerhalb der Integrationsgrenzen stets unter einer gewissen Grösse G^2. Denn erstens ist der absolute Werth jedes der beiden Factoren im Zähler:

$$1-e^{-h(az+xi)}\,,\quad 1-e^{-k(bz+yi)}$$

kleiner als 2. Zweitens wird wegen der Voraussetzungen, dass die reellen Theile von a und b positiv sind, dass ferner weder σ_0 noch τ_0 eine ganze Zahl und also weder x noch y ein gerades Vielfaches von π ist, keiner der beiden Factoren im Nenner:

$$1-e^{-(az+xi)}\,,\quad 1-e^{-(bz+yi)}$$

für irgend einen Werth von z gleich Null, und es ist daher eine Grösse $\frac{1}{2}G$ so zu bestimmen, dass für alle nicht negativen Werthe von z sowohl der reciproke Werth von $\left|1-e^{-(az+xi)}\right|$ als auch derjenige von $\left|1-e^{-(bz+yi)}\right|$ kleiner als $\frac{1}{2}G$ bleibt. Diese Bestimmung soll nun im folgenden Paragraphen in der That gegeben werden.

§. 2.

Setzt man $a=a_0+a_1i$, so ist a_0 positiv, und das Quadrat des absoluten Werthes von $1-e^{-(az+xi)}$ ist gleich:

$$1-2e^{-a_0z}\cos(x+a_1z)+e^{-2a_0z} \text{ oder } \left(e^{-a_0z}-\cos(x+a_1z)\right)^2+\sin^2(x+a_1z).$$

Der absolute Werth von $1-e^{-(az+xi)}$ ist daher stets grösser als jede der beiden Grössen:

$$\left|\sin(x+a_1z)\right|\,,\quad 1-e^{-a_0z}\,.$$

Die Grösse x kann in dem Intervalle $(-\pi, +\pi)$ liegend angenommen werden, und da der Werth $x=0$ durch die obige Voraussetzung, dass τ_0 keinen ganzzahligen Werth haben soll, ausgeschlossen ist, so hat man $0<|x|\leqq\pi$. Setzt man also zur Vereinfachung:

$$|x|=\xi\,,\quad |a_1|=\alpha,$$

so ist:

$$0<\xi\leqq\pi\,,\quad \left|\sin(x+a_1z)\right|=\left|\sin(\xi\pm\alpha z)\right|,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem a_1 und x gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Wenn nun erstens $\alpha = 0$ ist, so hat man für den absoluten Werth von $1 - e^{-(\alpha z + xi)}$ die Ungleichheit:

$$\left|1 - e^{-(\alpha z + xi)}\right| \geqq \sin\xi.$$

und falls $\xi = \pi$ ist:

$$\left|1 - e^{-(az + \pi i)}\right| = 1 + e^{-az} > 1.$$

Wenn zweitens $0 < \xi \leqq \frac{1}{2}\pi$ ist, so nimmt $|\sin(\xi + \alpha z)|$ von $z = 0$ bis $z = \frac{\pi - 2\xi}{2\alpha}$ zu, und $|\sin(\xi - \alpha z)|$ nimmt von $z = 0$ bis $z = \frac{\xi}{\alpha}$ ab.

Wenn drittens $\frac{1}{2}\pi \leqq \xi \leqq \pi$ ist, so nimmt $|\sin(\xi + \alpha z)|$ von $z = 0$ bis $z = \frac{\pi - \xi}{\alpha}$ ab, und $|\sin(\xi - \alpha z)|$ nimmt von $z = 0$ bis $z = \frac{2\xi - \pi}{2\alpha}$ zu.

Der absolute Werth von $1 - e^{-(az + xi)}$ ist daher

nicht kleiner als $\sin\xi$, wenn $0 < \xi < \frac{1}{2}\pi$, $0 < a_1 x$, $z < \frac{\pi - 2\xi}{2\alpha}$ ist.

nicht kleiner als $\sin\frac{1}{2}\xi$, wenn $0 < \xi \leqq \frac{1}{2}\pi$, $0 > a_1 x$, $z < \frac{\xi}{2\alpha}$ ist.

nicht kleiner als $\sin\frac{1}{2}(\pi + \xi)$, wenn $\frac{1}{2}\pi \leqq \xi < \pi$, $0 < a_1 x$, $z < \frac{\pi - \xi}{2\alpha}$ ist.

nicht kleiner als $\sin\xi$, wenn $\frac{1}{2}\pi < \xi \leqq \pi$, $0 > a_1 x$, $z < \frac{2\xi - \pi}{2\alpha}$ ist.

Da nun überdies der absolute Werth von $1 - e^{-(az + xi)}$ nicht kleiner als der Werth des Ausdrucks:

$$1 - e^{-a_0 z}$$

ist, und da dieser Werth mit wachsendem z zunimmt, so findet die Ungleichheit statt:

$$\left|1 - e^{-(az + xi)}\right| > \mu,$$

wenn man μ gleich der kleineren von den beiden Grössen nimmt:

$$\sin\xi\;,\quad 1 - e^{-(\pi - 2\xi)\frac{a_0}{2\alpha}} \quad \text{im Falle } 0 < \xi < \tfrac{1}{2}\pi,\; 0 < a_1 x,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\xi,\quad 1 - e^{-\xi\frac{a_0}{2\alpha}} \quad \text{im Falle } 0 < \xi \leqq \tfrac{1}{2}\pi,\; 0 > a_1 x,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\xi,\quad 1 - e^{-(\pi - \xi)\frac{a_0}{2\alpha}} \quad \text{im Falle } \tfrac{1}{2}\pi \leqq \xi < \pi,\; 0 < a_1 x,$$

$$\sin\xi\;,\quad 1 - e^{-(2\xi - \pi)\frac{a_0}{2\alpha}} \quad \text{im Falle } \tfrac{1}{2}\pi < \xi < \pi,\; 0 > a_1 x.$$

Für den hierin nicht enthaltenen Fall $\xi = \pi$ wird das Quadrat des absoluten Werthes von $1 - e^{-(az+xi)}$ durch den Ausdruck gegeben:

$$1 + 2e^{-a_0 z} \cos \alpha z + e^{-2a_0 z},$$

dessen Werth von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ abnimmt und überdies stets grösser ist, als das Quadrat von:

$$1 - e^{-a_0 z}.$$

Es findet daher für den Fall $|x| = \pi$ die Ungleichheit statt:

$$\left|1 - e^{-(az+xi)}\right| > \mu,$$

wenn:

$$\mu = 1 - e^{-\frac{1}{2}a_0\pi}$$

genommen wird. Endlich ist, wie schon oben gezeigt worden, für $a_1 = 0$:

$$\left|1 - e^{-(az+xi)}\right| > \mu,$$

wenn:

$$\mu = \sin \xi \quad \text{oder} \quad \mu = 1$$

genommen wird, je nachdem $\xi < \pi$ oder $\xi = \pi$ ist.

Wird nun in derselben Weise eine Grösse ν bestimmt, welche für jeden nicht negativen Werth von z der Ungleichheitsbedingung:

$$\left|1 - e^{-(bz+yi)}\right| \geqq \nu$$

genügt, so braucht man nur die Grösse G, deren Bestimmung den Zielpunkt der vorstehenden Entwickelung bildet, so zu wählen, dass sowohl $\frac{1}{2}G\mu$ als auch $\frac{1}{2}G\nu$ grösser als Eins wird. Denn es ist dann:

$$\left|1 - e^{-(az+xi)}\right| > \frac{2}{G}, \quad \left|1 - e^{-(bz+yi)}\right| > \frac{2}{G},$$

und es findet also in der That, wie schon am Schlusse des §. 1 behauptet worden ist, die Ungleichheit statt:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \left|\frac{\left(1 - e^{-h(az+xi)}\right)\left(1 - e^{-k(bz+yi)}\right)}{\left(1 - e^{-(az+xi)}\right)\left(1 - e^{-(bz+yi)}\right)}\right| < G^2.$$

Hiernach liegt sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des Integralwerthes:

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \int_0^r \frac{\left(1 - e^{-h(az+xi)}\right)\left(1 - e^{-k(bz+yi)}\right)}{\left(1 - e^{-(az+xi)}\right)\left(1 - e^{-(bz+yi)}\right)} e^{-(am_0+bn_0+c)z} z^\rho \, dz$$

innerhalb des durch die beiden Werthe:

$$\pm G^2 \int_0^\infty e^{-(a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0)z} z^\rho \, dz \quad \text{oder} \quad \pm \frac{G^2 \Gamma(1+\rho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0)^{1+\rho}}$$

eingeschlossenen Intervalls, wo a_0, b_0, c_0 die reellen Theile von a, b, c bezeichnen. Dabei ist daran zu erinnern, dass der Voraussetzung nach a_0 und b_0 positiv ist, und dass die Werthe von m_0 und n_0 so gewählt worden sind, dass $a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0$ positiv wird.

§. 3.

Im §. 1 ist gezeigt worden, dass der Werth der mit $(\mathfrak{A})$ bezeichneten Summe durch den Ausdruck $(\mathfrak{A}^0)$, d. h. also durch das aus der Multiplication von $Ae^{-(m_0 x + n_0 y)i}$ mit dem Integral $(\mathfrak{B}^0)$ entstehende Product dargestellt werden kann. Da nun der reelle und der imaginäre Theil des Werthes dieses Integrals, wie sich im §. 2 ergeben hat, absolut kleiner als:

$$\frac{G^2\,\Gamma(1+\rho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0)^{1+\varrho}}$$

und $1+\rho$ positiv ist, so wird der Grenzwerth der mit $(\mathfrak{A})$ bezeichneten Summe gleich Null, sobald nur m_0 oder n_0 ins Unendliche wächst, d. h. es finden die Gleichungen statt:

$$(\mathfrak{C})\quad \begin{aligned} \lim_{m_0=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} &= 0 \\ \lim_{n_0=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} m = m_0, m_0+1, \ldots m_0+h-1 \\ n = n_0, n_0+1, \ldots n_0+k-1 \end{pmatrix},$$

in welchen $\varepsilon_0 = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $1+\rho > 0$ ist und aber weder σ_0 noch τ_0 einen ganzzahligen Werth haben darf.

Diese Gleichungen gelten nicht nur für ganzzahlige sondern auch für beliebige positive Werthe von $1+\rho$; doch sind dabei die Werthe der mehrdeutigen $(1+\rho)$ten Potenz in der besonderen Weise bestimmt, in welcher sie bei der Darstellung durch den Integralausdruck $(\mathfrak{A}')$ im §. 1 fixirt werden.

Aus den Gleichungen $(\mathfrak{C})$ folgt unmittelbar, dass der Werth der Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

sowohl dann, wenn die Summation auf:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = \pm(M+1), \pm(M+2), \ldots \pm(M+r)$$

erstreckt wird, sich mit wachsendem M der Null nähert, als auch dann, wenn über die Werthe:

$$m = \pm(M+1), \pm(M+2), \ldots \pm(M+r); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M$$

summirt wird, und endlich auch, wenn die Summation auf:

$$m, n = \pm(M+1), \pm(M+2), \ldots \pm(M+r)$$

ausgedehnt wird. Es ist aber offenbar das Aggregat dieser drei Summen, wodurch sich die über die Werthe:

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm(M+r) \qquad (r>0)$$

erstreckte Summe von derjenigen unterscheidet, welche man erhält, wenn nur über die Werthe:

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M$$

summirt wird, und hiermit ist nachgewiesen, dass die Summe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}},$$

wenn sie als Function von M mit $F(M)$ bezeichnet wird, die durch die Gleichung:

$$\lim_{M=\infty}\big(F(M+r) - F(M)\big) = 0 \qquad (r>0)$$

charakterisirte Eigenschaft hat, welche — nach der üblichen Ausdrucksweise — die Existenz eines Grenzwerthes:

$$\lim_{M=\infty} F(M)$$

begründet. Durch diesen Grenzwerth soll nunmehr $\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ definirt werden, d. h. also durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}) \quad \mathrm{Ser}_\rho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}},$$

und es soll nur, wie oben, für den Fall $\rho = 0$ der Index o bei $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ weggelassen werden.

§. 4.

Aus der am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Definitionsgleichung $(\mathfrak{D})$ folgt unmittelbar die erste Eigenschaft der Reihe $\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$:

$$(\mathfrak{E}_1) \qquad \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, -w, v),$$

denn der Ausdruck auf der rechten Seite jener Gleichung ($\mathfrak{D}$), und auch u_0, bleibt ungeändert, wenn gleichzeitig:

$$\begin{array}{llllll} m, & n, & \sigma_0, & \tau_0, & v, & w \end{array}$$

in

$$\begin{array}{llllll} -n, & m, & -\tau_0, & \sigma_0, & -w, & v \end{array}$$

verwandelt wird.

Die zweite Eigenschaft:

$$(\mathfrak{E}_2) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w+gv),$$

wo g eine ganze Zahl bedeutet, wird ebenfalls ersichtlich, wenn man die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w+gv)$, in welcher u_0 den Werth:

$$(\sigma_0 - g\tau_0)v_0 + \tau_0(w+gv)$$

hat, und welche also gemäss der Definition ($\mathfrak{D}$) durch:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n(\sigma_0 - g\tau_0) - m\tau_0)2\pi i}}{(u+(m+gn)v+nw)^{1+\varrho}}$$

darzustellen ist, auf folgende Form bringt:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \sum_{m=-M+gn}^{m=+M+gn} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}.$$

Denn der formale Unterschied, welcher zwischen dieser Reihe und der Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, wie sie in der Gleichung ($\mathfrak{D}$) definirt ist, in Beziehung auf die Summationsgrenzen besteht, begründet keinen Werthunterschied der beiden Reihen.

Um dies darzuthun, bemerke ich zuvörderst, dass die Differenz der beiden Reihen durch das Aggregat von vier Reihen dargestellt werden kann:

$$\sum_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, m, n} \frac{\varepsilon_0 e^{\varepsilon_1(n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u+\varepsilon_0\varepsilon_1 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}},$$

in welchen die Summation für $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = +1$ auf:

$$m = M+1, M+2, \ldots M+gn; \; n = 0, 1, 2, \ldots M$$

zu erstrecken ist, für $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = -1$ auf:

$$m = M+1, M+2, \ldots M+gn; \; n = 1, 2, \ldots M,$$

für $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = +1$ auf:

$$m = M-gn+1, M-gn+2, \ldots M; \; n = 0, 1, 2, \ldots M,$$

und für $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = -1$ auf:

$$m = M-gn+1, M-gn+2, \ldots M; \; n = 1, 2, \ldots M,$$

und deren Grenzwerth dann für $M = \infty$ zu nehmen ist. Indem man nun jede der vier Reihen, wie oben, durch den Integralausdruck:

$$(\mathfrak{A}) \qquad A\int_0^\infty \sum_{n,m} e^{-(am+bn+c)z-(mx+ny)i} z^\rho dz \qquad (x = 2\varepsilon_0\varepsilon_1\tau_0\pi,\ y = -2\varepsilon_1\sigma_0\pi)$$

ersetzt, überzeugt man sich leicht davon, dass ihr Werth sich mit wachsendem M der Null nähert.

Bei Ausführung der Summation in Beziehung auf m geht nämlich der Ausdruck unter dem Integralzeichen in folgenden über:

$$\frac{\varepsilon_0 e^{-(M+1)(az+xi)}}{1-e^{-(az+xi)}} \sum_n e^{-n(\varepsilon_0 g(az+xi)+bz+yi)},$$

in welchem die Summation, je nach den beiden oben durch $\varepsilon_1 = +1$ und $\varepsilon_1 = -1$ unterschiedenen Fällen, auf $n = 0, 1, 2, \ldots M$ oder $n = 1, 2, \ldots M$ zu erstrecken ist. Es kommt also:

$$\varepsilon_0 \frac{e^{-(M+1)(az+xi)-\phi(z)} - e^{-(M+1)((1+\varepsilon_0 g)(az+xi)+bz+yi)}}{\left(1-e^{-(az+xi)}\right)\left(1-e^{-(\varepsilon_0 g(az+xi)+bz+yi)}\right)},$$

wo $\phi(z)$, je nach den beiden Summationsbestimmungen für n, gleich Null oder gleich:

$$\varepsilon_0 g(az+xi)+bz+yi$$

zu nehmen ist.

Da $\varepsilon_0 gx + y = 2\varepsilon_1(g\tau_0 - \sigma_0)\pi$ ist, so bleibt gemäss den im §. 2 enthaltenen Darlegungen der absolute Werth des Nenners stets über einer angebbaren Grösse μ, wenn, wie es durch die Definition der Reihe $\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w+gv)$ auf der rechten Seite der Gleichung $(\mathfrak{E}_2)$ erfordert wird, die Differenz $\sigma_0 - g\tau_0$ keinen ganzzahligen Werth hat.

Der Zähler hat die Form:

$$e^{-(M+1)a_0 z}\Phi(z) + e^{-(M+1)b_0 z}\Psi(z),$$

wobei a_0 und b_0, wie oben, die positiven reellen Theile von a und b bedeuten, während $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ Functionen von z sind, deren absolute Werthe unter einer angebbaren Grösse $G^2\mu$ bleiben.

Hiernach kann das Intervall, in welchem sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des obigen Integralausdrucks $(\mathfrak{A})$ liegt, durch den positiven und negativen Werth von:

$$\frac{AG^2\Gamma(1+\rho)}{(M+1)^{1+\rho}}\left(\frac{1}{a_0^{1+\rho}} + \frac{1}{b_0^{1+\rho}}\right)$$

begrenzt werden; der Werth jeder von den vier durch den Integralausdruck $(\mathfrak{A})$ dargestellten Reihen nähert sich also in der That mit wachsendem M der Null.

§. 5.

Die im §. 1 angegebene Darstellung der mit (𝔄) bezeichneten Summe durch den Integralausdruck ($\mathfrak{A}^0$) kann benutzt werden, um nachzuweisen, dass die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, unter den bei deren Definition über u_0, u, v, w gemachten Voraussetzungen, eine stetige Function der beiden reellen Variabeln σ_0, τ_0 ist.

Die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ lässt sich nämlich, gemäss der Definitionsgleichung (𝔇) im §. 3, als Aggregat von vier Reihen:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} m = f, f+1, \ldots M \\ n = g, g+1, \ldots M \end{pmatrix}$$

darstellen, welche den Werthsystemen:

$$\varepsilon_0 = +1, \varepsilon_1 = +1; \quad \varepsilon_0 = +1, \varepsilon_1 = -1; \quad \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = +1; \quad \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = -1$$

entsprechen, und in denen je nach diesen verschiedenen Fällen:

$$f = 0, g = 0; \quad f = 0, g = 1; \quad f = 1, g = 0; \quad f = 1, g = 1$$

zu nehmen ist. Setzt man nun, wie im §. 1, $w = v(\varepsilon\phi + \varepsilon'\psi i)$ und bestimmt, wie dort, für jede dieser vier Reihen, die Grössen a, b, c so, dass die Gleichung:

$$(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)\left(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon'\phi i\right) = (am + bn + c)v$$

für unbestimmte Werthe von m und n erfüllt wird, so sind a und b complexe Grössen mit positiven reellen Theilen, und es giebt unter den Werthsystemen (m, n):

$$m = f, f+1, \ldots M; \quad n = g, g+1, \ldots M,$$

über welche sich die Summation zu erstrecken hat, nur eine endliche Anzahl, bei denen der reelle Theil der complexen Grösse $am + bn + c$ nicht positiv ist. Schliesst man diese aus, deren Aggregat offenbar eine stetige Function von σ_0 und τ_0 ist, so lässt sich der übrige Theil jeder von den vier Reihen als ein Aggregat von Reihen darstellen:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)2\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} m = m_0, m_0+1, \ldots m_0+h-1 \\ n = n_0, n_0+1, \ldots n_0+k-1 \end{pmatrix},$$

bei welchen entweder einer der beiden Endwerthe $m_0 + h - 1$, $n_0 + k - 1$, oder jeder von beiden, gleich M zu setzen ist, und welche die bei der Summe (𝔄) im §. 1 vorausgesetzte Eigenschaft haben, dass der reelle Theil der aus $u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw$ zu bestimmenden complexen Grösse $am + bn + c$ für alle bei der Summation vorkommenden Zahlensysteme (m, n) einen positiven Werth bekommt. Jede der Reihen wird hiernach, wenn wie dort:

$$x = 2\varepsilon_0\tau_0\pi, \quad y = -2\varepsilon_1\sigma_0\pi$$

gesetzt wird, durch den Grenzwerth dargestellt, welchen der Ausdruck:

$$Ae^{-(m_0x+n_0y)i}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-h(az+xi)})(1-e^{-k(bz+yi)})}{(1-e^{-(az+xi)})(1-e^{-(bz+yi)})}\, e^{-(am_0+bn_0+c)z}\, z^{s}dz$$

für wachsende M annimmt. Nun fällt in diesem Ausdruck, wenn sein Grenzwerth für $M=m_0+h-1=\infty$ genommen wird, gemäss den in den §§. 1 und 2 enthaltenen Darlegungen, derjenige Theil unter dem Integralzeichen fort, welcher mit $e^{-h(az+xi)}$ multiplicirt ist, ebenso bei dem Grenzwerth für $M=m_0+k-1=\infty$ derjenige, welcher $e^{-k(bz+yi)}$ als Factor enthält. Es bleibt also nur ein Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad Ae^{-(m_0x+n_0y)i}\int_0^\infty \frac{e^{-(am_0+bn_0+c)z}f(x,y,z)}{(1-e^{-(az+xi)})(1-e^{-(bz+yi)})}\, z^{s}dz\,.$$

in welchem $f(x,y,z)$ einen der Werthe:

$$1,\ 1-e^{-h(az+xi)},\quad 1-e^{-k(bz+yi)}$$

hat, und wo h und k ganze, unter einer gewissen Grenze liegende Zahlen sind. Dieser Ausdruck stellt aber in der That eine stetige Function von x und y dar. Denn wenn die Differenz:

$$\frac{e^{-m_0(x+\xi)i}f(x+\xi,y,z)}{1-e^{-(az+(x+\xi)i)}}-\frac{e^{-m_0xi}f(x,y,z)}{1-e^{-(az+xi)}}$$

gleich $\xi\phi(x,\xi,y,z)$ gesetzt wird, so ist $\phi(x,\xi,y,z)$ eine Function, welche für alle nicht negativen Werthe von z, falls nur weder x noch $x+\xi$ ein gerades Vielfaches von π ist, unter einer nach §. 2 zu bestimmenden Grösse liegt. Die Differenz zweier den Werthen $x+\xi$ und x entsprechenden Ausdrücke $(\mathfrak{A}_1)$ nähert sich also mit abnehmendem ξ der Null, sobald x, wie vorausgesetzt worden, kein Vielfaches von 2π ist, und es zeigt sich ganz ebenso, dass der Ausdruck $(\mathfrak{A}_1)$ eine stetige Function von y darstellt.

(Fortsetzung folgt.)



Einige Ergebnisse der Plankton-Expedition der Humboldt-Stiftung.

Von Prof. Hensen
in Kiel.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

Seit der Rückkunft der Expedition ist Hr. Dr. Schütt mit der Volumenbestimmung der Planktonfänge beschäftigt gewesen. Diese Arbeit ist jetzt vollendet und giebt einen ersten Anhaltspunkt für die Beurtheilung der Verhältnisse des Planktons auf hoher See.

Auf der Strecke von den Bermudas bis zu den Capverdischen Inseln fanden sich unter 1^{qm} Fläche bis zur Tiefe von 200^{m} der Reihe nach folgende Volumina[1] der feineren Planktonmassen in Cubikcentimetern:

45. 70. 30. 45. 25. 20. 20. 35. 35. 65. 15. 45. 50. 20. 65.
40. 25. 30. 40. 25. 30. 30. 45. 45. 35. 30. 50. 25. 15.

Diese Fänge wurden vom 10. bis 24. August gemacht; auf der Rückreise durchkreuzten wir am 18. und 19. October dasselbe Gebiet und erhielten an beiden Tagen das Planktonvolumen von 20^{cc}. Für diese 31 Fänge ergiebt sich als Mittel 35, als Maximum 70, als Minimum 15^{cc}. Kleinere Fänge sind überhaupt nicht mehr, dagegen sind im Norden fast 80 Mal, im Süden 20 Mal grössere Fänge wie jenes Mittel gemacht worden. Es haben die Volumina auf der erstgenannten Strecke nur um 100 Procent geschwankt. Die dabei durchmessene Entfernung entspricht einer Luftlinie von Portugal bis zum Caspischen Meer und ist länger als die Linie von New York bis nach San Francisco. Die gewonnenen Maasse dürften also beweisen, dass die Expedition vollen Erfolg gehabt hat, denn sie ging von der rein theoretischen Ansicht aus, dass in dem Ocean das Plankton gleichmässig genug vertheilt sein müsse, um aus wenigen Fängen über das Verhalten sehr grosser Meeresstrecken sicher unterrichtet zu werden, und diese

[1] Die Reduction wegen Undurchlässigkeit des Netzes, die die Volumina um etwa 12 Procent vermehren würde, ist hier unterlassen, ebenso sind die durch Abtrifft des Schiffs entstandenen Fehler noch nicht berücksichtigt.

Voraussetzung hat sich weit vollständiger bewahrheitet, als gehofft werden konnte.

Die bisher gültige Ansicht war, dass die Meeresbewohner in Schaaren verbreitet seien und dass man je nach Glück und Gunst, nach Wind, Strömung und Jahreszeit, bald auf dichte Massen, bald auf unbewohnte Flächen komme. Dies gilt in der That bis zu einem gewissen Grad für die Häfen, für das offene Meer berichtigt sich unsere Kenntniss dahin, dass dort normal eine gleichmässige Vertheilung stattfindet, die nur innerhalb weiter Zonen entsprechend den klimatischen Verhältnissen nach Dichte und Bestandtheilen wechselt. Man wird jetzt in jedem Fall der Abweichung von solchem Verhalten nach den Ursachen suchen müssen, welche dabei gewirkt haben und wird nicht mehr das Vorkommen von Ungleichmässigkeiten als gegebenen Ausgangspunkt für bezügliche Forschungen nehmen können.

Im Allgemeinen ist die Masse des Planktons im Meere nicht besonders gross. Allerdings erhielten wir im Norden Fänge von 2700 und 1800^{cc} unter dem Quadratmeter, während die grössten von mir früher in der Ostsee gemachten Fänge im Herbst nur 500, einzelne im Frühjahr allerdings bis 2700^{cc} betrugen; dabei handelte es sich in der Ostsee nur um Tiefen von 20^{m}, während auf dem Ocean im Norden eine Tiefe von 400^{m} durchfischt wurde. Da sich die Massen im Ocean bis zu dieser Tiefe, wenngleich mit abnehmender Dichte vertheilen, so ist es unzweifelhaft,[1] dass dort selbst bei grossen Fängen die Dichte des Planktons nur gering ist.

Ich hatte erwartet, in den Tropen eine stärkere Entwickelung des Planktons zu finden. Die jährlichen grossen Fänge von Pottwalen bei den Azoren, welche dort von etwa zehn Compagnien betrieben werden, das Vorkommen ausgedehnter Schaaren grosser Delphine und Thunfische, überhaupt der grössten Raubfische und von Schaaren fliegender Fische zwischen den Wendekreisen, die Beschreibung der Mannigfaltigkeit grösserer pelagischer Thiere in der Guinea- und anderen Meeresströmungen, schienen grossen Reichthum des Planktons vorauszusagen. Dafür sprach auch die Gleichmässigkeit der Temperatur in den tropischen Meeren und vor Allem der Umstand, dass die Strahlen der senkrecht stehenden Sonne viel tiefer in das Meer eindringen müssen, als dies in der Nähe der Pole der Fall sein kann. Zeitweilig, so glaubte ich, werde der Sonnenschein abgelöst werden von den Fluthen tropischer Gewitterregen, die an Salpetersäure reich sind. Es erschien daher möglich, dass sich für die Bestandtheile des

[1] Die Bestimmung, wie die Massen nach der Tiefe zu abnehmen, erfordert genauere Analyse der gemachten Fänge, als bisher ausgeführt werden konnte; die Hauptmasse findet sich meistens an der Oberfläche.

Planktons der tropische Ocean, mit seinen einfachen, wenig veränderlichen Verhältnissen als Mittelpunkt der Entstehung mancher Formen herausstellen werde.

Obgleich wir überall Plankton vorgefunden haben, war doch die Menge desselben unter und nahe den Tropen relativ gering, nämlich im Mittel acht Mal geringer, als im Norden bis zu den Neu-Fundlandbänken hinunter. Jeder einzelne dieser Fänge wird weit über hundert verschiedene Formen enthalten, aber die Armuth an Masse ist doch eine auffallend hervortretende, gesicherte Thatsache.

Die Gesammtheit der bis jetzt von mir gemachten Erfahrungen legt die Frage nahe, ob das Feuer der Sonne, Luft und Salzwasser allein genügen, um Organismen zu zeugen und zu erhalten, oder ob dazu noch ein Viertes, das feste Land erforderlich sei? In anderen Worten, ob unser Planet lebende Wesen tragen würde, wenn seine Oberfläche überall mit einer Wasserschicht von der Tiefe des Oceans bedeckt wäre. Ich gehe auf diese Frage ein, weil es im Interesse der Expedition liegt, schon einige allgemeinere Ergebnisse mitzutheilen. Erst nach einigen Jahren werden die Untersuchungen eingehendere und detaillirtere Resultate zu Tage fördern können, wie auch die folgenden Mittheilungen zum Theil nur unter Vorbehalt späterer Richtigstellung gegeben werden können.

Besonders arm an Plankton war die Sargassoregion, (20° bis 35° N. Br.), sie war im Mittel fünfzehn Mal ärmer, als im Norden, zehn Mal ärmer, als die anderen Strecken der durchlaufenen Bahn. Die Sargassopflanzen (*Sargassum bacciferum* Ag.) trafen wir meistens einzeln schwimmend und ziemlich gleichmässig vertheilt, nur wenn Wind war, legten sie sich zu Streifen zusammen, die ähnlich geformt waren, wie die Windwolken (gestreckte Cirrus). Solche Streifen waren meistens nicht grösser, als die Oberfläche unseres Schiffes, zuweilen bedeutend länger. Die einzelnen Pflanzen sind nicht gross, ausgebreitet erfüllen sie etwa den Raum von zwei bis vier Litern, ihr wirkliches Volumen fand sich zu im Mittel 125^{cc} mit 16^{g} Trockensubstanz, davon $4^{g}8$ Kohlenstoff, $0^{g}12$ Stickstoff und 4^{g} Asche. Im Golfstrom kam eine Pflanze auf etwa 525^{qm}, im Sargassomeer auf etwa 175^{qm}, während das Volumen des Planktons auf solcher Strecke in letzterem Fall etwa das fünfzigfache betrug. Dies Volumen besteht aber nur zu einem kleineren Theil aus Pflanzen und die Pflanzen des Planktons sind so niedrig organisirt, dass, wie früher von mir gemachte Analysen[1] nachgewiesen haben, ihr Gehalt an organischer Substanz weit geringer

[1] Über die Bestimmung des Planktons, fünfter Bericht der Commission zur wiss. Untersuchung der deutschen Meere. 1882—86. Berlin. P. Parey. S. 34. Die Planktonpflanzen gaben nur 0.4 bis höchstens 6 Procent organischer Substanz.

in gleichem Volumen ist, als derjenige von Fucusarten. Aus diesem Grunde muss ich die Concurrenz, welche das Sargasso in Bezug auf die pflanzlichen Nährstoffe macht, für weit bedeutender halten, als die Vergleichung der bezüglichen Volumina andeutet.

Meiner Meinung nach werden sich die Fucus in dem Sargassomeer kaum ein Jahr, eher höchstens ein halbes Jahr halten können, sonst müsste, nach der Geschwindigkeit, mit welcher der Golfstrom sie hinführt zu rechnen, dort sich davon eine weit grössere Masse vorfinden. Es ergab sich, dass diese entwurzelten Pflanzen leben, ja selbst noch ein, wenn gleich geringes, Wachsthum zeigen. Dies kann nicht Wunder nehmen, denn für die Seepflanzen hat die Wurzel nur die Bedeutung, sie am Boden festzuhalten, so dass viel Wasser an ihnen vorbeifliessen muss; eine Stoffaufnahme erfolgt durch sie nicht. Hin und wieder zeigten sich an diesen Pflanzen hohle, weisse Zweige und Beeren, also abgestorbene Theile, von denen nur noch die Hüllen erhalten waren. Nie fanden sich solche Theile so häufig und ausgedehnt, dass ein bald bevorstehendes Absterben der ganzen Pflanze daraus hätte gefolgert werden können; diese Stellen liessen sich höchstens als eine Marke kümmerlicher Existenz deuten, dies um so eher, als eine Fructification weder von früheren Beobachtern noch von uns gesehen wurde. Nie haben die Netze aus der Tiefe untergehende Sargassotheile hervorgeholt. Obgleich zehn Arten von Thieren das schwimmende Kraut bewohnten, zeigte sich darunter keins, welches sich davon ernährt hätte, noch auch waren Spuren von Frass an den Pflanzen zu erkennen. Die Bewachsung mit Thieren war auch keine solche, dass davon ein späteres Untergehen der Pflanzen zu erwarten gewesen wäre. Wir trafen weiter östlich auf der Fahrt nach den Capverden Flächen, welche mit abgefallenen Beeren (den Schwimmkörpern des Sargasso) bestreut waren, und einen Tag später, als wir nach Süden abbogen, fischten wir auf hoher See dieselbe Art von Seenadeln, welche wir früher in den treibenden Pflanzen verborgen, zahlreich gefangen hatten. Es scheint kaum glaublich, dass diese Fische, schlechte Schwimmer und in Körperform und Färbung durchaus dem Leben zwischen Seepflanzen angepasst, in Wirklichkeit zur pelagischen Fauna gehören sollten; ich bin der Ansicht, dass sie nur desshalb frei schwimmend so weit in die hohe See hinausgeriethen, weil nach dem Untergang der Sargassopflanzen ihnen keine Rettung blieb;[1] letztere müssen also in dieser Gegend zum Untergang gekommen sein. Leider blieb die Zeit nicht, letzterem Vorgang näher

[1] Wir sind auch sonst zuweilen auf andere Species von Seenadeln auf hoher See gestossen, der Befund war mir sehr auffallend, da diese Fische, ihrem ganzen Bau und ihrer Lebensweise am Ufer nach, nicht wohl eigentlich pelagisch sein können.

zu treten. Immerhin kann der Untergang der Pflanzen wohl nicht, wie ich ursprünglich glaubte, dadurch bewirkt werden, dass hochgehende Wellen sie in die Tiefe reissen und sie durch Auspressen von Luft und Zusammendrückung des Gewebes zum Sinken bringen, denn in dieser Zone kommen während des ganzen Jahres keine heftigen Wellenbewegungen vor. Es gewinnt dagegen ganz den Anschein, dass die Pflanzen durch Nahrungsmangel so weit gebracht werden, dass sie vergehen müssen. Jedenfalls leben sie ärmlich genug, um begierig alle Nahrung aus ihrer Umgebung zu sammeln, weil sie, wurzellos dahintreibend, in nahezu derselben, sich mit ihnen verschiebenden Wassermasse bleiben. Diese Pflanzen bereichern also die Meeresoberfläche nicht, oder doch zunächst nicht, mit verwesender Substanz, sondern sie zehren mit an deren anorganischen Nahrungssubstanzen. Daraus möchte ich, wenigstens zum Theil, die besonders grosse Armuth an Plankton in dieser Gegend erklären. Im Allgemeinen sind die Forscher geneigt, den zur Beobachtung gekommenen Reichthum des Bodens nordischer Meere an niederen Pflanzen und Thieren auf die niedere Temperatur des Wassers dort zu beziehen, was also wohl auch den umgekehrten Schluss auf die Schädlichkeit der Wärme in wärmeren Meerestheilen enthält. Gewiss trifft dieser Schluss für viele specielle Formen, die der Kälte angepasst sind, zu, aber ich kann mich nicht davon überzeugen, dass die Temperaturen von zwischen 25 bis höchstens 28° C., welche in dem von uns befahrenen Gebiet herrschen, als Schädlichkeiten wirken, welche die relative Armuth an Plankton erklären könnten. Wir kennen Gebiete, z. B. das des rothen Meeres mit 30 bis 31° Wärme, in welchem die pelagische Fauna noch gut vertreten ist; auf unserer Fahrt sind die geringen Wärmeschwankungen unter den Tropen keineswegs Hand in Hand mit den Volumensschwankungen des Planktons gegangen; die in dem wärmsten Wasser gefangenen Thiere zeigten höchst energische Bewegungen, und es kamen endlich in Regionen hoher Temperatur (26°) viele Fänge vor, die an Volumen den gewöhnlich in hohen Breiten gemachten Fängen nicht nachstanden. Wenn überhaupt die Planktonpflanzen bei den genannten, und wahrscheinlich im Rothen Meer bei noch 4 bis 5° höheren Temperaturen, noch leben und zwar in vielen Millionen von Individuen unter dem Quadratmeter, so kann meines Erachtens diese Wärme nicht durch directe Einwirkung auf die Individuen der grösseren Vermehrung derselben Einhalt thun. Wenn also nicht in der grossen Wärme des Wassers die Ursache der geringen Dichte des Planktons gesucht werden kann, so entsteht die Frage, was sonst diese Dichte in so engen Grenzen zu erhalten vermag. Wie schon angedeutet, kann wohl nur

der Mangel an Nahrungsstoffen, zunächst in Bezug auf die Pflanzen, in Folge dessen dann auch für die Thiere, zur Erklärung herbeigezogen werden.

Dieser Nahrungsmangel kann nicht im Sauerstoff liegen, weil die Pflanzen selbst im Licht Sauerstoff entwickeln, auch nicht in der Kohlensäure, denn seit den Analysen von Jacobsen[1] wissen wir, dass locker gebundene Kohlensäure in sehr grosser Menge im Meereswasser enthalten ist. Die den Pflanzen mangelnden Nahrungsstoffe können, nach unserer bisherigen Kunde, daher nur noch entweder in unverbrennlichen Bestandtheilen des Wassers oder in Stickstoffverbindungen gesucht werden.

Was die erstere Möglichkeit betrifft, bei der wir vor Allem an einen Mangel an Phosphorsäure denken möchten, so liegen bisher, weder über den Phosphorgehalt des Meerwassers, noch auch, wie gleich hinzuzufügen, über den Gehalt an Stickstoffverbindungen, Analysen vor, wohl desshalb, weil die Mengen dieser Substanzen auf jeden Fall nur äusserst gering sein können. Wir fanden aber im Norden zeitweilig den Gehalt an Pflanzen sehr gross, auch weit im Süden kamen ein paar Fänge von grossem Volumen, nämlich 300 bis 700^{cc} vor und wir wissen aus der Challenger-Expedition, dass im antarktischen Meer die Diatomeen recht zahlreich auftreten. Es kann bis auf Weiteres sicher angenommen werden, dass das Meerwasser überall die gleiche Menge an unverbrennlichen Substanzen enthält, denn es darf als kaum denkbar bezeichnet werden, dass in polaren Gegenden eine besondere Quelle etwa für Phosphorsäure fliessen könnte. Aus diesem Grunde muss, glaube ich, der Gedanke, dass Mangel an unorganischen Nährsubstanzen bei der vorliegenden Frage in Betracht zu ziehen sei, ausgeschlossen werden.

Als Quellen der Stickstoffverbindungen des Meeres glaube ich nennen zu können, 1) die Gewitterregen, welche die bei elektrischen Entladungen gebildete Salpetersäure niederführen, 2) den gleichfalls wohl durch den Regen dem Meere zugeführten Ammoniakgehalt der Luft, der aus verschiedenen Quellen stammen mag, 3) Ammoniak aus Fäulnissproducten, die theils an der Oberfläche des Meeres, theils am Grunde[2] entstehen mögen, namentlich auch durch die Flüsse zugeführt werden können. Bezüglich der Zufuhr dieser Stickstoffverbindungen liegt die Sache anders, als ich vorausgesetzt hatte.

[1] Jahresbericht der Commission z. wiss. Untersuchung der deutschen Meere 1871. Berlin, Wigardt und Hempel 1873. S. 52. — Die Bindung der Kohlensäure im Meer ist allerdings ziemlich fest, so dass die Gewinnung den Pflanzen etwas erschwert sein mag.

[2] Behrens, Jahresbericht d. Commission 1871 S. 57. — Der Schlamm aus 665 M. Tiefe im Skagerak enthielt 0.24 % N.

Während die nordischen Meere reich an Regen sind, reicht die Verdampfung der gewaltigen Fläche des tropischen Meeres nicht aus, um Regen und Gewitter reichlich zu erzeugen. Hin und wieder brachte ein Strichregen etwas Wasser; Gewitter, die an der brasilianischen Küste und überall an den bewaldeten Küsten der Tropen in entsprechender Jahreszeit täglich einsetzen, kamen auf See kaum vor, Wetterleuchten war selten. Die Küsten von St. Vincent und Ascension sind ganz regenarm, nur auf den höheren Bergen regnet es dort häufiger. Daher kann sehr wohl der Ocean unter den Tropen arm an Stickstoffverbindungen sein. Im Norden fällt nach den vorhandenen Beobachtungen unbedingt viel Regen auf See, ob aber dieser viele Stickstoffverbindungen mitführt, steht dahin.

Die Prüfung der Volumina des Planktons ergiebt, dass fünfmal im Norden, einmal nördlich von Ascension aussergewöhnlich grosse Fänge gemacht wurden. Diese müssen durch besondere Strömungen in unser Gebiet geführt worden sein und können daher zunächst ausser Betracht bleiben, die übrigen Fänge ergeben folgende Mittelzahlen.

Im Norden bis Neu-Fundland	160 cc.
Neu-Fundland bis Bermudas	40 »
Sargassomeer	35 »
Durch den Nord-Aequatorial-Guinea- und Süd-Aequatorial-Strom bis Ascension	130 »
Im Süd-Aequatorial-Strom, Ascension bis Pará	60 »
Nord-Aequatorial-Guinea-, Süd-Aequatorial-Strom; Pará bis Sargassomeer	93 »
Nord von den Azoren bis zum Kanal	83 »

Diese Volumensunterschiede sind ziemlich geringfügig, jedoch es tritt hervor, dass die drei tropischen Strömungen reich an Plankton gewesen sind. Die Aequatorialströmungen führen Wasser, welches längere Zeit längs der Küsten von Afrika verlief und haben weit im Westen nennenswerth an Plankton verloren. Der Guineastrom entsteht im freien Ocean und erreicht erst die Küste, nachdem er die von uns befischten Strecken durchsetzt hat. Letzterer Strom fliesst in einer Region wechselnder Winde und ist nach den Witterungskarten ein regenreiches Gebiet. Ebenso ist die Strecke nördlich von den Azoren bis zum Kanal ziemlich reich an Niederschlägen. Die Armuth der Strecke Neu-Fundland bis Bermudas scheint dagegen nicht im Einklang mit der entwickelten Hypothese vom Mangel der Stickstoffverbindungen auf hoher See zu stehen, denn der Golfstrom, welcher auf dieser Fahrt durchquert wurde, kommt vom Lande und müsste daher reich an Stickstoffverbindungen sein. Es muss den eingehenderen Analysen vorbehalten bleiben, weitere Aufklärungen zu schaffen, zur

Zeit weiss ich nichts Besseres an die Stelle der gegebenen Anschauungsweise zu setzen.

Es würde sich demnach die Frage: ob Leben bei einer Bedeckung der ganzen Erde durch einen Ocean vorhanden sein könne, auf die Frage zuspitzen, wie sich in solchem Fall der Stoffwechsel der Stickstoffverbindungen gestalten würde.

Wie immer sich diese Sache verhalten möge, es ist gewiss, dass das Plankton, — die Urnahrungssubstanz, so weit bis jetzt solche bekannt geworden ist —, im Meer nur geringe Dichte hat. Die absolute Menge ist allerdings nicht gerade gering, sondern weit bedeutender, als ich während der Fahrt geglaubt habe. Ich gab schon an, dass in der besonders armen Sargassoregion funfzig Mal soviel Plankton- wie Seegrass-Volumen gefunden wird und doch erschien das letztere den Seefahrern aller Zeiten als etwas sehr Besonderes und Auffallendes.

Das Plankton, in einer Tiefe von 200^{m} vertheilt, muss schwierig genug zu erwerben sein, wenigstens tragen, wie mir scheint, viele grösseren pelagischen Thiere den ausgesprochenen Charakter schwerer Lebensverhältnisse, ich möchte sagen, des Hungerlebens.

Man hat die glashellen Gewebe dieser Thiere auf die Vortheile der mit solchem Bau verbundenen Durchsichtigkeit und Unsichtbarkeit bezogen; das ist meines Erachtens zu einseitig. Die an und für sich glasklaren Akalephen zeichnen sich meistens durch weithin sichtbare weissliche Färbungen der Geschlechtstheile aus, obgleich einige Species ganz klar und durchsichtig bleiben. Aus diesem Umstand ist zu schliessen, dass keine tiefer liegenden Ursachen die Färbung bedingen und dass die Durchsichtigkeit nicht Vortheile genug bietet, um vorwiegend erstrebt zu werden. Den zu allergrösster Durchsichtigkeit plattgedrückten Saphirinen ist es eigenthümlich, dass sie durch lebhafte Interferenzfarben die Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Die Salpen, die Heteropoden haben mitten in ihrer Gallertsubstanz undurchsichtige, gefärbte, weithin sichtbare Eingeweide, obgleich innerhalb ihrer Classe Fälle genug vorkommen, die zeigen, dass auch hier die Eingeweide durchsichtig gebildet werden können.

Überhaupt dient weit ausgedehnter als die Durchsichtigkeit, ein tiefes Blau zum Schutz. Die an der Oberfläche hängenden Thiere, die Velellen, Porpiten, Physalien und Janthinen sind indigblau gefärbt, dieselbe Farbe zeigen übrigens auch die Glaucus und einige Copepoden. Ich glaube, dass dies damit zusammenhängt, dass die reichlich aus der Tiefe zurückkehrenden Lichtstrahlen an dem Meeresspiegel zum Theil eine Totalreflection erleiden, von welcher die brechbareren Farben des Lichts viel früher betroffen werden müssen, als die rothen und gelben Strahlen. Meine Fischnetze hatte ich leider

grün statt blau färben lassen. In dem so durchsichtigen Ocean, in welchem wir eine bis 66^{m} tief herabgelassene weisse Scheibe noch sahen, wurde offenbar bei dunkler Nacht das grüne Netz noch gesehen, so dass die Fische ihm auswichen.

Weil die Gefahr einer Verletzung der Glaskörper-Gewebe in den wiegenden Wellen der hohen See sehr gering ist, konnte das Wasser, — welches keine Vermehrung des Stoffwechsels bedingt — in ausgiebigstem Maasse bei der Gewebsbildung Verwendung finden, um den Körper der Thiere möglichst zu vergrössern. Dadurch wird gewonnen, dass die Muskeln, welche sich weithin durch das wässrige Gewebe erstrecken, dass die Hebel, an welche sie sich ansetzen, dass die Höhlen des Körpers, welche sie umspinnen, so wirksam für den raschen Stoss gegen die verschiebbaren Wassertheilchen werden, wie sie es ohne Aufblähung des Körpers nicht hätten sein können. So mag es kommen, dass sich an diesen, gerade für die hohe See besonders charakteristischen Formungen Thiere fast aller an der Oberfläche vorkommenden Classen betheiligen. Quallen, Rippenquallen, Diphyen und Salpen haben durchstehend solches Gewebe: unter den Würmern: Sagitten, Alciopiden und Tomopteriden, unter den Schnecken, die Heteropoden, unter den Kopffüsslern die sonderbaren, von uns oft gefangenen Cranchien; selbst bei den Fischen tritt dieselbe Formung bisweilen hervor, namentlich bei deren Larven, aber auch z. B. bei den Bandfischen, *(Leptocephalus)*.

Der Tendenz, relativ grösste Wassermassen auszubeuten, wird die Fauna auch noch in anderer Weise gerecht. Man sieht in den Fängen Glashärchen in relativ raschem, geradlinigem Lauf dahin eilen und erkennt erst bei näherem Zusehen etwas hinter dem Vorderende zwei schwarze breite Linien und weiter hinten einige rüstig rudernde Anhänge. Ein Amphipode, Rhabdosoma, ist von dem sonst mehr kugeligen Typus zu dieser Länge ausgezogen worden, etwa wie eine Glaskugel, die man zu einem Faden auszieht. Alle Organe, selbst die Augen, die bei den pelagischen Thieren gewöhnlich hoch entwickelt sind, haben sich der unbequemen Gestaltung fügen müssen. Diese bietet wohl nur den einzigen Vortheil, mit geringsten Kräften eine möglichst grosse Schnelligkeit zu erzielen. Mehr oder weniger strecken sich alle pelagischen dekapoden Krebse in die Länge, andere Krebschen, so namentlich die Saphirinen, breiten sich zu fast schneidend dünner Fläche aus, auch auf diese Weise für die Fortbewegung Vortheile gewinnend. Die Diphyen vereinen die Zusammenziehungen ihrer beiden Schwimmglocken in dem gleichen Sinn und mit grossem Erfolg, denn in den tropischen Meeren sind ihre Bewegungen sehr energisch und die Anzahl der Thiere ist relativ gross. Die zahlreiche

Ordnung der Flügelschnecken repraesentirt eine sehr wirksame Form der Fortbewegungsorgane, indem ihr Fuss zu zwei fächerförmig ausgebreiteten Flügeln umgestaltet ist. Sie verhalten sich zu den eigentlichen Schnecken, wie die Vögel zu dem kriechenden Lurch.

Dennoch bietet der Ocean auch für die wahren Schnecken noch Raum, nur dass diese die Bewegungskraft des Windes ausnützen müssen. An ihrem schaumigen Speichel hängend, der als Segel dient und ein Schutz gegen die Wasservögel ist, weil er auf das Täuschendste die Flocken des Wellenschaums nachahmt, treiben sie dahin, gegen die Meeresbewohner durch die blaue Farbe ihrer Schalen gedeckt. Die Velellen, Porpiten und Physalien bilden Schalen, welche sich über die Oberfläche des Wassers erheben und gleichfalls als Segel dienen. Diese Thiere, die an ihren langen Fangarmen so mächtige Nesselorgane tragen, dass sie auf die schwieligen Hände unserer Matrosen sehr nachdrücklich wirkten, müssen auf ihrer Bahn Tod und Verderben zurücklassen. Wir fuhren oft mehrere Tage lang durch ihre Schwärme, dabei fiel es auf, dass alsdann die Thierart auf längere Zeit völlig verschwand. Diese Art des Vorkommens muss mit der Form der Bewegung in Correlation stehen. Die Thiere, die keiner selbständigen Fortbewegung fähig sind, müssen ziemlich dicht beisammen bleiben, um sich zweigeschlechtlich fortpflanzen zu können; was zu weit abtreibt, muss aussterben. Wären sie überall im Meere in entsprechender Dichte verbreitet, so wäre eine Bewegung der ganzen Masse in der Richtung des Windes unzweckmässig, denn sie würde durch bereits abgefischte Gebiete getrieben und würde bei der im Meere herrschenden, relativen Armuth kaum noch genügende Nahrung finden. Die auf Ebenen grasenden Landthiere wandern aus ähnlichen Gründen in Heerden vorwärts, aber hier handelt es sich um eine mehr freiwillige Vereinigung. Bei diesen Seethieren muss die Heerdenbildung dadurch bewirkt werden, dass die Brut nicht treibt, sondern frei schwimmt. In Folge dessen treiben die Mutterthiere fort und wenn die Larven sich endlich an die Oberfläche erheben, können jene ihnen keine Concurrenz mehr machen.

Andere Arten, z. B. die Pyrosomen, die Rippenquallen, die Salpen treten gleichfalls in beschränkten Schaaren auf, vielleicht haben die Regionen reicheren und ärmeren Planktons darauf Einfluss, der Charakter unserer Expedition als Streiftour gestattete nicht, diesen Verhältnissen näher zu treten.

Wo alle diese Anpassungen nicht zur Ausbildung gediehen sind, kommt doch noch in anderer Weise der Charakter der Hochseeformen zur Geltung. Gewisse Raubfische zeigten eine Energie des Triebes, wie sie bei den Küstenfischen nicht zur Beobachtung kommt. Die

Überraschung, gefangen, in die Hand genommen, schliesslich in ein engbegrenztes Wassergefäss versetzt zu werden, hatte keinen Einfluss auf ihr Verhalten. Sobald sie dort einen Fisch erblickten, konnte weder dessen überwältigende Grösse, noch ein sonstiges Hinderniss sie abhalten; wie ein physikalisches Gesetz wirkte das Bild der Beute auf ihre Angriffsactionen, sie stürzten sofort auf den Fisch zu und bissen sich fest. Man konnte sie wiederholt gewaltsam loslösen, kaum freigelassen, ergriffen sie sofort wieder ihr Opfer. Eine solche Organisation, welche keine Furcht kennt und unbedingt zum Angriff treibt, ist für die Verhältnisse des Oceans wohl zulässig und günstig, an den Küsten müsste sie aus verschiedenen Gründen verderblich wirken.

So finden wir die Thierwelt der hohen See harmonisch der geringen Dichte des Planktons und der Ausdehnung des Fanggebiets angepasst, während die der Küsten darauf angewiesen ist in Verstecken oder fest angewachsen, den Wellen und den Gezeitströmungen die Arbeit der Herbeischaffung des Plankton und anderer Nahrung zu überlassen. Die Urformen der in Rede stehenden, ziemlich hoch organisirten Thiere dürften wohl alle aus Gallertgeweben bestanden haben, von welcher Gestalt aus dann die Einen durch günstigere Gewebsbildung widerstandsfähigere Körper, die Anderen die Einrichtungen zur Beherrschung grosser Wassermassen sich erworben haben. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass unter günstigen Verhältnissen beide Vortheile zugleich gewonnen werden konnten und auch thatsächlich gewonnen worden sind.

Ich darf bestimmt glauben, dass die jetzt erst beginnende genauere Analyse des reichen Materials, welches wohlerhalten heimgebracht worden ist, sich als eine sehr dankbare Arbeit erweisen wird.

Ausgegeben am 20. März.



1890.

XV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

13. März. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Brunner las über die absichtslose Missethat im altdeutschen Strafrechte.



Die Berliner Centones der Laudes dei des Dracontius.

Von Prof. Wilhelm Meyer
aus Speyer.

(Vorgelegt von Hrn. Vahlen am 30. Januar [s. oben S. 95].)

Hierzu Taf. II und III.

Blossius Aemilius Dracontius hat unter den späten lateinischen Dichtern in neuerer Zeit besondere Beachtung gefunden. Zehn kleinere mythologische Gedichte sind erst vor 20 Jahren bekannt geworden, allein in dieser Zeit sind sie drei Mal herausgegeben und vielfach behandelt worden. Die Tragoedia Orestis ist seit ihrem ersten Bekanntwerden (1858) schon sechs Male gedruckt worden, und besonders die Frage, ob sie von Dracontius gedichtet sei, hat eine Reihe von Untersuchungen veranlasst, welche die Autorschaft des Dracontius sicher gestellt haben. Zwar schon seit d. J. 1560 wurde gedruckt das Hexaemeron seu de opere sex dierum et creatione mundi, etwa 640 Hexameter, und seit 1619 die Elegia oder Satisfactio: beide Dichtungen in der Umarbeitung des Eugenius von Toledo. Doch erst vor 100 Jahren wies Arevalo nach, dass das Hexaemeron nur ein Stück (I 116—754) einer grossen Dichtung in drei Büchern (von 2312 Hexametern) sei, welche er unter dem Titel Carmen de deo mit grossem Fleisse herausgab (Rom 1791; abgedruckt in Migne's Cursus Patrologiae lat. tom. 60, Paris 1862).

Der Fleiss, den viele Philologen dem Dracontius widmeten, ist gerechtfertigt. Die Sagen zeigen bei ihm manche neue Züge, so dass er ein Nonnus im Kleinen ist. Die Prosodie zeigt schon Barbarismen; doch die Metrik ist rein; nur die Menge von weiblichen Caesuren des dritten Fusses steht einzig da. In der Sprache steht Dracontius natürlich unter dem Einflusse seiner afrikanischen Heimath und seiner Zeit; doch geht er bei den bedeutendsten Dichtern der Römer mit solchem Eifer in die Schule, dass seine Dichtungen ein Mosaik der beliebtesten Wendungen der classischen Dichter sind. Sein dichte-

risches Talent ist zwar durch die juridisch-declamatorische Richtung des römischen Unterrichts auf falsche Bahnen geführt: allein selbst in den drei Büchern zum Lob Gottes, deren dogmatischer Inhalt für einen Dichter möglichst ungünstig ist, bricht sein Talent durch, besonders wenn er die Allmacht Gottes oder die Wunder der Schöpfung schildert oder in Abschweifungen sich Gelegenheit zu dichterischen Schilderungen sucht. In all Diesem ist er ein würdiger Vorläufer seiner Landsleute Luxorius und Corippus.

Das Schicksal war den Dichtungen des Dracontius nicht günstig. Manche Dichtungen sind, wie unten zu beweisen ist, ganz verloren. Die mythologischen Gedichte sind nur durch die junge Abschrift einer verlorenen Handschrift des Klosters Bobbio erhalten und diese ist durchaus verderbt. Nicht weniger fordert die Tragoedia den Scharfsinn der Kritiker heraus, wenn sie auch durch eine ältere und eine jüngere Handschrift überliefert ist. Am reinsten ist noch die Satisfactio überliefert.

Den Laudes dei — denn dies wird sich später als der echte Titel der grossen christlichen Dichtung erweisen — ist es bis jetzt schlimm ergangen. Arevalo war zwar Bibliothekar im Vatican, fand aber doch nur éine Handschrift (Urbinas 352: U). Diese ist die schlechteste von allen: insbesondere sind bei unverständlichen Wörtern gleich die Halbverse oder ganzen Verse weggelassen. So liess Arevalo trotz hingebenden Fleisses doch eine Menge thörichter oder falscher Lesarten stehen und, selbst die von ihm fabricirten Verse mitgerechnet, zählt die Dichtung bei ihm nur 2244 Verse statt 2312.

Dann hat C. E. Glaeser den Redigeranus in Breslau (R) benutzt und in 2 Programmen des Friedrich-Gymnasiums in Breslau 1843 und 1847 das 3. und das 2. Buch herausgegeben, ziemlich fleissig, doch ohne kritischen Sinn. Dazu ist die Breslauer Handschrift nach der von Arevalo benutzten die schlechteste. Ohne von Glaeser etwas zu wissen, hat Ang. Mai in der Nova bibliotheca patrum I, 2 (1852) p. 162 aus der vaticanischen Handschrift 5884 (V) und in der Appendix ad opera ab A. Maio edita (1871 S. 11 und 18) aus der vaticanischen Handschrift 3853 (M) Lesarten mitgetheilt und Verse ergänzt, deren meiste schon von Glaeser ergänzt waren. Theodor Oehler hatte schon 1842 (im Rh. Mus. S. 303 = Ritschl Opusc. 3 p. 730) auf die Brüsseler Handschrift des Dracontius hingewiesen, 'die etwa 2000 Verse mehr enthält als die letzte Ausgabe von Carpzow'. Er wusste also anfänglich Nichts von Arevalo. In seinen hinterlassenen Papieren, die nach langem Suchen in der Stadtbibliothek zu Frankfurt a. M. sich fanden, befindet sich nicht die von Glaeser (1847 Vorrede) bezeichnete Abschrift der Brüsseler Handschrift, sondern nur

sehr spärliche Notizen. Dann hat E. Grosse 1868 die Brüsseler Handschrift vollständig verglichen. Endlich hat Pitra in den Analecta Sacra, V 1888 p. 176—180, aus der Brüsseler Handschrift mit lächerlichen Lesefehlern und Nachlässigkeiten Verse ergänzt und Lesarten gegeben, ohne von Glaeser, ja sogar ohne von Mai etwas zu wissen. Dass die Arbeiten nach Arevalo auch für die Ausgabe in Migne's Cursus, tom. 60 Paris 1862, nicht benutzt sind, ist fast natürlich.

Bischof Münter schrieb 1822 an Pertz (Archiv d. Ges. f. ältere d. Gesch. IV S. 218), in der Barberinischen Bibliothek in Rom liege die zum Druck bestimmte Handschrift des Lucas Holstenius, die ausser den Supplementen noch eine Menge Varianten habe; er habe sich dieselbe in Rom abschreiben lassen und sei bereit, sie zu übersenden, wenn Dracontius aufgenommen würde. Diese Handschrift des Lucas Holstenius wurde für mich jetzt in der Barberinischen Bibliothek gesucht, konnte jedoch nicht gefunden werden. In dem Versteigerungscatalog der Bibliothek Friedr. Münters (Bibliotheca Münteriana Kopenhagen 1830) kommt die Abschrift des Dracontius nicht vor. Freundliche Antworten von Oberbibliothekar Chr. Bruun und Prof. E. Dümmler brachten mir nur die Gewissheit, dass dieselbe sich weder in der grossen Bibliothek in Kopenhagen noch im Archiv der Monumenta Hist. Germaniae befindet. Wahrscheinlich hat Luc. Holstenius nur die eine oder die andere der von mir gekannten römischen Handschriften benutzt, nicht aber die damals in Cus befindliche, jetzige Brüsseler Handschrift.

Im Frühjahr 1889 untersuchte ich die Centones aus den Laudes dei des Dracontius in der Berliner Handschrift. Sofort sah ich, wie wichtig dieselben seien für die Herstellung des Textes, bald freilich auch, wie nothwendig es sei, die ganze handschriftliche Überlieferung dieser Dichtung zu untersuchen und klar zu stellen.

Die jetzige Berliner Handschrift (Codex Meermann-Phillipps 1824) besteht, nachdem das ursprünglich erste Blatt weggeschnitten ist, noch aus 72 Pergamentblättern in klein Quart. Die Handschrift gehörte einst dem 'Collegium Parisiense Soc. Jesu'. In dem für die Versteigerung dieser Bibliothek hergestellten 'Catalogus manuscriptorum codicum collegii Claromontani Paris 1764' ist sie p. 282 als Nr. 730 aufgeführt. Doch werden ausser Dracontius und Juvencus als Bestandtheile dieses 'codex male compactus' genannt: 3) und 4) Zwei Anonymi de gradibus affinitatis und de ponderibus et mensuris. 5) Fulgentius ad Chalcidium. 6) ein Anonymus de generibus versuum und de partibus orationis. In Göttingen liegt ein Exemplar dieses Catalogs mit

einer Menge von handschriftlichen Zusätzen und Änderungen, vielleicht das Handexemplar Meermanns, jedenfalls die Grundlage des 4. Theils der Bibliotheca Meermanniana von 1824. Daraus ist ersichtlich, dass Meermann jene Handschrift Nr. 730 in zwei Theile zerlegt und jeden besonders gebunden hat. Der uns angehende Theil hat desshalb die alte Signatur 730 A. In dem Catalog von 1824 tritt unser Theil als Nr. 707, der andere (Nr. 3—6 umfassende, saec. XII) als Nr. 703 auf. Mit der Bibliothek Phillipps kam unsere Handschrift 1888 nach Berlin in die königliche Bibliothek.

Die 72 Blätter sind von éiner Hand wohl noch im 9. Jahrhundert beschrieben. Die Centones füllen Bl. 1—6 in einer und die Vorderseite von Bl. 7 in zwei Spalten. Auf der Rückseite von Bl. 7 beginnt der Juvencus. Der Schluss der Vorderseite des Blattes 7 und die untere Hälfte der Rückseite ist mit tironischen Noten gefüllt, die ich im Anhang bespreche.

Von diesen Centones aus Dracontius findet sich schon eine ältere Spur. Arevalo (Proleg. §. 50) citirt aus des Phil. Labbeus Nova biblioth. mss. sive specim. antiq. lect. in coronide poetica p. 59 'Gisleberti Aureae Vallis abb. ord. Cist. versus in S. eucharistiam addi poterant ex Petaviano Indice cum centonibus de poenitentia ex Dracontio'.

Zuerst müssen wir uns klar werden über die Einrichtung dieser Centones. Wie die vielen unverständlichen Stellen beweisen, war der Mann, welcher im 7.—9. Jahrhundert diese Auslese machte, kein feiner Kopf. Dann ist es überhaupt sehr schwierig, solche Excerpte sachlich bis ins Einzelne zu gruppiren. Es werden also aus den drei Büchern die Verse, welche den bezeichneten Gegenstand zu betreffen scheinen, ausgeschrieben, und nur, wenn die überlieferte Reihenfolge verändert wird, dürfen wir nach einem Grunde fragen.

Aus den 2312 Versen sind etwa 410 ausgelesen und durch Überschriften in zwei Sammlungen geschieden. Die erste Sammlung ist überschrieben 'in laudibus dei et de sua paenitentia'. Die Laudes dei schildern, wie allmächtig Gott ist und wie die ganze Natur seine Allmacht anerkennt; der Mensch allein frevelt gegen ihn, doch warnt Gott ihn und verzeiht ihm gern. Dieser Abschnitt findet seinen guten Schluss mit III 243 und 244:

Quod si cuncta velim miracula currere sollers,
Non mihi sufficiant mortalis tempora vitae.

In dieser 1. Abtheilung ist die Reihenfolge der Verse vier Mal gestört. Für die Umstellung von I 302 und von II 555/6 liegt der Grund offen. II 36 passt wenigstens zum vorangehenden I 736 und II 686—700 zum folgenden I 738.

Die 2. Abtheilung über die paenitentia des Dracontius ist enthalten in III 548—682 (Bl. 3^a bis 4^b). Die vorangehenden Verse II 472—475 und 458—464 (der Fall der Engel) leiten die paenitentia des Dracontius passend ein, zumal in dieser Umstellung und mit dem Schlussgedanken 'error eos tenuit. Quid homines miseri fragili sub tegmine carnis?'

Die 2. Sammlung (Bl. 5^a bis 7^b) soll handeln 'de origine mundi ab Adam et Eva'; in Wahrheit ist es eine Art Heilsgeschichte bis Christus. Die Umstellung der Verse I 181. 180 und 190 ist verständlich; doch nach II 427. 476 (Bl. 6^b) scheinen die Stücke des II. und des III. Buches planlos durch einander geworfen zu sein. Ich glaube den Faden der Ordnung gefunden zu haben in der Zeit der genannten Personen: II 615—664 Abraham. II 786—798 Rothes Meer. II 649—651 Tobias. III 468—477 Judith. II 654—663 David und Ezechias. III 205—213 Daniel oder Herkules. II 676—682 Vater des Johannes. II 587—591 Menschwerdung und II 499—556 Erlösungswerk Christi. Innerhalb dieser grösseren Stücke sind nur drei einzelne Verse umgestellt: I 181 ist des Schlagworts halber vor 180 gestellt; II 198 ist sehr verderbt; mit den Centones scheint er nicht zwischen 211 und 212 gestellt werden zu können. Dagegen ist II 625 mit den Centones nach 628 zu stellen.

Die wichtigsten Handschriften sind natürlich diejenigen, welche uns die drei Bücher vollständig überliefert haben. Bis jetzt sind fünf bekannt goworden. In allen wird Augustin als Verfasser genannt.

B = Brüssel Nr. 10722, 12. Jahrh. Diese wichtige Sammelhandschrift ist besonders von E. Grosse beschrieben worden vor dem Novus Avianus (Königsberger Programm 1868) und wohl am ausführlichsten von L. Traube in Mon. Germ. Hist. Poetae III p. 152/3. Sie ist nach Traube's Vermuthung in der Nähe von Trier geschrieben und gehörte einst dem Nicolaus Cusanus. Siehe oben S. 258. Eine genaue Collation des I. Buches konnte ich durch die Güte des Hrn. Gymnasialdirector Dr. E. Grosse in Königsberg benutzen; das II. Buch und die von mir herausgegebenen Verse des III. Buches hat mein einstiger Reisegefährte Prof. J. C. Vollgraff in Brüssel mir freundlichst verglichen.

M = Vatican. 3853, XV. Jahrh. Perg. in Fol., enthält nur diese Schrift. Mehrere Hände haben gebessert. Vergl. oben S. 258.

V = Vatican. 5884, XV. Jahrh. Pap. in 4°, enthält nur diese Schrift. Eine andere Hand hat später gebessert. Auf dem Einband steht 'Cardinalis Syrliti'. Vergl. oben S. 258.

R = Handschrift des Thomas Rediger Nr. 59 in der Breslauer Stadtbibliothek, XV. Jahrh. Pap. in 4° min. Enthält Calpurnius und

Nemesianus (vergl. Schenkl's Praefatio p. L): Bl. 28 Quinti Sereni medici liber. Bl. 57—108 unser Gedicht. Auch hier hat eine zweite Hand gebessert. Vergl. oben S. 258. Ich konnte durch die Güte des Vorstandes der Breslauer Stadtbibliothek diese Handschrift selbst einsehen.

U = Vatican. Urbin. 352. Den reichen Inhalt dieser Handschrift hat Arevalo (Prolegom. §. 68—76) verzeichnet. Die Unterschrift 'Federicus Veteranus Urbinas transcripsit a. sal. 1481 id. Aug.' beweist, dass das a. 1494 in Bobbio wieder entdeckte und durch Abschriften verbreitete 'Dracontii opus in carmine' oder 'Dracontii varium opus' nicht unser Gedicht sein kann, was O. v. Gebhard im Centralblatt f. Bibliothekswesen 1888 S. 391 schon mit anderen Gründen bewiesen hat.

Der besonderen Freundlichkeit des Hrn. Dr. O. Günther aus Lüneburg, eines früheren Angehörigen der Göttinger Universität, verdanke ich die sorgfältige Vergleichung der Verse I 1—115 und der übrigen in den Berliner Centones enthaltenen mit den Handschriften M und V; dann der Verse I 1—115 mit der Handschrift U. Für U verliess ich mich sonst auf Arevalo; doch hat an bedenklichen Stellen (I 345. 347. 372. 394. 463. 553. 734. II 57. 221. 369. 521. 543. 544. 625. 631. III 468. 476. 564. 590. 651. 676) Dr. Günther's Nachvergleichung gezeigt, dass man auf Arevalo's Angaben nur bedingt sich verlassen kann.

Eine dritte selbständige Überlieferung haben wir für die Verse 116—754 des I. Buches in der Umarbeitung und Sonderausgabe des Eugenius von Toledo. Er machte dieselbe auf Wunsch des Königs Chindaswint um 650 und schickte ihr ein prosaisches und ein poetisches Vorwort voran. Diese Sonderausgabe wurde mehr verbreitet als das Gedicht des Dracontius selbst.[1] Von den Ausgaben sind nach den

[1] Aus dieser Sonderausgabe sind auch die Citate genommen, die zum Theil Riese nachwies in den von Hagen edirten Berner Supplementen zur Grammatik des Julian von Toledo (Anecdot. Helv. p. CCXIV—CCXXXVIII); p. 216.6 und 10 = I 629 und 116; p. 227.26 = I 357 (fast gleich Cod. Tolet.); p. 227.28 = I 333; p. 232.10 und 12 = I 548 und 204. p. 235.15 = I 117. Der Kreis der hier citirten Dichter verdient genauere Beachtung. Aus den benutzten Quellen wurden natürlich auch Classikercitate herüber genommen: Virgil (ausser andern auch p. 214.25 Georg. I. 434; p. 216.14 vergl. Georg. III 184. p. 233.5 vergl. Aen. 4.22), Lucan und ähnliche (so p. 231.4 Ovid Met. X. 531). Doch den breiteren Raum nehmen die Citate aus neueren und neuesten Dichtern ein: aus Prudentius, Catonis disticha, Sedulius, Venantius u. s. w. Neben dem Hexaemeron werden die Gedichte des Eugenius von Toledo selbst citirt: p. 215.24 = Eug. p. 62 (der Madrider Ausg. von 1782) Nr. 23; p. 216.8 = Eug. p. 37 Nr. 20 u. p. 55; p. 229.26 = Eug. p. 59 Nr. 8; p. 230.14 = Eug. p. 20 Nr. 2. p. 232.6 = Eug. p. 56; p. 232.14 und 16 = Eug. p. 27 Nr. 13 und p. 24 Nr. 11. Interessanter ist die Anführung des Corippus: p. 216.16: Laudes Just. Praef. 25; p. 229.9 = Just. 4.243; p. 231.10 und 12 = Just II 1 und 254. Unter den etwa 25 Versen, die zu bestimmen vielleicht Andern gelingen wird, kann ein oder der andere aus den Lücken des Corippus stammen; vergl. z. B. p. 230.24 Adnixique globum zipperi freta cana

Untersuchungen Arevalo's (§. 53—66) drei wichtig: 1. Marii Victoris Ἀληθείας .. Dracontii de opere sex dierum. Paris 1560 apud Morelium, worin es heisst 'Quae .. Dracontii subsequuntur, ea nobis S. Victoris Paris. libraria suppeditavit.' 2. Eugenii Toletani Opuscula (ed. Sirmond), Paris 1619. 3. Patrum Toletanorum Opera. I (Eugenii Tol.) Madrid 1782. In dieser Ausgabe ist die Toledaner Handschrift verglichen.

Ehe ich darauf eingehe, wie die drei Zweige der Überlieferung, die Berliner Centones, die Sonderausgabe des I. Buches durch Eugenius und die vollständigen Handschriften zu einander stehen, will ich zuerst die fünf vollständigen Handschriften selbst näher betrachten. Das Ergebniss ist ein einfaches: die drei römischen Handschriften (MVR) und die Breslauer (R) stammen alle aus der Brüsseler (B). Das beweist eine Menge von Stellen, wo diese vier Handschriften (ich bezeichne sie mit ∞) schlechter sind als die Brüsseler. Z. B. I 32 haben sie (deus hominibus) poenam minatur Contrita quo dominum possit mens nostra precari. Das unmögliche contrita suchte die zweite Hand in V durch conscia zu ersetzen, in R durch ut statt quo unschädlich zu machen. Doch der Fehler ist nur dadurch entstanden, dass das richtige t̄rita (territa), was in B steht, falsch abgeschrieben wurde. Anderseits haben allerdings diese vier Handschriften an ziemlich vielen Stellen bessere Lesarten als B, ihre Vorlage. Solche Vorzüge der Humanistenhandschriften bereiten sonst (z. B. im Lucrez) viele Unklarheit über die Abstammung der Handschriften; doch hier sind wir zum Glück im Stande nachzuweisen, wie es zuging.

Aus der Brüsseler Handschrift wurde zuerst die vatic. M abgeschrieben. Dann wurde M von einer andern Hand durchcorrigirt; hierauf erst wurde V aus M abgeschrieben, aus dem dann R und U stammen. Daher hat die erste Hand in M eine Menge Lesarten mit B gemeinsam (durchweg leichte Verderbnisse), welche dann in M von der zweiten Hand geändert sind und in dieser geänderten Gestalt sich in den Handschriften VRU finden. Z. B. I 50 hat B und die erste Hand in M Quid fera quid peto des quid peccauere uolucres: pecudes, was die zweite Hand in M gebessert hat, findet sich auch in VRU. In I 104 minante Ante nec agnoscit dominum quicumque furentem war ante ausgefallen, so dass in B und M der Vers mit

secabant. p. 229.11 et sceptro et solio praebet sibi (?) ira magistro. Es spiegelt sich hier der Umkreis der Lectüre gebildeter Spanier aus jener Zeit, wie er ähnlich vorliegt in der berühmten Toledaner Sammelhandschrift, die uns den Corippus gerettet hat.

Nec beginnt; dann hat in M die zweite Hand non darübergeschrieben und desshalb steht in VRU Nec non agn. Vergl. noch I 428 sanctum sanxitque: III 595 portasse. Also sind auch die zahlreichen Fehler, welche diese vier Abschriften MVRU gegen B gemeinsam haben, demjenigen zuzuschreiben, welcher M aus B im XV. Jahrhundert abschrieb, ihre gemeinsamen Vorzüge aber dem tüchtigen Humanisten, welcher zuerst M durchcorrigirt hat.

Aus der Handschrift M stammt zunächst die Handschrift V, aus V die Handschrift R und aus dieser der letzte Ausläufer die Handschrift U. Die Fehler, welche der Schreiber von V gemacht hat, finden sich also auch in R und U. So I 85 placare deum BM: pacare VRU. I 333 hominem non terra parit BM: prodit VRU; I 364 iste BM: ille VRU; vergl. II 369 hominum; 411 flammas; III 476 ad urbes. Wiederum haben R und U die Fehler gemeinsam, welche der Schreiber von R beging. So fehlen z. B. die beiden Verse II 152[a] Fluctibus und 152[b] Te mandante poli; beide haben I 67 terrae prorumpit (praer. U) hiatum statt hiatu (BMV) und II 427 sic fronte pudoris statt sine. U ist der letzte Ausläufer. Der Schreiber hatte die Sitte, bei unverständlichen Wörtern gleich ganze Verse weg zu lassen. So fehlen in U gut 20 Verse des II. und III. Buches, die sogar in R stehen. Dazu kommen neue Fehler. Es war ein Unglück, dass Arevalo gerade nur diese Handschrift fand. Benutzt hat er sie im Ganzen fleissig. Doch laufen, wie schon oben (S. 262) bemerkt, Irrthümer unter, wie I 61 Hinc matres et monstra creant hinc unda cruores inficit, wo Arevalo irrthümlich mortes und cruorem giebt.

Auch nachdem V aus M, R aus V und U aus R abgeschrieben waren, wurden diese Handschriften noch gelesen. Das Interesse, welches einige Humanisten an dem Gedicht nahmen, bezeugen Änderungen dieser späteren Leser, welche natürlich in die Abschriften nicht übergegangen sind. Besonders in M finden sich solche späteren Besserungen von verschiedenen Händen, die ich nicht weiter geschieden habe. Welchen gelehrten Standpunkt wir erwarten dürfen, bezeugt z. B. die Note in M zu III 679 vireta 'virecta scribi Servius asserit'. So ist hier verbessert I 18 tristitiaeque. I 31 ist zu 'adsumat' am Rande bemerkt: 'ad summam puto'. I 91 nitet: am Rande 'nuens forte'. III 409 ist Terrora genitori dum maior Cartaginis hostis, was von Regulus gesagt wird, nach Mai's Angabe trefflich gebessert in: Terror Agenoridum. Oft sind metrische Fehler bemerkt, wie II 463 zum Anfang Quid homines notirt ist 'nam *adderem*' und III 681 Et gratias exceptus agam ex fasce malorum geändert ist zu Atque exceptus agam grates ex fasce malorum. Diese Besserungen gelehrter

Leser allein können diesen vier Handschriften MVRU für einen künftigen Herausgeber einiges Interesse verleihen. Sonst haben diese Abschriften keinen Werth neben ihrem Originale, der Brüsseler Handschrift B.

Die Herstellung des Wortlautes dieser Dichtung ist also nur zu gründen auf die Sonderausgabe des I. Buches durch Eugenius, auf die Berliner Centones und auf die Brüssler Handschrift. Diese drei Quellen des Textes sind von einander unabhängig; ihre besonderen Vorzüge und Fehler sind durch ihr Alter und durch andere Umstände bestimmt.

Die Sonderausgabe von I 116—754, welche Eugenius von Toledo gemacht hat, ist durch sehr alte Handschriften überliefert. Die berühmteste von diesen ist die Toledaner Handschrift (vergl. oben S. 262. Note), welche zuletzt Traube in den Poetae medii aevi III, 1 S. 125 und Loewe-Hartel in der Bibliotheca patrum lat. Hispan. I S. 284—290 beschrieben haben. Sie ist benutzt in den Patrum Toletanorum Opera I (1782), welche ich mit *Tol.* bezeichnet habe. Nächstdem scheint wichtig die Handschrift Nr. 273 von Laon, zuletzt benutzt von Pitra in den Analecta .. Spicilegio Solesmensi parata V, 1888, S. 177 u. 181. Sie scheint die Vorlage zu der Handschrift S. Victoris Parisiensis zu sein, aus der Morel's Ausgabe (Paris 1560, von mir mit *Mor.* bezeichnet) gedruckt wurde. Denn in Morel's Ausgabe fehlen die 58 Verse I 481—538, und von der Handschrift von Laon sagt Pitra 'folium avulsum sustulit 58 versus'. Ausserdem weist Arevalo in den Prolegomena (§. 37—58) noch drei Pariser Handschriften des Dracontius-Eugenius nach: 2832 saec. IX, 8093 saec. IX, X und XIV und 8321 saec. XV. Auf der Handschrift 2832 beruht Sirmond's Ausgabe (Paris 1619), die ich mit *Sir.* bezeichnet habe. Leider kann ich die Lesarten dieser Handschriften selbst nicht beibringen. Ich habe die Ausgaben Morel's, Sirmond's und der Patres Toletani sorgfältig verglichen, in welchen die wichtigsten der genannten Handschriften ausgenützt sind. Ich konnte mich darein fügen, weil aus der Vergleichung dieser drei Ausgaben vollkommen sicher wird, welche Form Eugenius den Worten des Dracontius gegeben hat. Ich habe diese Form, d. h. die übereinstimmenden Lesarten der drei Ausgaben, mit *Eug.* bezeichnet.

Eugenius sagt selbst, dass er geändert habe. Wo seinen Lesarten die der Centones und der Brüsseler Handschrift gegenüberstehen, sind diese letzteren stets die richtigen. Steht ihnen nur die Brüsseler Handschrift gegenüber, die ja selbst vielfach verdorben ist, so muss man oft schwanken. Dazu kommt bei manchen Änderungen noch die Unsicherheit, ob sie von Eugenius selbst oder von seinen Ab-

schreibern herrühren. So fehlen z. B. die Verse 249. 412. 413. 661. Sie können erst in den Abschriften des Eugenius ausgefallen sein; allein, da sie entbehrlich sind, kann auch schon Eugenius sie weggelassen haben.

Die Berliner Centones haben bei der Ausnutzung für die Herstellung des Textes den Nachtheil, dass sie eben Centones sind und zu ihrem Zwecke hie und da auch der Text geändert worden ist. So sind mitunter Versstücke weggelassen, wie I 364 Noverit. 371 Nec mora; oder die Wörter sind umgestellt, wie I 84: Si bonis bona ventura sunt nos ante fruamur statt Si bona sunt ventura, bonis nos ante fruamur; oder sie sind geändert, wie in dem schlimmsten Beispiele die Verse II 193 und 194 Tu, deus omnipotens, nosti quod feceris orbem Semine, quo caelos solem lunamque creasti gekürzt sind zu Tu, deus omnipotens, solus qui cuncta creasti. Meistentheils sind diese Änderungen unbeholfen und kümmern sich nicht um das Versmaass; so I 72 Cum niger umbrarum veniens exercitus orbem, wo a saxis vor veniens eingeschoben ist. II 463 Quid ego miser fragilis sub tegmine carnis Captivum quem membra tenent et corporis usus statt Quid homines miseri fragili sub tegmine carnis Captivos quos membra tenent et corporis usus. Dazu kommt eine beträchtliche Zahl von groben Schreibfehlern, wie I 493 Errantes per pratas eas statt prata reos. Diese Veränderungen sind fast alle so, dass man gegenüber den Lesarten von B sie leicht als solche erkennen kann.

Daneben bieten diese Centones eine grosse Zahl trefflicher Lesarten, also Bestandtheile, welche aus der vorzüglichen, uns verlorenen Quelle dieser Centones stammen. Es genügt auf die ersten und die letzten Verse hinzuweisen: I 1 cupit iratum C (die Centones): cupiunt animis B 4 confessa C: conversa B 5 Quinque C: Quemque B luna triones C: luna et omnes B III 680 In nemus C: Quamvis ad B veniam C: venit B 681 grates . . de C: gratias . . ex B. Die Herstellung des Textes wird also durch diese Handschrift sehr gefördert.

Doch mehr reizen unsere Aufmerksamkeit die neuen Verse. Während nämlich sonst alle einzelnen Verse dieser Centones sich in der Brüsseler Handschrift oder bei Eugenius (wie I 340) nachweisen lassen, stehen zwischen III 605 und 606 (Arevalo) nicht weniger als 38 Verse, von denen in diesen drei Büchern keine Spur zu finden ist. Die Sprache dieser Verse passt trefflich auf Dracontius, ja der Inhalt passt nur für ihn. Woher stammen sie? In den 10 mythologischen Gedichten und in der Tragoedia Orestis ist ebenfalls von diesen Versen keine Spur zu finden.

Sicher sind Gedichte des Dracontius verloren oder noch verschollen. So ergibt sich aus der Nachricht, die Riese und Bährens

(Rh. Mus. 32 S. 319 und 33 S. 313) besprochen haben, dass noch vor 300 Jahren ein Lobgedicht auf den König Thrasamund vorhanden war in einer Handschrift, aus welcher einige Verse De mensibus und De origine rosarum gerettet sind. Eine weitere Spur gibt eine Handschrift in Verona Nr. CLXVIII (155), die Flores moralium auctoritatum vom Jahr 1329. Diese Sammlung war schon früher beachtet wegen der Citate aus Cicero's Briefen und aus Catull. Dann hat sie mir für die Spruchsammlungen des Publilius prächtige Hülfe geleistet, und G. Loewe hat (im Rh. Mus. 34 S. 138) nachgewiesen, dass auch die darin benutzte Handschrift des Corippus wichtig, aber uns verloren ist. Ich hatte dieselbe fast nur für Publilius ausgenutzt, aber doch (in den 'Sammlungen der Spruchverse des Publilius Syrus' 1877 S. 62) daraus eine Sentenz veröffentlicht: Blatt 1 Sp. 2: Bloxus in Romulea Quia numina semper Irasci miseris possunt felicibus autem Et praestare volunt. Riese bemerkte (im Liter. Centralblatt 1877 Sp. 1689) 'das Fragment eines Dichters Bloxus scheint auf eine noch vollständigere Sammlung der Gedichte des Blossius (Aemilius Dracontius) hinzuweisen'. Er hatte Recht. Auf meine Bitte brachte Hr. Hiller von Gaertringen der Wissenschaft das Opfer, das berühmte Florilegium auf weitere Blossiuscitate durchzusehen und fand noch drei: Bl. 3 Sp. 4 (lib. I): Blosus in Romulea. Egregias mentes uirtus delectat in hoste. Bl. 4 Sp. 2 (lib. I): Blosus in Romulea. Dat uirtus exempla bonis prauisque pudorem Debilitat quos lapsa premunt. Bl. 8 Sp. 1 (lib. II): Blosus in Romulea. Sed quid fata ueto, quid (flexos getilgt) fixos arceo casus, Cum nichil aduersis prosit prudentia signis. Diese drei Stellen finden sich in den kleineren mythologischen Gedichten: die erste und zweite in IX 5 und 8—9 (Debilitas quos lassa premit); die dritte in VIII 131. 132. Doch die von mir veröffentlichte Stelle vermochte ich nicht zu finden. Darnach dürfen wir bei Romulea nicht etwa an eine verlorene grosse epische Dichtung denken; sondern die Sammlung der kleineren Gedichte des Dracontius hatte dieses Wort im Titel. Dracontius hat vielleicht erst in der Schule Lateinisch gelernt; so spricht er seinen Lehrer an I, 14

> Barbaris qui Romulidas iungis auditorio,

und III, 17 de vestro fonte, magister,

> Romuleam laetus sumo pro flumine linguam
> Et pallens reddo pro frugibus ipse poema.

(So schrieb Bücheler: die Handschrift hat Romuleum .. summo). Jedenfalls aber wurde in dem Veroneser Florilegium eine Handschrift dieser kleineren Gedichte ausgenützt, die vollständiger war als die uns erhaltene.

Allein, wenn auch Gedichte des Dracontius verloren oder noch verschollen sind, spricht doch Vieles dafür, dass diese 38 neuen Verse der Berliner Centones aus keinem andern Gedichte stammen, als aus der vorzüglichen Handschrift der Laudes dei, aus welcher diese Centones ausgelesen sind. Es gibt zunächst manche Spuren, welche eine solche Lücke in der Brüsseler Handschrift wahrscheinlich machen. Der Vers I 340 fehlt in ihr, steht aber sowohl bei Eugenius wie in den Centones; die Verse I 185. 271. 272. 285. 327. 328. 684. 710. 721 hat Eugenius, aber *nicht* die Brüsseler Handschrift. Die V. 185. 684. 721 sind unentbehrlich; deshalb ist zu schliessen, dass alle diese Verse nicht von Eugenius zugesetzt, sondern echt und ursprünglich sind, dass sie aber, wie I 340, nur durch Nachlässigkeit eines Schreibers in B oder in seinen Vorlagen ausgefallen sind. Wie viele Verse im II. oder III. Buche fehlen, können wir demnach nur vermuthen. Bedenken erregen dann die starken Versumstellungen in B. So steht I 149 Et mare ganz thöricht nach I 162. Nach II 218 Frondescunt stehen in der Brüsseler Handschrift 11 Verse, welche alle nach 253 Cur non zu setzen sind; (Arevalo hat sie mit Unrecht an verschiedene Stellen vertheilt). Der Vers II 625 ist nach 628 zu setzen. In dem III. Buch stehen nach V. 607 Quicquid 8 Verse, die Arevalo mit Recht nach 628 Ut bene gesetzt hat. Anderseits fehlt nach III 605 entschieden der grammatische Abschluss des Satzes. Dieser Abschluss wird durch den Anfang der neuen Verse gegeben. All dies spricht dafür, dass diese Verse in der Brüsseler Handschrift oder in einer ihrer Quellen durch Lässigkeit eines Abschreibers oder durch Ausfall von Blättern weggefallen sind.

Nun könnte ja der Schluss des III. Buches ohne die hier entwickelten Gedanken bestehen. Allein auch diese Fülle oder Überfülle der Rede, welche durch ihren Zusatz entsteht, ist bei einem Bereuenden und Bittenden am Platze und war damals Mode. Auf dieser Mode beruht das Jammer- und Reugebet, die Synonyma, des Isidor und jene Schriften, welche ich im Anhang zur Abhandlung über den Ursprung der rythmischen Poesie (Abhandl. der Münch. Akad. d. Wiss. XVII, II, 1885 S. 432) besprochen habe; ein Ausläufer dieser Mode sind die Litaneien der verschiedenen Liturgien.

Also sind jene 38 Verse von Dracontius an der Stelle gedichtet worden, an welcher die Berliner Centones sie uns überliefert haben.

Von den vorangehenden 57 Versen (550—607) hat der Ausleser 19 weggelassen, 38 aufgenommen: demnach müssen wir schliessen, dass auch zwischen diesen 38 neuen eine ähnlich grosse Zahl Verse des Originals ausgelassen sein kann. Im Übrigen ist die ganze Gruppe von 550—682 ziemlich gut in den Centones abgeschrieben, und auch

in diesen neuen Versen wird die Herstellung der wenigen noch bleibenden Schwierigkeiten gelingen.

Welcher Art die Brüsseler Handschrift (B) ist, das haben die vorangehenden Untersuchungen schon gezeigt. Einzelne Verse und Reihen von Versen sind ausgelassen oder verstellt. In Rücksicht auf die einzelnen Wörter finden sich alle Arten von Verderbnissen, von den leichtesten bis zu den schwersten. Leicht ist nun die Entscheidung und Hülfe, wenn die Überlieferung des Eugenius oder der Centones mit der Brüsseler verglichen werden kann. Sind wir allein auf die Brüsseler Überlieferung angewiesen, so genügt oft leise Änderung. Z. B. wird II 251 die bevorzugte Stellung des Menschen vor den andern Geschöpfen begründet durch die Verse Nam diversa dei solo sermone creantur Illic ussor eat, nos autem operarius aptat. Arevalo setzt starke Hebel an und schreibt: Illaec voce creat, nos autem operosius aptat. Es genügt: Illic iussor erat, nos autem operarius aptat. Wenn auch iussor fast ἅπαξ λεγόμενον ist, so bildet es doch hier einen trefflichen Gegensatz zu operarius. III 107 wird von Isaac, der sich ruhig opfern lässt, überliefert in B.:

Quid notus erat qui ad uulnera colla parabat.

V und R haben Quid notus, woraus Glaeser 'Quid quod natus', Mai 'Qui sibi natus' machte. U liess wieder den ganzen Vers aus mit dem Zeichen einer Lücke, die Arevalo füllte mit dem Verse: Sic solum exhibito nata est immensa propago. Es ist aber nur zu ändern:

Qui deuotus erat, qui ad vulnera colla parabat.

Auf der anderen Seite sind manche Wörter ganz weggelassen, manche auf das stärkste entstellt. Der Schreiber der Brüsseler Handschrift selbst trägt kaum die Schuld daran; denn im XII. Jahrhundert verstand man besser Latein. Vielmehr muss ein alter Vorläufer von B auf manchen Seiten besonders beschädigt gewesen sein. Denn während längere Versreihen sich glatt lesen, sind an einzelnen Stellen die kritischen Schwierigkeiten gehäuft.[1]

[1] Von dem Werke des Dracontius haben wir bis jetzt: 754 Verse des I. Buches, wie bei Arevalo, dazu werden unten V. 37a und 38a kommen; im II. Buch die 813 Verse von Glaeser (Arevalo 808); im III. die 699 von Glaeser (Arevalo 682). Dazu kommen zunächst aus B noch 6 Verse, die auch bei Glaeser fehlen:

II 107a Ut posset monstrare deum, quia lumina carnis.
II 152a und 152b; unten bei den Centones gedruckt.
II 413a Mox fecundus ager steriles expavit harenas.
II 483a Vel minor unda velit caelesti occurrere flammae.
III 413a Per iugulos transire et nos et pectora dura.

Zu diesen 2274 Versen kommen noch aus den Centones die 38 neuen, nach III 605

Arevalo's Eifer und Begeisterung hat für die Reinigung des Textes Vieles geleistet. Doch ein neuer Herausgeber, dem Fleiss und zumal kritischer Sinn nicht abgehen, wird bei richtiger Benutzung der von mir dargelegten Textesquellen, besonders mit Hülfe der Berliner Centones das Verständniss dieses werthvollen, aber bisher fast vergessenen Denkmals der christlichen Literatur bedeutend fördern können.

Welches ist der ursprüngliche Titel dieser Dichtung? Diese Frage zu beantworten, ist nicht leicht. Isidor sagt von Dracontius 'composuit heroicis versibus Hexaemeron creationis mundi.' Das bezieht sich nur auf jene Sonderausgabe des I. Buches durch Eugenius von Toledo, welche auch der h. Ildefonsus nennt 'libellos Dracontii de creatione mundi'. Eugenius selbst deutet in seinen Prologen den Titel der ganzen Dichtung nirgends an. So bleiben zur Beantwortung dieser Frage nur die Handschriften und die Dichtung selbst. Vor dem I. Buch hat die Brüsseler Handschrift (B) 'S. Augustini liber de laudibus dei', die Handschriften M und V 'Aurelii Augustini de laudibus dei liber (primus *add.* V) incipit feliciter', R und U 'Aurelii Augustini de deo liber incipit foeliciter'. Im Übergang von I. zum II. Buch und vom II. zum III. Buch hat B 'Incipit liber secundus (tertius)', M und V 'Incipit liber secundus (tertius) de laudibus dei'; in R und U steht gar keine Unter- oder Überschrift. Am Schluss des ganzen Werkes steht in B 'Explicit liber S. Augustini de laudibus dei', in M und V 'Aurelii Augustini de laudibus dei liber tertius et ultimus explicit (finit V) felicissime . deo gratias', in R 'Finis A. Augustini', in U 'Finis A. Augustini de deo'. Auch hier zeigen sich die Handschriften MVRU als Abschriften von B und wieder R und U als die schlechtesten. Arevalo hat nach seiner Handschrift U und nach Versen, wie I 749 den Titel 'Carmen de deo' gemacht und dieser ist bis jetzt allgemein im Gebrauch. Er ist natürlich falsch.

Für die Untersuchung kommt nur der Titel von B in Betracht: Augustini liber de laudibus dei. Wie der Name des Augustinus in B oder in eine von dessen Vorlagen gekommen ist, das wissen wir nicht; falsch ist er jedenfalls. Es bleibt der Titel de laudibus dei. Man könnte meinen, dieser Titel sei von einem Leser gemacht nach den Versen

I 749 Ut valeam memorare tuas hoc carmine laudes, und
II 663 Ut merear cantare tuas per carmina laudes.

---

einzureihenden: also haben wir jetzt 2312 Verse. Ich citire nach der gangbaren Ausgabe von Arevalo, da doch auch Glaesers Nummern vom nächsten Herausgeber werden umgestossen werden.

Allein ein solcher Vorgang ist wenig wahrscheinlich. Denn der Anfang des Gedichtes 'Qui cupit iratum placidumve scire tonantem, hoc carmen . . legat' verkündet scheinbar anderen Inhalt und jene Verse sind abgelegen. Anderseits hat die 1. Sammlung der Centones (C) die Überschrift 'Ex libris Dracontii in laudibus dei et de sua paenitentia', die 2. 'de origine mundi ab Adam et Eva'. Da 'laudibus dei' auch hier wiederkehrt, so hat dasselbe sicher im Titel der uralten und trefflichen Quelle gestanden, auf welche die Brüsseler und die Berliner Handschrift zurückgehen. Die Frage ist nur, ob nicht auch die Zusätze de sua paenitentia und de origine mundi ab Adam et Eva im Titel des ganzen Werkes oder in Titeln der einzelnen Bücher gestanden haben. Ein so langer Gesammttitel ist an und für sich unwahrscheinlich. Ferner widerspricht der Inhalt selbst sowohl einem solchen Gesammttitel als diesen Theiltiteln. Denn im I. Buch schildert Dracontius, wie Gott Alles nur für den Menschen schuf; wie der Mensch verführt wurde, jetzt sterblichen Leib hat, doch auferstehen wird; wie der allmächtige Gott den Sünder warnt und ihm verzeiht; im II. Buch, wie der allgewaltige Gott in der ganzen Natur und als Mensch auf Erden Wunder wirkte, wie aber die Menschen jede Unthat verübt haben und noch verüben; wie dennoch Gott die Menschen bessern will und nur ungern und nur die verstockten straft; im III. Buche, wie Gott für Alles sorgt; wie die geizigen Menschen zu ihrer eigenen Qual nur an sich denken, dagegen die gottseligen um Gottes willen das Leben und alles Irdische missachten, was sogar ungläubige Griechen und Römer (viele Beispiele aus Sage und Geschichte) aus minder edlen Gründen gethan hätten; wie die ganze Natur Gott gehorche und nur wir Menschen uns widersetzen; so habe auch er, Dracontius, an Gott gesündigt; doch jetzt bereue er; desshalb möge Gott ihn aus der jetzigen Strafe im Kerker endlich erlösen.

Die Schilderung der 6 Schöpfungstage füllt nur den kleineren Theil des I. Buches und ist nur Mittel zu einem anderen Zweck; die paenitentia im III. Buch beginnt erst mit dem V. 550. Demnach wären diese Zusätze 'de paenitentia' und 'de origine mundi' sowohl im Gesammttitel wie als Theiltitel durchaus unpassend und sind gewiss erst von dem Sammler der Centones zugesetzt worden. Der ursprüngliche Titel dieser Dichtung war also Laudes dei oder Libri de laudibus dei. Diesem Titel entsprechen die Verse I 749 und III 663 und der ganze Inhalt, welcher die unendliche Güte des allmächtigen Gottes gegen die geringen Menschen preist.

Der Anfang der Dichtung (I 1—53).

Wie die philologische Kritik in diesem Werk zu handhaben ist, aber auch was damit erreicht werden kann, das mag ein merkwürdiges Beispiel lehren. Es handelt sich um V. 36—49 des I. Buches. Ich gebe des Zusammenhanges und des Beispiels halber die V. 1—53 mit den Lesarten aller Handschriften. Mit C bezeichne ich die Berliner Centones, mit B die Brüsseler Handschrift, mit ∞ die 4 Handschriften MVRU.

Die mit * bezeichneten Verse finden sich in den Berliner Centones.

*Qui cupit iratum placidumve scire tonantem,
*Hoc carmen si mente legat dum voce recenset,
3 *Agnoscet, quem templa poli quem moenia caeli
*Auctorem confessa suum venerentur adorent.
*Quinque plagae septemque poli sol luna triones
6 *Sidera signa noti nix imber grando pruinae
*Fulmina nimbus hiems tonitrus lux flamma procellae
*Caelum terra iubar chaos axis flumina pontus
9 *Vel quicquid natura dedit praecepta creare,
Hoc agit et sequitur variis sub casibus iras
Et pia vota dei. miseris hinc atque beatis
12 Pro meritis morum, pro certo tramite vitae
Paupertas mors vita salus opulentia languor
Taedia tristitiae splendor compendia damnum
15 Gaudia nobilitas virtus prudentia laudes
Affectus maeror gemitus successus egestas
Ira potestatum trux indignatio regum
18 *Omnia quae veniunt bona gaudia tristia saeva
*Descendunt ex arce dei, de sede tonantis,
Qua pietas aeterna manet lux spiritus ardor,
21 *Arce ubi dicuntur laudes sine fine perennes.
Et merito, quia fine carens primordia nescit
Rerum causa deus. tetrum chaos igne resolvens

1 cupit iratum C: cupiunt animis B ∞ placidum ue scire C: pl. nescire *m. 1.* B, U; nescire *m. 2.* B, MVR 2 si *schrieb ich:* sed CB, prę MVR, pre U legat CB, *m. 1.* M: legant M *m. 2.*, VRU recensent *m. 2.* M 3 Agnoscat C, Agnoscent *m. 2.* M quę MV, q̃ RU *nach* poli: quę MVR, q̃ U 4 confessa C *Arevalo:* conuersa B∞ uenerentur C, *m. 2.* M, ueneran̄ BU, uenerantur MVR adorant, a *zu* e *corrigirt,* C 5 Quemque B∞ plage C luna triones C: luna et omnes B, *m. 1.* M: lunaque et omnes *m. 2.* M, VRU 6 Sydera BRU nothi B∞ 7 hiemps C, hyemps B, hyems MVR tonitruus C procelle C 8 Flumna V 13 salus *Arevalo:* scelus B∞ langor B∞ (languor U) 14 Tedia B∞ tristiciae BM dampnum B 16 meror BU, moeror M 17 crux U indignacio B 18 tristia saeua C (*Arev.*): tristicia (tia RU) sed B∞; 'forte tristitiaeque' *m. 3. am Rand in* M 19 ex: et B, *m. 1.* M arte C 20 Qua *Arevalo:* Vna B; Una M, darüber Aт (At?); Ut VRU 21 Arce ubi C: Arcē ubi B ∞; *am Rand* 'forte atque ibi' M; Et cui *oder* Atque ubi *Arev:* 23 tetrum B *(Arev.):* terram ∞, *auch* U, *was Arev. zu notiren vergass.* cahos R resoluitens *m. 1.* M

24 Igne creata fovet. nam totum flamma vaporat
Et flammae pascuntur aquis, quibus omnia constant.
Nubibus et radii solis pascuntur anheli.
27 Inde potens generata manet natura creatrix,
Inter se retinens quicquid per secla refundit.
Ac pietas quia sancta dei virtute modesta est,
30 Clade repentina numquam punire nocentes
Adsumit; poenam cohibet poenamque minatur,
Territa quo dominum possit mens nostra precari
33 Et peccatorum veniam non laesa mereri.
Sic inpune reis licuit peccasse fatendo.
Ante prophetarum dictis sonuere futura.
36 S*ed* post*quam* Chr*istu*s que*m* necantes (nocentes *corr.*) aduenit sub uoce
Dissoluens (Dei soluens *corr.*) n*ost*ra futuri et ne ignara*m* (?) natura
Jubetur gens ho*minum* dare cu*mque* *pro*pinquet
39 Ne lateat mortale genus qu*ae* tanta p*er*icla
*Praemouet ante pius quam elementa fatigat
*Prodigiis signisque creantur
42 Na*mque* recoit*us* simili
Part*us* *qua*drupedes et sterilis fecundior aui (?).
Forna*m* | cerni*tur* | infante*m* discors *non* | (ñ a *corr.*) humero
45 Quom*odo* quae | *pro*tulit inparib*us* m*em*bris p*er* anatu*m*
Et pauet infelix enixa puer in germina part*us*
Sic peccata parant horrenda erat i*n*fans an*te* suos ort*us*
48 Quid ia*m* peccat or te parentum *non* fuit i*n*fantis facin*us*

---

24 Fovet *hat m. 1. aus* movet *corr. in* M vaporat *Arev.:* uapor̃ B, uapore ∞ 25 At *Arev.* 26 radii *u.* pascuntur *schrieb ich:* radiis . . pascentia B ∞; pascentia solis *Arev.* 27 generare *Arev.* 29 At U *Arev.* 31 assumit *m. 2.* R: adsumat B, assumat ∞; *am Rande* ‘ad summam *puto*’ M pęnam coh. BM: coh. p. VRU pęnamque B ∞ 32 Trita B, Contrita ∞, concita *m. 2* V quo: ut *m. 2.* R 33 lesa B *statt* non laesa R *m. 2. am Rand* confessa 35 senuere U, *daher* patuere *Arev.*

Zeile 36—49 *sind in* B *schwer verdorben. Ich gebe die Lesarten der Handschrift nach* Grosse's *genauer Abschrift und deute die durch Compendien gegebenen Buchstaben durch schiefe Schrift an.* 36 necantes *von m. 1. zu* nocentes *corr.* B, necantes ∞ quem *bis* uoce *fehlt in* U 37 Dis *von m. 2. zu* Dei *corr.* B, Dei ∞ ignara ∞, ignarã B, *wo* r *nicht sicher ist.* 38 propinguet zu propinquet *von m. 1. corr.* B 39 tanta B: cuncta ∞ 40 pius BM; dies pius *(doch* dies *ausgestrichen)* V; dies pius RU 40. 41 C (nach I, 21) Prodigiis signisque docens elementa fatigat 42 re cohitus R U simili M *und mit Strich durch* l B; simile V, similiter R U 43 facundior U; am (avi *oder* aut) B, aut ∞; humor m. *2 am Rand in* R 44 *fehlt ganz in* U Fornã *fehlt in* MVR, *doch ist das Zeichen einer Lücke gesetzt.* discors ñ humero. *so m. 1.*; *dann ist* n *zu* a *geändert und mit Rückweis* (*am Rand*) *vor demselben* ñ *zugesetzt von m.* 2. ? *also* ña *in* B; non MV; ñ humero *hat m. 2. in* R *zu* natura creauit *geändert.* 45 inp. m. p. an. *fehlt in* U peranatu MVR; *in* R *ist vielleicht von m. 2.* ñ *geändert.* 46 *über* in *steht in* V *von m. 2* pera; *in* R *ist von m. 2* in germina *durchstrichen und* pera (puerpera) *übergeschrieben* in germania U 47 horr. *bis* ortus *fehlt in* U ' erat infans B : infans erat MVR 48 pecca . . te *mit Zeichen der Lücke* MVR; *in* U *fehlt alles nach* pecca

S*ed* ante reatu*m* noxa ca*put* sequit*ur* pęna cepit
Quid fera, quid pecudes, quid peccavere volucres?
51 Quid caelum, quid terra, polus, quid pontus et astra?
Quid solis radii, quid lunae frigidus orbis
Nonne fatigantur dantes per tempora signa?

49 Sed (*mit compendium*) B: Si∞ noxa *bis* cepit *fehlt in* U 50 peto des B, *m. 1.* M, pecudes M *m. 2.,* VRU peccauer̄ U

Die Zeilen 36—49 sind weitaus das schwierigste Stück dieser drei Bücher und ich habe sie desshalb genau nach der Brüsseler Handschrift gegeben. Deren Abschriften geben nichts besseres; höchstens ist Z. 46 die Coniectur in V und R zu erwähnen: Et pauet infelix enixa puerpera partus. Auf diese verfiel auch Arevalo, der sonst statt dieser 14 Zeilen nur Trümmer bietet. Auch ich hatte oft und lang, doch stets vergeblich über diese Räthsel nachgedacht. Die Berliner Centones bieten zwar Stücke daraus: Prodigiis signisque docens elementa fatigat (Z. 41 und 40). Allein genau ebenso ist der Schluss des vorausgehenden Verses hinter den Anfang des nächsten geschoben in I 404 Omnipotensque deus his crescite dixit statt Arbitrio commissa manent . his 'crescite' dixit Omnipotens 'replete solum de semine vestro'. Dann sind, wie oben (S. 266) erwähnt, die Verse II 193 u. 194 und III 583 u. 584 absichtlich, endlich II 640 u. 641 ohne Absicht je in 1 Vers zusammengezogen. In der sinnlosen Masse von Silben und Wörtern tauchten mir aber doch überall Versstücke auf. Nun hatte ich eben in einer Abhandlung über die Caesuren der klassischen lateinischen Hexameter behauptet, die Caesurschlüsse der sämmtlichen Hexameter, die männlichen wie die weiblichen, hätten — wohl mit Absicht — den entgegengesetzten rythmischen Bau erhalten als die Zeilenschlüsse, und wenn man uns Stücke von solchen Hexametern gäbe, so sei leicht zu bestimmen, welche Stücke aus dem Anfang, welche aus dem Schlusse eines Hexameters genommen seien, während dies bei den griechischen Hexametern sehr oft nicht möglich ist. Ich begann also mit Z. 45 und den folgenden und schied leicht aus:

45 protulit inparibus membris pera natum
46 Et pavet infelix enisa puer in germina partus
47 Sic peccata parant horrenda erat infans
48 ante suos ortus Quid iam peccat or te parentum
49 non fuit infantis facinus Sed ante reatum
noxa caput sequitur pena cepit.

Hier lagen die ursprünglichen Zeilenanfänge und Zeilenschlüsse zu Tage, aber Sinn und Zusammenhang fehlte noch immer diesen Trümmern. Wieder dachte ich daran, wie in den Centones der

Schluss des einen Verses hinter dem Anfang des nächsten stehe, und, als mein Auge gerade auf Z. 45 u. 46 fiel und verband:

Et pavet infelix enisa puer   pera natum,

da war das grosse Räthsel gelöst: der Versschluss steht hier überall vor dem Versanfang. Doch blieb eine Menge kleiner Räthsel, deren Lösung noch schwierig war. Ich muss dazu Stück für Stück vornehmen.

Der Zusammenhang der Gedanken ist sicher folgender: Gott ist barmherzig (pius) und warnt die Sünder oft und lange vorher, ehe er sie straft. Diese Warnungen geschahen vor Christus durch die Propheten (V. 35), doch nachdem Christus auf die Erde gekommen (V. 36 Sed postquam Christus), warnt Gott die Sünder durch Naturerscheinungen: signa und prodigia. Für die Kritik ist also festzuhalten, dass der Zeilenschluss in der Handschrift stets vor dem Zeilenanfang steht. Ich scheide also

36 Sed postquam Christus   quē nocentes (necantes)
37 aduenit sub uoce dei (dis) soluens   nr̄a futuri
37a et ne   ignarā (?) natura iubetur
38 gens hominum dare   cumque propinquet
39 ne lateat mortale genus quae   tanta pericla
40 praemouet ante pius quam   elementa fatigat
41 prodigiis signisque   creantur
42 namque recoitus simili

Mit Z. 42 beginnt offenbar eine neue Gedankenreihe. In der Mitte von Z. 41 ist, wie die Centones zeigen, docens verloren gegangen; Ähnliches ist in Z. 40 und 42 geschehen. Also gewinnen wir zunächst die Verse

39 ne latea*n*t mortale genus quae | cumque propinque*n*t
40 praemo*n*et ante pius quam (*mittit?*) | tanta pericla
41 prodigiis signisque docens | elementa fatigat.

Der Anfang von Z. 39 und Z. 41 gibt 24 Buchstaben.

Die ersten Zeilen bieten ganz besondere Schwierigkeiten. Der Schluss von Z. 36 ist verloren. Z. 37 lässt sich befriedigend herstellen: Aduenit sub uoce dei soluens (24 Buchstaben) | que nocentes.

Im Folgenden muss eine grössere Lücke sein. Wir haben zwei Versschlüsse 'nr̄a futuri' und 'natura iubetur', allein nicht genug Wörter zu zwei Versanfängen. Für die Herstellung sind zu berücksichtigen die Dichterphrasen: Aen. IV 508 haud incerta futuri. VIII 580 spes incerta futuri. X 500 Nescia mens hominum fati sortisque futurae. Lucan II 14 sit caeca futuri Mens hominum fati. Darnach ist sicher, dass auf futuri folgt Mens hominum statt des unmöglichen

gens h. Nach Mens hominum dare verlangt das Metrum ein trochäisches, dann ein jambisches Wort. Der Construction nach muss Mens hominum zum vorangehenden Verse gehören, dagegen mit dare ein neuer Satz beginnen. Ich vermuthe dare *signa reis* natura iubetur.

Von dem vorangehenden Verse haben wir also nur die Trümmer et ne und nr̃a futuri. nostra ist vor Mens hominum nicht möglich. Die Lücke ist vielleicht entstanden, indem der Schreiber von ignara zu signa r. sprang. Der Gedanke verlangt also etwa:

36 Sed postquam Christus (*in terram*)
37 Aduenit sub uoce dei soluens que nocentes:
37a *Sit* ne (*ignara . . et non incerta*) futuri
38 *M*ens hominum, dare *s*igna r*eis* natura iubetur.

Der Anfang von Z. 37 zählt 24 Buchstaben; dagegen der von Z. 36 nur 19. Die Anfänge der Z. 37ª u. 38 müssen durch andere Einflüsse gestört sein.

Die folgenden Zeilen 42—46 boten wieder ganz besondere Schwierigkeiten:

42 namque recoitus simili creantur
43 partus quadrupedes.

Nach simili ist, wie in Z. 40 u. 41, eine Lücke, hier = ‿‿‿ - ‿. Dracontius beginnt sicher die neue Gedankenreihe mit einer Frage, also wohl mit: Nam qu*a*re coit*u* simili (*hominumque?*) creantur Partus quadrupedes?

43 partus quadrupedes et sterilis fecundior aui fornã
44 cernitur infantem discors ñ a | humero quomodo quae
45 protulit inparibus membris pera natum
46 et pauet infelix enisa puer

Z. 45 ergab sich bald als protulit inparibus membris numeroque modoque. Das Subjekt zu protulit hatte schon der Corrector von R in ña = natura erkannt. Als ich so weit war, suchte ich einen Beleg für die Formel ‘numeroque modoque’. Ich fand ihn, aber zugleich den Beweis, dass ich die ganze Stelle richtig behandelt hatte. Dracontius hat hier den Lucan geplündert:

I, 562 Monstrosique hominum partus *numeroque modoque*
Membrorum matremque suus conterruit infans.
I, 590 Monstra iubet primum nullo quos semine discors
Protulerat natura rapi sterilique nefandos
Ex utero foetus infaustis urere flammis.

Diese Verse geben auch für die Z. 42 u. 43 Licht. Im Lucan streitet man sich über die Erklärung von nullo. Dracontius hat offenbar nullo semine discors verbunden und desshalb gesagt ‘*hominum* coitu simili creantur tamen partus quadrupedes’. Die Z. 43 scheint einen vollständigen Hexameter erhalten zu haben. ‘et’ ist metrisch unmöglich;

sterilis fecundior aui (?) cernitur muss den Worten Lucans 'sterilisque nefandos ex utero foetus' entsprechen. aui schien den Hexameterschluss von Z. 43 zu bilden, fornam den von Z. 44. Statt aui dachte ich an alvus, doch mit fornã konnte ich trotz Lucans Hülfe den Schluss von Z. 44 nicht herstellen. Zuletzt bedachte ich, wie peinlich die 1. Hand im Ganzen corrigirt habe. Hier hat sie in Z. 44 nach ñ das a nachträglich zugesetzt. Der böse Schluss in Z. 43 aui fornã beginnt mit a. Das führte mich endlich auf die Emendation ñaui fornã = natura biformem. Tacitus Ann. XII, 64 spricht bei prodigia von biformes hominum partus und als Versschluss hat Virgil biformis gebraucht: Ciris 67 von Echidna, Aen. VI 25 vom Minotaurus, VI 286 von Centauri . . Scyllaeque. Am Schluss von Z. 43 fehlt jetzt ein Wort. Stand hier ursprünglich alvus, so konnte es vor dem daneben gerathenen aui verdrängt werden. Dracontius eröffnet also seine Begründung mit den Fragen:

42 Nam qu*a*re coit*u* simili (*hominumque*) creantur
43 Partus quadruped*es*, sterilis fecundior (*alvus*)
44 Cernitur, infantem discors natura *b*ifor*me*m
45 Protulit inparibus membris *n*umeroqu*e* modoque
46 Et pavet infelix enisa puerpera natum?

Die folgenden Verse lauten zunächst:

47 Sic peccata parant horrenda | in germina partus
48 Ante suos ortus quid iam peccat | erat infans.

Die nächsten Verse und schon die Frage

48 Ante suos ortus quid iam pecca*u*erat infans?

zeigen, dass ein Einwand vorangeht, also *Si* oder besser

47 *Nec* peccata parant horrend*i* germina partus:
48 Ante suos ortus quid iam peccaverat infans?

Ein neuer Einwand wird aufgestellt in den Versen:

48a Non fuit infantis facinus. Sed *f*orte parentum
49 Noxa caput sequitur, poena*s* *ca*pit ante reatum?

Auch dieser Einwand, vielleicht habe die Sünde der Eltern die Missgeburt verursacht und das Kind gestraft, ehe es gesündigt habe,[1] wird zurückgewiesen durch die Frage (V. 50 fll.), was denn die Thiere, die Gestirne, kurz die ganze Schöpfung gesündigt habe; sie alle hätten ja oft gewaltsame Eingriffe und Änderungen ihrer sonstigen Art und Thätigkeit zu erleiden (fatigantur). So ergibt sich, was zu beweisen war: all diese Wunder in der Natur geschehen nur auf Gottes Befehl als Vorzeichen und Warnung für die Menschen.

---

[1] Zuerst dachte ich an: poena perit ante reatum. Doch scheint es besser, wenn die beiden Sätze das nämliche Subject haben.

So haben, glaube ich, diese 16 Verse einen befriedigenden Sinn und Wortlaut gewonnen. Von Seiten der handschriftlichen Kritik ist der Fall so merkwürdig, dass er noch einige Betrachtung verdient.

Der Schreiber der Brüsseler Handschrift hat wenigstens hier genau nachgeschrieben, was er vor sich sah. Die Anfangsbuchstaben der Hexameter sind sonst in B, wie in fast allen Minuskelhandschriften mit grossen Buchstaben geschrieben. Da hier die Anfänge der ursprünglichen Hexameter nicht mehr durch grössere Buchstaben kenntlich sind, so ist anzunehmen, dass die Verwirrung aus einer Handschrift entstanden ist, die ganz in Uncialen geschrieben war. Hierauf deutet auch die Zahl der Buchstaben in den Zeilenanfängen. Wenn wir von allen Abkürzungen absehen, so ergeben die Anfänge der Zeilen 37. 39. 44. 45. 47 je 24 Buchstaben; die von Z. 46: 23; 48: 26; 48a: 25; 49: 26. Für die geringere Zahl in Z. 36. 37a und 38 weiss ich keinen Grund. Die geringere Zahl in Z. 40. 41. 42 (21. 18. 20) kommt, wie die Centones in Z. 41 zeigen, daher, dass am Ende dieser Zeilenanfänge je ein Wort zerstört worden ist. Fragen wir nun nach der Ursache der ganzen Verwirrung, so muss sie folgender Art sein: die Blätter der betreffenden Handschrift hatten sonst gut die Breite für einen ganzen Hexameter; doch dieses eine Blatt war schadhaft und die Hexameter mussten gebrochen werden. Zuerst wurde der Anfang geschrieben, soviel Raum eben das Pergament liess: das waren etwa 24 Buchstaben. Dann wurde der Schluss nach alter Sitte über diesem Anfang ergänzt. Das ist die Ursache der ganzen Verwirrung. Denn diese über den Zeilenanfängen stehenden Zeilenschlüsse schrieb ein Abschreiber wie gewöhnliche Zeilen vor den Zeilenanfängen ab. Z. B.

(ATVR) ABIFORMEM
CERNITVR INFANTEM DISCORSN
NVMEROQVEMODOQVE
PROTVLIT INPARIBVS MEMBRIS

Die Frage ist noch zu erledigen, ob diese gebrochenen Zeilen in der Handschrift eine oder zwei Seiten einnahmen. Da im Folgenden keine Spuren einer solchen Störung sind, so müssen wir annehmen, dass diese 16 Verse zwei Seiten füllten. Dann verstehen wir auch, warum allein der V. 43 in der richtigen Reihenfolge geschrieben ist. Die erste Seite zählte mit dem verlorenen Schluss von Z. 36 bereits 16 Zeilen. Desshalb war nur der Anfang von Z. 43 noch unten hin geschrieben, der Schluss aber begann die Rückseite, welche so (bis Z. 49) 15 Zeilen zählt. So erklärt es sich, weshalb der Abschreiber gerade in der 43. Zeile nicht den Schluss vor den Anfang gesetzt hat.

In lyrischen Gedichten, deren Zeilen von verschiedener Länge sind, wurden öfter die Schlüsse von besonders langen Zeilen im Schlusse von vorangehenden kürzeren Zeilen untergebracht und dann von einem unwissenden Abschreiber verstellt; auch Trimeter und ähnliche Verse, welche in zwei Spalten nebeneinander geschrieben waren, wurden mitunter in eine einzige Spalte verkehrt abgeschrieben, so dass zuerst alle Verse mit den ungeraden, dann die mit den geraden Zahlen kamen oder umgekehrt: in Hexametern möchte eine derartige Verwirrung, wie sie hier nachgewiesen ist, ohne Beispiel sein.

Die Berliner Centones.

Ich gebe alle Verse, doch in der Reihenfolge des vollständigen Textes. Die Tafel am Schlusse wird zeigen, wie die Verse in den Centones gestellt sind.

Blatt 1 *Vorderseite nach der Überschrift:* I, 1 *bis* 9. *Dann* 18. 19. 21. 40. 41. *Siehe oben S.* 272 *Dann*

I, 60 Nam micat unde polo veniens quicumque cometes.
69 Audet et exsangues caelo producere manes.
72 Cum niger umbrarum veniens exercitus orbem
73 Appetit invadens non humida tempora lunae.

V. 60 Jam *Arev.* uolo C comites B, *m. 1.* M 69 exsengues B, *m. 1.* M, exangues C, M *m. 2.*, VRU munes C 72 Quum V, Quom R umbrarum a saxis ueniens C orbem C: orbe B ∞ 73 Appetit B ∞: INfinit C (*vergl.* 62 Inficit) lunae B ∞: brumae C; *als Gegensatz zu* dies *und* serenum *scheint* brumae *nicht passend*; non *gehört natürlich zu* invadens.

74 Auditur mugire solum, solisque tenebras
75 Quis neget et stellas alieno tempore visas?

V. 74 Auditum *Arevalo wohl richtig.*

I, 302 Ipse polus *ist eingeschoben, dann folgt*

77 Lunaremque globum fuscata lampade tectum.
84 Si bona sunt ventura, bonis nos ante fruamur.
87 Nemo ferire volens se praemonet ante cavendum,
88 Sed qui terret amat. sic indulgentia poenam
89 Praevenit et nullos capiunt tormenta reatus.

V. 77 que *aus* gue *corr.* B text̃ (tur) BM, texunt VRU 84 Siboxis boxa uextura suxt xos C 87 perire C praemouet, u *zu* n *corr.*, B ante: inde U *Arev.* cauendi V *m. 1.* 88 Sed C, R *corr.*, M *corr.*: se B ∞ indulgentiam C 89 capiunt CB: cupiunt ∞; nulli capiunt *Arev.*

I, 90 Non negat omnipotens veniam cuicumque roganti.
94 Et quemcumque ferit moderanter temperat ictus.
95 Corrigit errantem; non punit morte repente,
96 Si peccare diu parcat quicumque profanus.

V. 90 rogantur C 94 quecumque C Corrigat RU nec ∞ 96 pareat RU prophanus VR, prophanum U

II, 555 *und* 556 *sind eingeschoben, dann folgt*

99 Nemo deum sentit, quotiens irascitur ulli.
101 Donec ab excelsis veniat vindicta coercens.

107 Ante nec agnoscit dominum quicumque furentem.
108 Solos quippe necat, quos cernit nolle reverti.

V. 99 quociens B 101 Donet B cohereens BMRU 104 Ante nec C; ante *fiel wegen des vorangehenden* minante *aus;* daher Nec B, Nec *und darüber* non M, Nec non VRU; Nam non R *m. 2*, Et non *Arev.* 108 necat *m. 1. über der Zeile* B

Bl. 5ª, zwischen I 348 und 349:

I, 180 Plenus odoriferis numquam marcentibus herbis
181 Hortus in orbe dei cunctis felicior hortis.

In C *steht 181 vor 180* 180 marcescentibus C 181 Ortus CBM feliciter U ortis CM, R *m. 1.*; ortus *zu* hortis *corr.* B, oris U

190 Non glacies districta domat non grandinis ictus.

Non: Quem C glaties C destricta, i *aus* u *corr.*, C non CB *Eug.*: nec ∞

Bl. 1ª, zwischen I 75 und 77:

I, 302 Ipse polus qui grande tonat sine nube serenus.

Bl. 4ᵇ, nach III 682 mit der Überschrift 'Incipit eiusdem Dracontii de origine mundi ab Adam et Eva', viele Verse des I. Buches von 329 an:

I, 329 Omnibus his genitis animal rationis amicum,
330 Formatur virtute dei, limatur in artus.

V. 329 Omnibus ingenitis C amicus C 330 Formatur *Eug.*, Formatus C, Forma dei B ∞ limatus C; lunatur UR, *m. 1.* V arctus U

333 Ast hominem non terra parit non pontus ab undis
334 Non caelum non astra creant non purior aer.

V. 333 parit: prodit VRU 334 celum non hastra C prior C aer *Eug.* C, *m. 2. in* M *u.* V: uer BRU, *m. 1. in* M, V

336 Plasmavit per membra virum de pulvere factum.
338 Corporeos species hominis caelestis imago.
339 Conspicitur nova forma viri sine mente parumper.

V. 336 Plasmatur RU, Limavit *Eug.* 338 Corporeus B *u.* M *m. 1.* species *fehlt in* C hominis uestit cael. C 339 Conspic̄ *sine forma uiri mente parumper *und am Rande* *nuda B; Conspicit nuda sine f. u. m. par. ∞

I, 340 Spiritus infusus subito per membra cucurrit.
341 Et calefacta rubens tenuit praecordia sanguis.
343 Jam cutis est qui pulvis erat, iam terra medullas
344 Ossibus includit, surgunt in messe capilli.

V. 340 *steht in Eug. und* C, *fehlt in* B ∞ 343 medullam *Mor.* 344 in messe C *Sir. Tol.:* in nise B, in mense MVR, immerse U, immensa *Mor.*

345 Orbe micant gemino gemmantia lumina visus
346 Et vocem compago dedit nova machina surgens.
347 Auctorem laudare suum gavisa quod esset.

V. 345 Orbe: Erba C gemmantia *Eug.* U: geminantia BMVR, gem̄tia *(gementia)* C lumine C uisu *Eug.* 346 conpago C 347 quid ∞

348 Atque oculos per cuncta iacit, miratur amoenum
349 Sic florere locum, sic puros fontibus amnes
350 Quattuor undisono stringentes gurgite ripas
351 Ire per arboreos saltus camposque virentes.

V. 348 Atque: Tunc *Eug.* amiraturamgenū *und am Rande m. 2.* s. miratur amenum B; (amiratur *mit Punkt unter* a M) amoenis *Mor.* *nach* 348 *schiebt* C I 181. 180. 190 *ein (aus klarem Grunde)* 350 undisonis BM; undisonas M *corr.*, VRU, udisonos C, undifluo *Eug.* stringentes *Eug.*; stringente CBM; stringenti M *corr. u.* VRU

353 Scire cupit simplex et non habet unde requirat,
354 Quo merito sibimet data sit possessio mundus
355 Et domus alma nemus per florea rura parata.
360 Viderat omnipotens haec illum corde moventem.

V. 353 est U *Mor.* 354 meritos U mundi *Sirm.; vergl. Carm.* 8, 196 Troianis dabitur totus possessio mundus. 355 alta? rura parata C, regna paratum B ∞; Atque domus alterna nemus per florea rura *Tol.*, Atque aeterna domus nemoris p. fl. rura *Mor. Sirm.* 360 corda C

Bl. 5^b^, zwischen I 397 und 399

I, 364 Noverit; uxor erit, cui sit tamen iste maritus.
365 Coniugium se quisque vocet, dulcedo recurrat.

V. 364 *fehlt in Mor.* Noverit *fehlt in* C cui sit C, cum sit B ∞, cuius *Sir. Tol.* ille VRU

367 Velle pares et nolle pares stans una voluntas
368 Pax animi concors paribus concurrere votis
369 Ambo sibi requies cordis sint ambo fideles
370 Et quicumque datur casus, sit causa duorum.

V. 368 Pax CR *u. m. 2. in* M: Par BVU *Mor.*, pars M *Sir. Tol.* decurrere *Eug.* voces B ∞ 370 fit U

Bl. 5^a^, *nach* I 360

I, 371 Nec mora iam venit alta quies oculosque supinat
I, 372 Somnus et in dulcem solvuntur membra soporem.

V. 371 Nec mora *fehlt in* C sopinat B, o *über* u M; sopinat *m. 1. und* soporat *m. 2.* V 372 soporem: quietem B ∞

373 Sed cum iure deus nullo prohibente valeret
374 Demere particulam de quo pius ipse pararat,
377 Fur opifex vult esse suus. nam posset et illam
378 Pulvere de simili princeps formare puellam.

V. 373 cum *fehlt in* C 374 de quod B, de qua ∞ prius *Mor. Sir.* 377 Cur *Mor.* possit C et illum C, alumnam *Eug.*

379 Sed quo plenus amor toto de corde veniret,
380 Noscere in uxorem voluit sua membra maritum.

V. 379 quo *Eug.*: quod CB, quia ∞ corde *aus* corpore *corr. m. 1.* C 380 uxore *Sir. Tol.*

I, 381 Dividitur contexta cutis, subducitur una
382 Sensim costa viro sed mox reditura marito.
383 Nam iuvenis de parte brevi formatur adulta
384 Virgo decora rudis matura tumentibus annis.
386 Et sine lacte pio fit mox infantia pubes.

V. 381 Contecta *Tol.* 382 *fehlt in Mor.* Censim U corta B redditura B *und m. 1.* M 386 fit mox C: fecit mox B ∞, crescit iam *Mor.*, crescit *Sir. Tol.*

387 Excutitur somno iuvenis, videt ipse puellam
388 Ante oculos astare suos pater, inde maritus,
389 Non tamen ex coitu genitor, sed coniugis auctor
390 Somnus erat, partus conceptus semine nullo.

V. 387 puellas RU, *unklar in* V 388 tunc stare B ∞ patet *Mor.* 389 tantum *Mor. Sir.* 390 parcus *Mor.*

393 Constitit ante oculos nullo velamine tecta
394 Corpore nuda simul niveo quasi nympha profundi.
395 Caesaries intonsa comis gena pulchra rubore
396 Omnia pulchra gerens, oculos os colla manusque
397 Vel qualem possent digiti formare tonantis.

V. 393 texta *zu* tecta *corr. m. 1.* B 394 nivei *Mor.* quasi: ceu *Eug.* nimfa C profundo B ∞ 395 Caries C pulcra BM robore C 397 Vel: Ut *Eug.* quale possint C digni, *doch am Rand* digiti, M tonantes C

Fol. 5^b^, nach I 370

I, 399 Tunc deus et princeps ambos coniunxit in unum.
400 Et remeat sua costa viro, sua membra recepit.

I, 402 His datur omnis humus, tum quicquid iussa creavit.
404 Arbitrio commissa manent. his 'crescite' dixit
405 Omnipotens 'replete solum de semine vestro'.

V. 399 coniunexit C, coniungit *Tol.* 402 cum C B ∞, et *Eug.* iussa *fehlt in* B ∞ 404 hic U 405 Et repl. sol. omnip. de sem. v. B ∞ 404 *u.* 405 *sind in* C *so gekürzt*: Omnipotensque deus his 'crescite' dixit.

I, 406 Sanguinis ingeniti natis nutrite nepotes
407 Et de prole novos iterum copulate iugales.
414 Deliciaeque fluent vobis et honesta voluptas.
415 Arboris unius tantum nescite saporem.

V. 406 natos *Eug.* 407 reparate *Sir.* 414 Delitiaeque, aeque *auf Rasur*, C uoluntas C 415 nescire B ∞

427 Tot bona facta deus non obliviscitur umquam,
428 Quae propter hominem fecit sanxitque manere.
429 Huic dominus pietatis opem subducere non vult.
435 Continua bonitate pius, virtute modestus,
436 Simplicitate bonus, sed culmine celsior omni.

V. 428 homines *Sir. Tol.* sensitque C, sc̄m (sanctum) sanxitque B *u. m. 1.* M manare B *u. m. 1.* M Quapropter fecitque homines sanxitque manere *Mor.* 429 Huic C U: Hinc B M V, R *unsicher*, Hic *Tol. Mor.*, His *Sir.* deus C 435 pietate bonus B ∞ 436 bonus: pius C sed: et *Sir. Tol.*, qui *Mor.* cels. culm. B *u. m. 1.* M

439 Simpliciter pecudum ritu vel more ferarum
440 Corporibus nudis et nescia corda ruboris
441 Quod pars membrorum secretior esset habenda.
443 Quod digitos oculosque putant, hoc quaeque pudenda.
444 Publica iungebant affectibus oscula passim,
445 Nec rubor ullus erat, cum staret origo pudoris.

V. 440 et: sed V R U pudoris *Sir.*, livoris *Mor. Tol.* 441 Quod C. quid B ∞, quae *Eug.* secrecior B 443 Quae C q̄q B, q̄q; M, quaeque V R U; quoque C, membra *Eug.* 444 Publice C affectibus *Eug.*, adflacctibus C, arrectibus B ∞, amplexibus M *am Rand* parsi C 445 cum extaret C

459 Solus ibi inrepsit squamoso corpore serpens
460 Fraudibus imbutus mortis, caput omne malorum.
461 Pectore vipereo mellitum ex ore venenum
462 Funereo sub dente parans spumante palato.
463 Ergo ibi livor edax coctum serpente venenum
464 Invidiae mordacis habens sub fronte modesta
465 Quaerit opem sceleri, per quam fallatur honestas.

V. 459 ubi B ∞ 460 indutus B ∞ 461 mollitum *Mor.* uenenum C 462 Fundere sub *Tol.*, Munera iam sub *Mor.* palati B *u. m. 1.* M 463 ibi C: ubi *Eug.* B ∞ coctum sub dente *Grosse*, contusum dente *Eug.* 464 Inuidia C modesti C 465 sceleris *Sir. Tol.* quem C fellatur B *u. m. 1.* M.

I, 469 Praesensit pietatis inops et coniugis aures
470 Adgreditur sub voce pia, sermone maligno
471 Insidiosus adit heu mollia corda puellae.
472 Ingerit ore cibos crudeli funere plenos.
473 His semel adsumptis reserantur lumina cordis
474 Ac permixta bonis patuit doctrina malorum.

V. 469 Presensit C sed *Sir. Tol.*, at *Mor.* 470 Aggred. B etc. 471 heu: iam C 473 simul *Sir.* assumptis B ∞ 474 Hac C fatuit B *u. m. 1.* M *Vergl. Satisf.* 58 Et bona mixta malis.

477 Ausum quippe nefas. temptat seducta maritum
478 Et capit insontem iam noxia femina victum.

I, 479 Circumventa perit, sed circumscripta fefellit.
480 Nec circumscriptor serpens inpune triumphat.

V. 477 Aut suum B ∞, (aut scit *m. 2. in* V) 478 uinctum B ∞ 479 feuellit B *u. m. 1.* M 480 circumscriptum *Mor.*, circumscripta *Tol. Sir. u.* C, *wo* a *zu* o *von m. 1. geändert ist.*

481 Nam postquam et iuvenis violata mente comedit
482 Funereos sine lege cibos in morte futuros,
483 Mox sapit infelix quid pravum quid sit honestum.
484 Cognita simplicitas sed mox est corde fugata.

V. 481—538 *fehlen in Mor.* 481 et CB *u. m. 1.* M; *durch Punkte getilgt in* M; *fehlt in* VRU *u. Eug.* uiolenta *m. 1.* B, *m. 2. corr.* comedit: peregit C 482 futurus *Eug.* 484 sed mox est c. B ∞, et m. c. c. *Eug.*, mox est a c. C corda B *u. m. 1.* M

I, 488 Noxia sola magis fuerat quae in corpore toto,
489 Os, aditus mortis, quam protulit atque recepit
490 Lingua suada mali, sed et aures limina mortis.
491 Viderat omnipotens homines didicisse pudorem
493 Errantes per prata reos foliisque tegentes.

V. 488 Noxia magis erat quae C 489 Hos aditus B ∞, Hos auditus C Os aditum (aditus *Tol.*) m. tunc prot. atque reiecit *Eug.* 490 L. sua damali B, Linguas ut damalis sed C, L. malisuada *Eug.* limana B *u. m. 1.* M, lumina RU 491 homines C *(Arev.)*: hominem B ∞ *Tol.*, omnem *Sir.* dedicisse B *u. m. 1.* M 493 prata reos: pratas eas C

535 Infelix coniux in coniuge facta redundat
536 Et reus accusat, sed non purgandus agebat.
542 Quos par culpa tenet, gradus illic temporis inter.
545 Et vitae mortisque simul sententia fertur.

V. 535 coniunx C 536 excusat *Eug.* sed B ∞ *Sir.*, se *Tol.*, si C 542 pars B *u. m. 1.* M, *Mor.* illi C inter: index *Tol.* 545 *So* C u. *Eug.* (*nur Mor.* Ac vitae): Et uita est B ∞; mortisque B, mors ∞ (*nur* V *m. 2.* Et vitae est mortisque); fertur: *in* B *steht von alter m. 2.* fretda, *in* M *u.* V *nur* f, *was in* V *m. 2. zu* facta *ergänzte; in* RU *fehlt sogar* f

I, 549 Otia delicias perdunt discuntque labores,
550 Qui cultore deo fructum telluris habebant,
551 Agricolam dominum quae nondum viderat umquam.
553 Offendunt hunc ambo pium. truduntur ab horto.
555 Et vitae mors meta datur cum fine malorum.

V. 549 Ora B ∞ (M que *über* Ora, V *m. 2.* Ocia) delitias C 550 fructus B ∞ habebat B ∞ 551 *So Arevalo:* Agricolam dominum qui non diuideret umquam C *u.* (*doch* diuiserat) B ∞; Agricola dominus quam nondum verterat unquam *Eug.* 553 hunc: nunc *Sir.*, tunc *Tol.*, haec *Mor.* orto C, ortu BMU, hortu VR 555 mea C

560 Et male viventi praestatur fine salutis.

Steht auch Bl. 1[b] *an beiden Stellen hat* C prestatur.

619 Et multos creat unus homo mansura propago.

Et malos creat C

Bl. 1[b], nach I 560

I, 696 Ille etenim deus est quem nulla traxit origo,
697 Cuius ab aspectu montes et saxa fluescunt,
699 Qui visa tellure semel mox pondera mundi
700 Concutit, et subitum monstrat vaga terra tremorem.

V. 696 enim BU *u. m. 1 in* MVR, (*m. 2.* etenim) quem *fehlt in* C traxit CB *u. m. 1.* M: attraxit *m. 2.* M, retraxit VRU, retardat *Eug.* 697 fluiscunt *Mor. Sir.*, fluuntur *m. 1.* U 699 simul *Eug.* 700 *In* C *bildet* concutit *den Schluss von V.* 699 *und beginnt V.* 700 *mit* Et et *fehlt in* B *u. m. 1.* M subito *Eug.* Nouae terrae C

702 Alveus expavit violento vertice torrens
703 Dum reduces sentiret aquas et sisteret amnes.
707 Qui de thesauris ventorum flamina mittit

I, 708 Et frenat rapidas in tempestate procellas.

V. 702 violente C, violato *Mor. Sir.* turgens *Eug.* 703 existeret B *u. m. 1.* M amnem *Eug.* 707 Q. ud & ēs aurus *(Fleck nach* Q *und* & *aus* or *corr.)* B; Et uid .... aurus ∞ flāmina C; flamma BM, flamina V, flamea R, flammea U; flumina *Sir. Tol.* 708 rabidas *Sir. Tol.*

711 Qui saxis abscondit aquas et prodidit ignes,

714 Qui noctes hiemis producit sole minore

715 Et solis protendit iter flammantibus horis.

V. 711 saxis: laxas *Sir. Mor.*, latas *Tol.* prodidit C, condidit B ∞, continet *Eug.* imbres *Eug.* 714 noctis C 715 flamantibus oris C

733 Qui lunae crescente globo iubet aequora crescant,

734 Fluctibus adiectis crescant cum fontibus amnes.

735 Crescat et inclusum capitis genus omne cerebri

736 Et minuantur aquae luna minuente liquentes.

V. 733 iubet ut mare crescat *Mor.* 734 abiectis *Sir.* B ∞ crescunt B ∞ 735 capitis C, capiti *Mor.*, capite *Sir. Tol.*, capiτ BM, capitur VRU 736 liquores *Sir. Tol.*, minuatur aqua l. m. minore *Mor.*

Bl. 2ª, nach II 703

738 Qui reges et regna domat sternitque potentes

739 Deicit elatos et mergit ab arce superbos,

741 Elevat elisos et consolatur adactos.

V. 738 regis B *u. m. 1.* M 741 abactos B ∞; *vergl.* II 741 poenis adactos.

746 Spes hominum intendens et vota precantia complens

747 Aspice despectum, deiectum adtolle parumper

748 Confusumque iuva, quia paenitet esse nocentem,

749 Ut valeam memorare tuas hoc carmine laudes,

750 Quas potero. nam nemo valet narrare creatus.

V. 746 int.: cernens *Eug.* 747 deiectum desp. *Mor.*, dėi. dėsp. *(mit den Zeichen, dass umzustellen sei)* B; dei. desp. ∞ attolle B ∞, tolle *Eug.* 748 Confessumque *Eug.*, Conatusque C quem *Eug.* penitet CB 749 valeam narrare *Eug.*

Bl. 2ª zwischen I 736 u. II 686

II, 36 Totus ubique iuvans et totus ubique ministrans.

Tectus B *u. m. 1.* M iubans C

Bl. 2ª, nach I 750

II, 57 Nam quis stare queat contra tua iussa reluctans?

Nam quis B ∞: Deus qui C iussa C *(Arev.)*: iura B ∞

151 Tu deus es quem terra tremit, quem mundus adorat.

152 Te mandante pluunt nubes et ab imbre coruscant

(152a Fluctibus assumptis pelagi sub sidera caeli.)

152b Te mandante poli post nubila maesta serenant.

152ª, 152ᵇ *stehen in* BMV, in C nur 152ᵇ, in RU *keiner dieser beiden Verse.* 151 es deus B, *u. mit Zeichen zum Umstellen* M 152 pluent C imbre B ∞: igne C, *wie Arev. vermuthete; doch vergl.* II 411 flammis ultricibus imber adussit (homines reos) 152ᵇ mesta C

153 Surgere tu ventos et crescere turbine facto

154 Praecipis, ut rapidae perturbent cuncta procellae.

156 Tu rursus reprimis flatus recidentibus euris.

V. 153 facis C 154 rabide C

193 Tu, deus omnipotens, nosti, quod feceris orbem

194 Semine, quo caelos solem lunamque creasti.

So B ∞: C *hat gekürzt* Tu deus omnipotens, *über der Zeile* solus, *dann in der Zeile* qui cuncta creasti.

Unten zwischen V. 211 *u.* 212 *steht*

II, 198 Angelicis animisque piis adorante catervis.

So C; Angelicas animasque suis adorande catervis B ∞, *wornach Arevalo vermuthete* Angelicis hominumque piis adorande catervis.

II, 202 Te Seraphim Cherubimque deum dominumque precantur.
203 Te chorus angelicus, laudans exercitus orat
204 Pronus et incessans humili te voce precatur.

V. 202 *So* B ∞, (*nur hat* BM Seraphin, BMV Cherubinque): C Te Cherubim Seraphim dominumque deumque pr. 203 Laudans C: laudat B, laudant ∞ 204 Pronus C: Tronus B, *m. 1.* M; Thronus *m. 2.* M, VRU. et incessans C: inexcessans B ∞ humilitate voce C precatur ∞: precantur CB

205 Agmina te astrorum, te signa et sidera laudant
206 Auctorem confessa suum. te fulmen adorat
207 Te tonitrus hiemesque tremunt, te grando procellae
208 Te glacies nimbique pavent, te spiritus omnis.

V. 205 sydera BMR 207 tonitruus hiemps tremunt C 208 glaties n. fauente sp. C

210 Te tellus fecunda vocat, te suscitat aer,
211 Unda super caelos tibi supplicat et polus omnis.
212 Flumina te metuunt, te fontes stagna paludes
213 Voce sua laudant, te nubila crassa coruscant.

V. 210 Te: Ut RU suscitat C: suspicit B ∞ 211 celos CB 212 metuunt fontes stagnaque pal. C 213 choruscant B, *m. 1.* M

215 Te bona temperies, te tempora cuncta precantur
216 Ver aestas autumnus hiems, redeuntibus annis
217 Per te fetat humus, per te, deus, herba virescit.

V. 215 temperies et temp. C 216 hiemps BC.

220 Palmite gemmato post pampinus admovet uvas.
221 Et numquam caritura comis frondescit oliva.
222 Te fera, te pisces pecudes armenta volucres
223 Turba cerastarum laudat genus omne veneni.

V. 220 u. 221: *Vgl.* I 166 u. 629, dann Carm. min. III 7—10 220 gemmato *Arev.*: gemmatum B ∞, gemmatum et C admonet BC, admovet ∞. 221 comis: foliis C frondescit C *u. Arevalo aus Conjectur nach* I 166: pinguescit B ∞ 222 et pisces et B; Te laudant fere pisces pec. C 223 cerastarum: terrarum C ueni C

Fol. 6ª *nach* I 619

II, 365 Inde rebellantum moles praesumpta gigantum,
366 Sacrilega cervice tumens quodcumque volebat
367 Aut poterat sibi cuncta dabat, sua cuncta putabat
368 Nil reputando deo, per quem valet omne quod extat.

V. 365 *So* C, *nur* mores; B ∞ Inde gigantarum moles pr. rebellat, *wo* M *m. 2,* VRU gigantorum *geändert haben.* 366 ualebat CB ∞ *Von dem V.* 367 *haben* VRU *nur die Worte* Aut poterat; M *m. 1.* Aut poterat si; B Aut poterat.. (*Lücke, in der m. 2* fiuh *schrieb,*) *dann* cuncta dabant sua cuncta putabant, *wornach* M *m. 2. am Rande* sua cuncta d. s. c. putabant. C, *wie oben, doch* putabant. 368 per quod B ∞.

369 Despexit dominum velut insuperabilis audax
370 Terrigena proles meruitque infanda propago
371 Naufragium terrestre pati dum littora nusquam.

V. 369 hominum VRU velut *Arev. coni. u. so* C: B *undeutlich,* sicut ∞ 370 terrestre pati *Arev.* C: terra est repati B ∞

380 Nam pavor unus erat. totum sors mortis habebat
381 Nec qui fleret erat. cunctos mors una tenebat.
385 Et pueros matresque pias tenerasque puellas.
397 Impia gens hominum scelerum mox vota resumit
398 Et facinus reparare cupit, ne perderet usum.

V. 397 Impie *m. 1.* M resumit M *m. 2.*, VRU, resumet B *u. m. 1.* M, resumpsit C

404 Sed postquam in peius hominum procedere vidit.
407 Eligit e cunctis, quos plus peccare videbat.

V. 404 C Postquam gen. hom. impeius producere uidit. 407 Eligit cunctos C

410 Sulphureas his fundit aquas nigrumque bitumen
411 Compluit et flammis ultricibus imber adussit
412 Quinque cremans urbes populos et moenia damnat.

V. 410 is C fudit C, *richtig?* 411 flammas VRU adusit C 412 dampnat CB

420 Loth iustus famulusque dei sine fraude fidelis
421 Inter tot scelerum turbas pius unus et insons
422 Eripitur de morte truci sine crimine visus.

V. 420 Lotque pius famulusque C 422 truci C *Arev.:* crucis B ∞

426 Tot gens nostra malis non est correpta, sed audet
427 Criminibus laxare frenos sine fronte pudoris.

V. 426 est C: vel B ∞ sed auget C, vel audet B ∞ 427 laxat *m. 2.* M frenos CB ∞, fores *Arev. wegen des Metrums.* sine: sic RU

Fol. 3ª *nach* II 475

II, 458 Angelicum peccasse genus, quos purior aer
459 Et super astra polus vel caeli regna tenebant.
460 Ante tribunal erant, ubi casta et sancta videbant
461 Corporis expertes terreni ponderis omnes.
462 Et sic error eos tenuit crimenque nefandum.
463 Quid homines miseri fragili sub tegmine carnis
464 Captivos quos membra tenent et corporis usus?

V. 458 quos CBM, quod VRU 459 tenebunt C 460 uidebant C: uiderent B ∞ expartes C, expertis B *u. m. 1.* M 462 terror eos B ∞; eos terror, *doch* t *ausradirt,* C 463 Quid ego miser C fragilis C, *möglich* *zu* Quid *bemerkt eine spätere Hand in* M *am Rand* 'Nam *adderem*' 464 Captiuum quem C

Fol. 3ª *nach* III 244

II, 472 Sideris innumeri cecidit pars tertia caelo
473 Cum duce pulsa suo. superat vindicta coercens
474 Agmina caelicolum pereuntia clade perenni.
475 Militiae pars tanta poli districta severe

(Fol. 6ᵇ *zwischen* II 427 u. 615)

476 Debuerat nostros ultro compescere mores.

V. 472 Syderis BR *u. m. 1.* M 473 súo C *Arev.:* suos B ∞ superat *Arev.:* superas B, superans ∞, superbos C cohercens BR *u. m. 1.* M. 475 militiae *Arev.:* militia CB ∞ distincta seuere C, distinctas * ibere (*vor* i *ein unklarer Buchstabe*) B, distincta (*Lücke von 4 Buchstaben*) bere M, distincta V, distincta sine usu RU; districta *corr. Arevalo.* 476 ultra B ∞

Fol. 7ª nach II 591

II, 499 Expavit Judaea deum post ubera matris
500 Maxima tot populis dantem miracula Christum.

V. 499 iudea CB ubuera C, uiscera B ∞ 500 Maxime C populos *m. 1.* M dante C

506 Discipulo vendente suo funesta duobus.
507 Venditor infelix, sed non felicior emptor.
508 Pars pretium perdit, perdit pars altera mercem.
509 Proficit et nobis, qui non contraximus, emptus.

V. 506 duorum C 507 Uenditur C 508 perdidit perdidit C et C, in B ∞; (at *oder* proficiet?)

514 Affligit letique vias et limina mortis.
518 Fecit abire diem solis restantibus horis.
521 Tum niger axis erat quem lurida palla tegebat.

V. 514 letique uia sed lumina C 515 solis C *u.* Arev. *aus Conjectur:* soli B ∞ 521 Tunc CU lucida C tegebat CU: tegebant BMVR

524 Et planxit natura deum. monumenta piorum.
526 Et vitam mors ipsa dedit. dum vita perennis.

II, 531 Tartarus infelix numquam satiabilis umbris
532 Et solitus gaudere neci turbatur amare.

V. 524 planxit C munumenta deorum C 526 Et vitam ∞: Et uitas C, E uita e B: *in* M *ist* est *nach* vitam *getilgt.* 531 Tartarus *von 1. Hand über der Zeile in* C saciabilis B neci *von 2. Hand am Rand ergänzt in* B

542 Tertius interea processit Lucifer astris
543 Oceano spondente diem. redit almus ab umbris
544 Ipse resurgentum magna comitante caterva.

V. 542 hastris C 543 Occeano splendente U (*Arevalo*) die C 544 Ipsesurgentum C: Rex reduci cum uita BU *und* (*doch mit* vitae) MRV. *in* M *ist* cum *durch Punkte getilgt.*

II, 546 Inde reversus abit repetit sua regna triumphans
547 Dexter in arce sedens consors genitoris amatus.
548 Iudicio venturus erit post secla futuro
549 Reddere mercedem cunctis quam quisque meretur.

V. 546 abiit repetit C, habitare petit B ∞. 'abit repetit' puto *steht von 2. Hand am Rand von* M; abit *ist auch in* V *durch Rasur hergestellt.* 548 erat *zu* erit *corr. von m. 1.* C futurus C

Fol. 1ᵇ *nach* I 96

II 555 Paeniteat si forte reos clementior audit
556 Datque repente pius veniam donatque reatum.

V. 555 Peniteat B: Aut certe C reum C, *vielleicht richtig.* clementior C: clementis B; dementis, *mit übergeschriebenem* u, M; clementius VRU; audiuit B. *Vgl.* II 690 reos clementior audis. *V.* 556 *steht in* C *auch Fol.* 7ᵇ *nach* II 549; *auf Fol.* 1ᵇ *steht* Dat repente.

Fol. 7ᵃ *nach* II 682

587 Tempora mutantur, te numquam secula mutant.
589 Cum te non caperent caeli terraeque fretumque
590 Aeris et spatium, modico te corde reponis
591 Pectoris humani conceptus mente fideli.

V. 587 *Dieser Vers steht in* C *auch Fol.* 2ᵇ *zwischen* II 223 *u.* 593; *hier ist gestellt* numquam te; *Fol.* 7ᵃ *steht* mutantur dum te n. 589 Quum B caperet B celi C 590 spacium CB

Fol. 2ᵇ *zwischen* II 587 *und* III 93

593 Ante futura vides. circa te nulla futura.

V. 593 circa C: penes B ∞, penes et *Arevalo.*

Fol. 6ᵇ *nach* II 476

615 Credidit Abraham dominoque est factus amicus
616 Confectus senio membrisque trementibus aevo
617 Inter avos atavosque fuit. sed prolis egenus
618 Ut soboles inpubes erat frustraque maritus.
620 Germinis extinctus cecidit genitalibus ignis
621 Et fecundus amor, quem iam subduxerat aetas.

V. 615 habraham B deoquae C 616 *So* C: membris remeantibus B ∞ euo C 618 At CB ∞ impubes B ∞, impubis *m. 2.* M 621 ae&as C

622 Nec solus steriles retinebat marcidus artus.
623 Femina deterius prope mortua membra trahebat.
(624 Spes generis recidens: et vis materna peracta.)
626 Frigida progeniem senibus natura negarat.
627 Flebile coniugii portabant nomen inane.
(628 Spes tantum iuvenilis erat. crescentibus annis)
625 Augebat spem sola fides, praesumptio maior.

In C *stehen folgende Verse und in folgender Ordnung:* 622. 623. 626. 627. 625; *die Verse* 624 *u.* 628 *sind hier abgedruckt zum Beweise, dass* 625 *mit* C *nach* 628 *zu stellen ist.* *V.* 622 artus C: astus B ∞; *doch in* M *hat m.* 2 haustus *corrigirt und eine andere Hand an den Rand geschrieben* 'arctus puto' 623 prope mortua C: prom. B ∞, praem. *Arevalo* 626 negaret

B ∞ 627 portabat C 625 *So* C, *nur* spe; Angebat spes sola fidem praesumit uel spes B ∞; *in* R *scheint m. 2* presumitur ut spes *corrigirt zu haben.* *zu* maior *vgl.* II 630 Non hos certa fides nec spes incerta fefellit.

631 Fecundus per membra vapor discurrit ubique
632 Dulcior et gelidis inrepsit flamma medullis.

V. 631 post RU ubique C, uritque B ∞ (M *Rand* 'utrinque puto'), utrique *Arevalo* 632 *nach* medullis *hat* C *einige tiron. Zeichen.*

640 Consulit et trepidans. tamquam nova nupta requirit.
641 Saepe verecundos faciunt nova gaudia vultus
642 Fructus honestatis datus est de ventre pudoris.
647 Nam cui terra datur et caeli sancta parantur.

V. 640 nova *ist in* B *am Rand nachgetragen* 641 quatiunt? C *ist von* nova *zu* nova *gesprungen* Consulis et trepidans tamquam noua gaudia uultus. 642 est *fehlt in B u. M; in M hat es die 2. Hand ergänzt.* 647 Nam *fehlt in C.*

Fol. 7ª *nach* II 798

II, 649 Sarra socerque simul dominum petiere rogantes.
650 Illa virum meruit stabilem post funera septem,
651 Hic visum, fugiunt cum paupertate tenebrae.

V. 649 peciere B, petebant C 650 mer. vir. C 651 Hinc B ∞.

Fol. 7ª *nach* III 477

654 David adulterii facinus homicida peregit,
655 Sed scelus agnoscens culpas inpune fatetur.
656 Sic reus et veniam celerem sub voce meretur.

V. 655 Sed ∞ : Set B, Et C impune B ∞ 656 Sic reus *fehlt in* C celerem C: sceleri B ∞

662 Fleverat Ezechias sub puncto temporis uno
663 Et prece sub modica vitae tria lustra meretur.

V. 663 sub modica vitae C: primo dicavit et B ∞

Fol. 7ª *nach* III 213

676 Incurrit culpam sancti pater ille Johannis
677 Pontificis loca sacra tenens magnusque sacerdos
678 Credere cunctatus domini promissa tonantis.
680 Mox vindicta datur per longa silentia linguae,
681 Donec ventris onus bis quinis mensibus actis
682 Fundatur de matre puer sub sorte beata.

V. 676 par̄ *ist aus* parit̄ *corrigirt in* C 681 honus C actes C 682 Fundator B Tundatur de ventre U

Fol. 2ª *nach* II 36

II, 686 Erigit elisos relevat tua dextra iacentes
687 Confovet abiectos et semper pascit egentes.
690 Peccatum sine clade reos clementior audis.

V. 686 Erigis.. Confoves.. pascis C elevat C 687 Confouit B *u. m. 1.* M 690 Peccantum C audit *zu* audis *corr.* M

694 Errantes punis, sed mitis corrigis omnes
695 Sub pietate bonus poenae cessante flagello
696 Et quotiens commotus eris placidissimus extas.
703 Et revocans a morte truci quos culpa premebat.

V. 694 corripis C 695 pene CB 697 quociens B 703 reuocas C

Fol. 6ᵇ *nach* II 647

II, 786 Candida dux fuerat nubes flammaeque columna
787 Fluctibus aequoreis gemina de parte ligatis.
790 Et pedibus siccis iter est navale peractum.

V. 786 Candida nubes erat et flamma columna C columba B *u. m. 1.* M 787 gemina *fehlt in* C lig.: liquoris C 790 iter est : itē C

791 Laudavere deum sed plus de morte natantum.
793 Certatim resonant et palmis tympana pulsant
794 Et celebrant vincente deo saltando triumphum.
795 Non gladiis iaculisque datis missisve sagittis.
798 Et tamen innumeras faciunt sine sanguine mortes.

V. 791 Laudabere B sed plus C : plus B, populus ∞ 793 res. palmis et C 794 vincente : iuuante C spaltante, *darüber* do *m. 2.*, B; psaltando, *mit Punkt unter* p, M 795 sagistis C 798 sanguine *ist in* C *durch tiron. Note ausgedrückt.*

III.

Fol. 2^b *zwischen* II 593 *und* III 243

III, 93 Quod finem expectat, fragile est totumque caducum.

Quot C Quod spectat finem B ∞

Fol. 7^a *nach* II 663

205 Armatus praesumpsit homo. clarissimus ille,
207 Qui virtute polos meruisse est dictus et astra.
211 Exegit virtutis opus, miracula summa.
212 Ille dei famulus fuerat non forte Dianae,
213 Quae solet insontum fuso gaudere cruore.

V. 205 illo V *m. 1. u.* RU 207 sua polos C hastra C 211 Exigitur C 212 sorte *Arevalo* 213 insonte *zu* insontum *corr.* C

Fol. 2^b *zwischen* III 93 *und* II 472

243 Quod si cuncta velim miracula currere sollers,
244 Non mihi sufficient mortalis tempora vitae.

V. 243 Quod *Arev.*, Qui B ∞, Nam C soleas BM, sollers C *u. m. 2.* M, solers VRU

Fol. 7^a *nach* II 651

468 Iudit Holoferni castissima finxit amorem
468a Et sibimet peperit de ficto crimine laudem.
(469 Castra ducis metuenda viris ingressa virago)
470 Inter belligeros fremitus et tela cruenta.
472 Ingreditur vestita fide, munita pudore.
473 Et quod tanta manus non est adgressa virorum.
476 Quae caput ad patriae proceres portavit et urbem.
477 Civibus una dedit cum libertate triumphum.

V. 468 Judith BMV; Ludit U *u. m. 1.* R: Judit C *u. m. 2.* R olofernem B ∞ aptissima *m. 1.*, cast. *m. rec. in* B fincxit C amare B ∞ *Der Vers* 468^a *fehlt in* U *und bei Arevalo* fincto C *V.* 469 *ist in* C *nur dadurch angedeutet, dass V.* 470 *beginnt* Ingreditur inter bell. 472 fide munita B, fidē uita C, fide uestita ∞ 473 Et q. manus tantum aliorum n. e. a. v. C ñ *über der Zeile in* B aggressa ∞ 476 patrie C : patrem B ∞ et urbem C : et urbes BM, ad urbes VRU

Fol. 3^a *nach* II 464.

III, 548 Nec sumus ignari, quid sit fas quidve nefastum.
550 Quorum primus ego plus quam peccator habendus.
551 Quando fatebor enim scelerum simul esse reatum.

V. 548 sum ignarus C nefandum C 551 enim *fehlt in* C esse : omne C

556 Sed satis est dixisse reum sub crimine cuncto.
557 Quod tua iussa vetant, solus peccasse fatebor.
558 Omne quod horrescis, non me fecisse negabo.
559 Quid prodest cuicumque nefas celare peractum,
560 Cum iudex et testis ades deus unus et idem,

561 Sacrilega quasi mente putem non omnia nosse?

V. 559 cęlare C 560 Quum VRU adē (adest) C

563 . . Mens mea quod reticet, cum si confessio simplex
564 Indicet admissum, venia sperata sequetur.
565 Qui negat, ipse sibi veniam iam sponte negavit.
566 Ergo ego confiteor miseranda mente reatum
567 Plenum, grande malum, non uno crimine partum.

V. 563 quum VRU sit C *u. m. 1.* M; si B *u. m. 2.* M, VRU 564 Judicet MVR veniā *m. 1.* M, *wohl mit V.* 565; ueniam sperare C 566 ego *fehlt in* C seatum C 567 Planum C crimine : tempore C, *vielleicht aus* 576

568 Nam scelus omne meum numeros superabit arenae
569 Littoris et pelagi vincent mala nostra liquores.
570 Non puto diluvium tantos punisse reatus,
571 Quantos ipse gero culparum pondere pressus.
572 Flumina me scelerum rapiunt quatiuntque procellae
573 Et peccatorum torrens simul obruit unda.
574 Me delictorum merserunt fluctibus amnes.
576 Hei mihi, quod facinus non uno tempore gestum,
577 Ut mea facta luam, tempus convenit in unum.

V. 568 superauit C harenae B ∞ 572 quaciuntque B 576 Hei : Et C

583 Ludibrium generis, dolor omnibus atque inimicus
584 Factus et exutus magna de parte bonorum;
585 Crinibus intonsus, pannis squalentibus usus.
587 Et quibus impendi, mox discessere propinqui
588 Vel, quicumque fuit, subito discessit amicus.

V. 583 *u.* 584 *sind in* C *zu einem zusammen gezogen, wobei* Ludibnum *geschrieben und die Wörter* dol. o. a. inimicus, *sowie* magna *weggelassen sind* 587 discessere BM : discesserunt C; discere V, didicer̄ R, didicere U, dedidicere *Arev.* propinqui : amici C

589 Agmina servorum fugiunt, tempsere clientes
590 Nec doluere meam tanta sub clade ruinam.
591 Irascente deo solacia cuncta negantur.

V. 589 dicentes C 590 meum C tanta C *Arevalo* : tantam B ∞ ruina C 591 solatia ∞

594 Punisti errantem: nunc iam miserere fatenti.
595 Paenitet en peccasse nimis: iam parce flagello.
597 Accipe, quaeso, satis; precibus ne clauseris aures.
601 Fac fieri quod et ipse iubes, miserere roganti.
602 Et lacrimas intende meas, quas fundo diurne.
603 Tristis et extenso prostratus corpore plango.

V. 594 errantem domine Nunc C fatenti CBVRU, fatentis M (*m. 2. ?*) 595 Penitet pecc. C portasse B *u. m. 1.* M parte C 597 Aspice *Arev.* queso CB 601 rogantis B ∞ 602 diurnae C, diuine U 603 extaenso, t *über Rasur,* C

604 Me miserum, qui tanta fero, cui tanta parasti
605 Supplicia scelerum, peccans licet acrius uri
605a Debueram, qui saeva diu delicta peregi.

V. 605 Supplicia *Arevalo,* Supplicia (*vor der Zeile*) His C, Supplicii B ∞ *nach* uri *steht in* C debueram, *doch durch Punkte getilgt; im Anfang der nächsten Zeile steht es noch einmal.* Die 38 Verse 605ᵃ bis 605ᵒᵒ stehen nur in C; weder in B ∞ noch sonst ist eine Spur von ihnen erhalten. Vgl. S. 268.

b Addo quod et vita brevis [est] et mors longa moratur.

605*a* seua C *b* ē & C; *ich tilge* est Addo quod *ebenso* II 254. III 359.

c Magnus es, omnipotens, qui scis cui iusta parasti.
d Eripe me his, invic*te*, malis in corpore sanum.
e Exitio succurre meo. lassatus anhelo,
f Tot fr*a*ctus hinc inde malis. ignoscere gaudes.
g Eripuit tua sancta, pater, clementia mor*ti*
h Agmina pecc*an*tum. veniam donare suetus
i †Adquisitā reis veniam conversus adoro.
k Ergo, deus, miserere mei! iam te rogo solum.
l Qualiter ipse vides, me paenitet ante quod egi.
m Omne nefas placitum iam nunc suspiria damnant.
n Flumina dant oculi, gemitus praecordia rumpunt,
o Et lacrimis maduere genae. ieiunia reddo
p Pallidus et macie confectus pectora tundo
q Et genibus curvis palmas extendo supinas.
r Cum manibus tibi vincla levo stridente catena,
s Carceris horrorem, suspendia, [et] verbera passus
t Obscenamque famem, quam maior traxit egestas.
u Me miserum, quant*o* cecidi de culmine lapsus,
v Ille *ego*, qui quondam retinebam iu*ra togati*,
x Exemi de morte reos, patrimonia nudis,
y Divitias mea lingua dedit rapuitque tenenti
z *Ac* servile iugum vel libertatis honorem.
aa †Nam quod tua accusando dii defensor amavi.
bb Inpunitates vendens poenasque nocentum
cc Insont*um*que simul pretio delic*ta* coegi
dd Ad caput *haec* hinc inde meum, quibus opprimor olim.
ee Da mihi iam veniam, finem concede ma*lorum*,
ff Vincula solve mea, stridentes frange catenas.
gg Pelle famem, exclude sitim, compesce dolores.
hh Omne quod admisi facinus crimenque relaxa.
ii Jam miserere mei, custodia longa fatig*at*
kk Inter anhelantes gemitus cladesque diurnas.
ll Jam pius indulge, *deus*, et me ad gaudia transfer.
mm Erige prostratum, vindex, adtolle iacentem
nn Et repara adflictum ta*li* sub clade malorum.

605 *c* om̄ps C   *d* muicta C; *ich änderte nach Carm.* X 207 Eripe me his, invicte, malis . ego victima servor.   *Zum Schluss vergl.* III 673 mens sana in corpore sano.   *e* anelo C   *f* fructus C   *g* mortis *aus* mortes *corr. in* C   *vergl.* II 422 (Loth) Eripitur de morte truci.   *h* peccatum C   *i Ich dachte zumeist an*: Da quaeso sceleris veniam.   *k* ds̄ C   *l* penit& C   *n vergleiche Orest.* 64 Et gemitus crebris singultibus oscula rumpunt.   *o vergl. Ovid.* A. A. III, 378 Et lacrimis vidi saepe madere genas.   *s* orrorem C; et *ist zu tilgen.*   *t* vergl. II 429 Hinc obscena fames.   *u* quanta C   *v* ego *fehlt in* C   iuret hogatus C, *ich schrieb* iura togati *nach* II, 237 *u.* 730 Jura potestatis retinens *u. nach der Subscriptio von Carm.* V 'Dracontius V. C. et togatus fori proconsulis almae Karthaginis'.   *z* Hac C   *aa Vielleicht:* Nam quod tu accusas, dudum defensor amavi.   *bb* penasque C   *cc* Insontemq; C; *vergl. Carm.* X 343 punisse nocentes Insontesque simul.   delicto C   *dd* haec *fehlt in* C   *ee* malum C; *vergl. Satisf.* 119 veniam concede.   *hh* admissi C   *ii* fatigar C   *kk* anelantes C *ll* deus *oder* precor *fehlt in* C   *nn* talem C

III, 605 ∞ Quae per me cecidit, per te spes nostra resurgat.
606 Munera percipiam domini redeunte favore.

606 Munera percipiam B ∞ : Munere p̄cipuum C

648 Me, rogo, iam repara sub libertate solutum
649 Clade, catenarum ferrato pondere pressum.
650 Sit vitae requies, animae sint otia fessae.
651 Sit secura dies, sit nox cum munere somni.
652 Sit fortuna redux, sit virtus usque senectam.
653 Sit venerandus honos et quicquid vota precantur.

V. 649 pressus B 650 Sint V *u. m. 1.* M animae B ∞ : queso C sunt U ocia BM 651 dies (*auch* U) : quies *Arev.* somni C : noctis B ∞ 652 senecta C vota precantur *schrieb Arevalo;* vota C, uita B ∞; precatur CB ∞

663 Servatum reparare iube pietate sueta,
664 Ut merear cantare tuas per carmina laudes.

V. 663 sueta B ∞ : benigna C 664 carmine C *Vgl. Carm.* VI 32 Ut valeam cantare tuos per vota triumphos.

673 Sint reduces sensus, mens sana in corpore sano.
674 Sit mihi longa dies felici tramite vitae.
675 Sit bona vel perpes felix numerosa propago.
676 Sit sine tormentis post corpus vita futura.
677 Sit requies animae, quae mox purgata quiescat.

V. 673 sensus C : tenuis B ∞ 675 bona vel perpes C : homo uel perplex B ∞ (Sitque *m. 2.* M; perlex U) 676 corpus : tempus C *nach* 676 *steht in* BMVR *der Vers* Noxia mens non sit, non sit rea, non sit iniqua (iniqua B, inique M *m. 2*, unque *m. 1.* M, VR); *er fehlt in* C *u.* U *u. Arevalo* 677 Sit C : Et B ∞ quę C : qua B ∞ mox C *Arev.* : nox B ∞

678 Iudicio deus alme tuo detur inde triumphus.
679 Inter odoratos flores et amoena virecta
680 In nemus aeternum veniam sedesque beatas
681 Et grates exceptus agam de fasce malorum
682 Additus insonti populo sub sorte piorum.

V. 678 triumphans C 679 amena B uirecta BC: uireta MVU; *in* M *m. 2 am* Rand 'virecta scribi Servius asserit'; virecta R 680 In nemus C : Quamuis ad B ∞; Ad nemus aethereum *Arevalo* ueniam C *Arev.* : uenit B ∞ beatus B, *m. 1.* M 681 grates C *Arev.* : gratias B ∞ de C *Arev.* : ex B ∞; *in* M *hat m. 2. geändert* Etque (Atque?) exceptus agam grates ex

Fol. 1[a]: UERSUS CENTONI EXLIBRIS DRACONTII INLAU|DIB. DĪ ET DESUA PĘNITENTIA I, 1 *bis* 9. 18. 19. 21. (40. 41.) 60. 69. 72 *bis* 75. I, 302. I, 77. 84.

Fol. 1[b]: I, 87 *bis* 90. 94. 95. 96. II, 555. 556. I, 99. 101. 104. 108. I, 560. I, 696. 697. 699. 700. 702. 703. 707. 708. 711. 714.

Fol. 2[a]: I. 715. 733 *bis* 736. II, 36. II, 686. 687. 690. 694. 695. 696. 703. I, 738. 739. 741. 746 *bis* 750. II, 57. II, 151. 152. 152[b]. 153.

Fol. 2[b]: II, 154. 156. 193. 202 *bis* 208. 211. 198. 212. 213. 215. 216. 217. 220 *bis* 223. II, 587 593. III, 93. III, 243. 244.

Fol. 3^a: II, 472 *bis* 475. 458 *bis* 464. III, 548. 550. 551. 556 *bis* 561. 563 *bis* 567.

Fol. 3^b: 568 *bis* 574. 576. 577. 583. 584. 585. 587 *bis* 591. 594. 595. 597. 601 *bis* 605. Dann die 38 neuen Verse, *von denen der 5.* 'Exitio' Fol. 4^a *und der 35.* 'Jam pius' Fol. 4^b *beginnt. Dann folgt* III, 606. 648 *bis* 653. 663. 664. 673 *bis* 682. *Hierauf folgt* EXPLICVIT | INCIPIT EIUSDEM DRACONTII DE ORI|GINE MVNDI AB ADAM ET EVA. *Dann:* I, 329. 330. 333. 334.

Fol. 5^a: I, 336. 338 *bis* 341. 343 *bis* 348. 181. 180, 190. 349. 350. 351. 353. 354. 355. 360. 371 *bis* 374. 377 *bis* 384.

Fol. 5^b: I, 386 *bis* 390. 393 *bis* 397. 364. 365. 367 *bis* 370. 399. 400. 402. (404. 405.) 406. 407. 414. 415. 427. 428. 429. 435. 436. 439. 440. 441. 443. 444.

Fol. 6^a: I, 445. 459 *bis* 465. 469 *bis* 474. 477 *bis* 484. 488 *bis* 491. 493. 535. 536. 542. 545. 549. 550. 551. 553. 555. 560. 619. II, 365.

Fol. 6^b: II, 366 *bis* 371. 380. 381. 385. 397. 398. 404. 407. 410. 411. 412. 420. 421. 422. 426. 427. 476. II, 615 *bis* 618. 620 *bis* 623. 626. 627. 625. 631. 632. (640. 641.) 642. 647. II, 786.

Fol. 7 *ist in zwei Columnen beschrieben; diese bezeichne ich mit* 7^a *u.* 7^b. 7^a: II, 787. 790. 791. 793. 794. 795. 798. II, 649. 650. 651. III, 468. 468^a. 470. 472. 473. 476. 477. II, 654. 655. 656. 662. 663. III, 205. 207. 211. 212. 213. II, 676. 677. 678. 680. 681. 682. II, 587. 589. 590. 591. II, 499. 500.

Fol. 7^b: II, 506 *bis* 509. 514. 518. 521. 524. 526. 531. 532. 542. 543. 544. 546 *bis* 549. 556. Dann EXPLICVIT LIBER.

Anhang.

Die Handschrift, welche die besprochenen Auszüge aus Dracontius, dann die Historia evangelica des Juvencus uns überliefert hat, gewinnt noch weiteren Werth durch die tironischen Noten, welche in derselben angewendet sind. Im Allgemeinen wurden diese Noten, wie unsere Stenographie, nur zu ephemeren Dingen verwendet und selten wird man einen wichtigen Text in tironischen Noten geschrieben

finden. So ist auch der Inhalt der tironischen Noten dieser Handschrift nicht bedeutend. Im Dracontius finden sich nur an zwei Stellen einige Zeichen. Im Juvencus findet sich neben und zwischen den Versen eine gewaltige Menge von kleineren Bemerkungen, die ganz oder zum Theil mit tironischen Noten geschrieben sind.

Doch die umfangreichsten und lehrreichsten Stücke in dieser Schrift finden sich auf Blatt 7. Ich liess diese beiden Seiten photographiren, und Wilh. Schmitz, der bewährteste Kenner dieser Schrift, hatte die Güte, mir dieselben zu deuten.

Die Vorderseite enthält am Schlusse des Dracontius ein kleineres Stück, in dem gewöhnliche Schrift und tironische Noten fast zu gleichen Theilen gemischt sind. Drei Theile scheiden sich hier: 1. Isidor Orig. 15, 2, 36 über das Labyrinth. 2. Isidor Orig. 19, 24 über pallium; vergl. Winter, Plauti Fragmenta p. 80. 3. Eine Erklärung von Fagolidorus, die zurückgeht auf den Schluss des Hieronymianischen Prologs zu Ezechiel und von der sich in den alten Glossaren viele Spuren finden. Angehängt ist 4. eine Erklärung von Tragicus.

1 *Labirintus perplexis parietibus edificium.* qualis est aput *Cretam a Dedalo*
2 *Factum,* ubi fuit *Minotaurus inclusus.* In quo *si quis* introiuerit sine *glomere*
3 *lini,* exitum inuenire non ualet. Talis est *situs* eius, ut *aperientibus fores*
4 *tonitruum* intus *terribile* audiatur. *Descenditur centenis* ultra *gradibus*
5 intus transitus *innumeri* et multa ad ingredientium errorem *facta.* Quattuor autem sunt: primus
6 *egyptius,* alter *grecitus* (d. h. creticus). tertius *in lemno.* quartus *in Italia.* omnes ita *construc-*
7 *ti.* ut dissoluere *eos* nec saecula *possint.* *Pallium est* quo ministrantium *scapulae*
8 *conteguntur.* ut dum ministrant *expediti* discurrant. *Plautus. si quis facturus es*
9 *appende in humeris pallium et pergiet* quantum ualet *tuarum pedum pernicitas.*
10 dictum *a pellibus quia prius* super *indumenta pellicia* ueteres utebantur quasi
11 *pellea.* siue *a palla per deriuationem.* *Fagia. commestio.*
12 *lydoria. impetus* quo *quis toto* animo *inueitur* in *inimicum* uno nomine
13 dici potest *maledictio.* *Fagolidori* manducans *senecias* id est

14 ea quae maledixit et dispexit *sumens* quod *essent emuli. ier.* detrahens in publico et in angulis.

14a *orat* (Horatius): *carmine qui traico uilem certauit ob hyrcum.*

15 *Traicus* est qui res publicas *canit* et regum historias et ex rebus *luctuosis* karmina faciunt.

Die Rückseite des siebenten Blattes enthält die Praefatio zur Historia evangelica des Juvencus. Am Rand derselben stehen die Bemerkungen: *mutato* nomine debemus *intellegere Johannem* und mutata scriptione debemus *intellegere Marcum.* Die untere Hälfte der Seite ist gefüllt durch ein schönes Stück tironischer Schrift. Der Inhalt ist unbedeutend; es ist ein breiter Commentar zu der darüber stehenden Praefatio, Schulweisheit aus dem 6. bis 8. Jahrhundert.

1 Juuencus nobilissimi generis Hispanus presbiter tam corporis quam animi . . . hunc librum exametris uersibus colligens ex quattuor euangelistis Matthaeum scilicet Marco Luca

2 et Joannem, quamuis ipsi diuerse fuerant *locuti,* iste tamen unum atque idem locutus fuisse demonstrat . . namque facit consensione. Namque ut hoc

3 . . . . introitus est a . . a . . qui ueritati auctoris magnum . . . *libros non* ob aliud quam ut gloriam nominis sui et memoriam

4 perennem habuissent conposuerunt. Ex *quibus* apud Graecos ortus est *Omerus* qui dicta . . siue gesta uirorum Dardanie in sua lingua exametri uersibus conpos . . .

5 Fuerunt etiam multi *traici* qui . . . karmen conponere. Isteque bonus uir uidens eorum historias et eorum karmina non in honore dei omnipotentis

6 esse conposita et nihil aliud in eorum dicta ad profectum audiendi nisi amplexum et ioculam . . . et fabulas . . . edere hunc librum

7 non ob gloriam et memoriam nominis sui perenne sed in honore dei omnipotentis . . . facta . . suam quae per hunc mundum gessit . . . dixit . . .

8 Dicta autem horum quattuor evangelistarum in uno corpore copulauit ediditque hos VIII uersiculos exponens in eis figuras quattuor euangelistarum.

9 Dicunt enim quidam auctores non compositos fore hos versiculos a Juvenco sed prius ab aliis eo quod non ita ut sancti patres uoluerant . . .

10 horum . . . Ambrosius . . et ceteri et nunc sancta tenet ecclesia. figuras eorum exposuerit ut scilicet Matheus in homine Marcus leone in Luca

11 uitulum in Johanne aquila cogeret . . . Beatus namque Augustinus discernens a ceteris Mattheum in homine Marcum in aquila Lucam in uitulo

12 Joannem in leone . . . namque eccl. . . . in uisu uidisse quattuor animalia p . . . quae utique (?) quattuor euangeliste habeantur incipiens uidisse

13 eos sicut nunc sancta ecclesia tenet et teneat eum . . . et . . . esse hominis et esse leonis et esse uituli et esse aquile

14 et beatus Joannes in *Apocalipsi* (4,6) ita ex ordine uidisse eos profert.

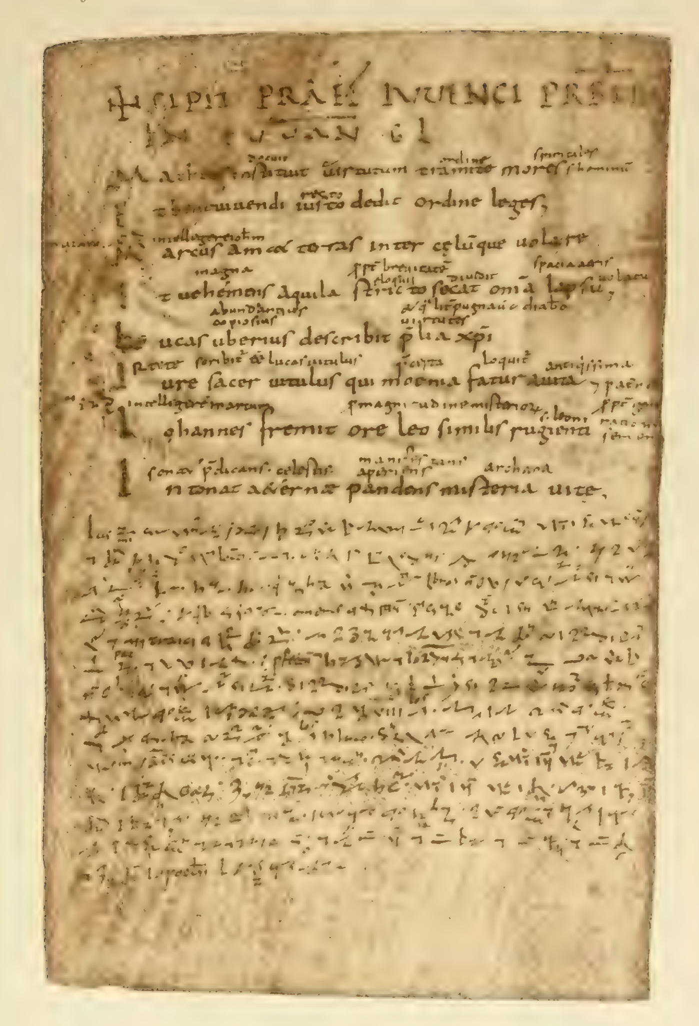
Die Lesung der tironischen Noten ist sehr schwierig. Die Lücken, welche hier bleiben, lassen sich vielleicht durch Benützung anderer Handschriften des Juvencus ausfüllen. Denn von diesem Lieblingsschriftsteller des frühen Mittelalters giebt es auffallend viele Handschriften mit tironischen Noten. Wie K. Marold, der letzte Herausgeber des Juvencus, mir mittheilte, finden sich *viele* tir. Noten in den Handschriften zu Bern 534; Paris 9347; Danzig XVII Aq. 66; Metz 519; *einige* in den Handschriften zu Madrid, Laon und Wolfenbüttel. Die Handschrift im Vatican, Regin. Nr. 333, welche der unsern sonst nahe verwandt ist, enthält nur wenige tironische Noten.

Ausgegeben am 20. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

MEYER: Die Berliner Centones der Laudes dei des Dracontius.





INCIPIT PRAEF IUUENCI PRESB
IN EUUANGEL

Ma ... stituit uirtutum tramite mores
et bene uiuendi iusto dedit ordine leges,
arcus amat terras inter celumque uolare
et uehemens aquila stricto secat omnia lapsu,
ucas uberius describit p̄lia xp̄i
ure sacer uitulus qui moenia fatur auita
ohannes fremit ore leo similis rugienti
ntonat aeternae pandens misteria uite.

MEYER: Die Berliner Centones der Laudes dei des Dracontius.



1890.

XVI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

20. März. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Schmidt las über die Urheimath der Indogermanen und das europäische Zahlsystem.

Die Mittheilung wird in den Denkschriften erscheinen.

2. Hr. Waldeyer legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. A. Fleischmann, Privatdocenten der Zoologie in Erlangen, vor über die Stammesverwandtschaft der Nager (*Rodentia*) mit den Beutelthieren (*Marsupialia*).

Die Mittheilung folgt umstehend.



Die Stammesverwandtschaft der Nager *(Rodentia)* mit den Beutelthieren *(Marsupialia.)*

Von Dr. A. Fleischmann
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer.)

Die Gruppe der Nagethiere schliesst eine grosse Zahl mannigfaltiger Formen ein; meist kleine und flink bewegliche Thiere vermögen sie sich in weiten Grenzen den verschiedenartigsten Lebensbedingungen anzupassen und bevölkern in Folge der Dehnbarkeit ihrer Bedürfnisse in staunenswerther Menge die Oberfläche unseres Planeten. Ihre palaeontologische Überlieferung reicht bis an den Beginn der Tertiärzeit zurück. Auffallender Weise lebten schon damals Formen in grosser Zahl, die mit nur geringfügigen Umänderungen bis auf den heutigen Tag volle Lebenskraft bewahrt haben. In den Gebirgsschichten, welche die Kunde jener Zeiten uns vermitteln, finden sich aber auch Reste von riesigen Nagern aufbewahrt, die neben kleineren Verwandten aufblühten, jedoch durch die Ungunst der Verhältnisse bald wieder verschwanden. Jetzt reihen sich an Familien von fast universeller Verbreitung andere, deren Wohnsitze auf bestimmte Gegenden beschränkt sind und der letzte Riese unter den Nagern, das *Capybara*, führt ein vereinsamtes Leben in den sumpfigen Niederungen der Ströme Südamerikas.

Man sollte meinen eine Thiergruppe, welche eine weit in die Vorzeit reichende Geschichte, so merkwürdige Verhältnisse der geographischen Verbreitung und einen so zierlichen Körperbau aufweist, habe viele Naturforscher angeregt, als deren Historiographen aufzutreten. Allein diese Erwartung erscheint beim Studium der Litteratur als eine trügerische.

Freilich kann man Arbeiten über die systematische Eintheilung dieser Classe und die auf den Zahnbau gestützte Verwandtschaft einzelner Arten und Familien in Menge anführen. Anatomische Untersuchungen über die Beschaffenheit einzelner Organsysteme sind, wenn

wir von den Specialarbeiten absehen, die an den typischen Versuchsthieren unserer Laboratorien, dem Meerschweinchen und Kaninchen gemacht wurden, seit *Pallas* zu sehr beschränkten Malen auf die ganze Gruppe ausgedehnt worden. Wenn die Kenntniss der Weichtheile als gänzlich ungenügend bezeichnet werden muss, so ist der Mangel an Arbeiten über die Stammesgeschichte dieser Thiere noch mehr zu bedauern.

Abgesehen von den wechselnden Versuchen, den Nagern eine gesicherte Stellung im Systeme anzuweisen, ist hier nur eine Studie von M. Schlosser über »die Nager des europäischen Tertiärs nebst Betrachtungen über die Organisation und geschichtliche Entwickelung der Nager überhaupt« (Palaeontographica 31. Bd.) anzuführen. Schlosser ist der erste und einzige Forscher, der vom Standpunkte der modernen Entwickelungstheorie aus die palaeontologischen Reste der in Rede stehenden Thiere einer ausgezeichnet gründlichen Bearbeitung unterzogen hat und dann in enger Berücksichtigung des Skelet- und Zahnbaues der recenten Formen den Versuch einer phylogenetischen Anordnung machte. Die Schlussfolgerungen aus sehr zahlreichen Thatsachen führten ihn zur Hypothese, dass die Nager direct mit den Beutlern verwandt seien. Auf Grund meiner Untersuchungen halte ich diese Annahme geradezu für unabweislich. Leider sah sich jedoch Schlosser ein halbes Jahr, nachdem er seine mustergiltige Arbeit veröffentlicht hatte, veranlasst, seine schönen Darlegungen zu widerrufen und selbst als unhaltbar zu bezeichnen.

Seit dieser Zeit ruhte die Frage vollständig, denn bei der geringen Fühlung, welche manche Zoologen mit den palaeontologischen Ergebnissen unterhalten, scheint Schlosser's Arbeit nur Wenigen bekannt geworden zu sein.

Durch Untersuchungen über Entwickelungsgeschichte ward ich vor etlichen Jahren zu intensiverem Nachdenken über die Frage angeregt, in welchen stammesgeschichtlichen Beziehungen die einzelnen Classen der Säugethiere zu einander ständen und ich erlaube mir jetzt einen kurzen Bericht über die Ergebnisse vorzulegen, zu welchen ich bezüglich der Nagethiere gelangt bin.

Da die Verwandtschaft der Säugethiere in hergebrachter Weise nach der Beschaffenheit und Zahl der Zähne bestimmt wird, so will ich meinen Bericht mit dem Gebisse der Nagethiere beginnen. Schon mehrmals ist die auffallende Parallele der Zahnbildung zwischen Beutlern und Nager betont worden, ohne dass genauer geprüft wurde, ob hier eine blosse Analogie oder eine wirkliche, auf directe Verwandtschaft deutende Homologie sich ausspreche. Die Reihe der Umbildung lässt sich nach meinen mit den früheren Angaben wohl übereinstimmenden

Beobachtungen von den känguruartigen Beutlern in einfachem Wege zu den wahren Nagern verfolgen, wobei die analogen Seitenzweige *Phalangista* und *Phascolomys* erwünschte Kunde von den früheren Zwischenformen liefern. Das Gebiss von *Phalangista vulpina* zeigt im Oberkiefer zwei Eckzähne und sechs Schneidezähne, von denen die medianen am grössten, die lateralen am kleinsten sind. Im Unterkiefer stehen zwei grosse meisselförmige Schneidezähne, deren Alveole bis zum ersten Backzahn reicht. Hinter den beiden grossen Schneidezähnen findet man noch vier kleinere Schneidezähne; es sind also auch im Unterkiefer sechs Schneidezähne vorhanden, deren Stärke nach hinten abnimmt, so dass das dritte Paar nur noch in Form von kleinen, winzigen Stiften erscheint, die in früher Lebenszeit ausfallen, das zweite Paar aber bleibt lange erhalten. Bei *Hypsiprymnus* sind im Unterkiefer zwei Schneidezähne gegen sechs Incisiven des Oberkiefers wirksam, von denen das erste Paar auffallend stärker geworden ist, während das zweite und dritte Paar ihm an Grösse nachsteht. Bei *Phalangista* stehen die sechs Schneidezähne in zierlich hufeisenförmiger Krümmung an dem Rande der breiten Praemaxillen, aber bei *Hypsiprymnus* ist das Schnauzenende schmäler geworden, weil die Praemaxillen seitlich comprimirt wurden. Nun biegen sich die vier kleineren Schneidezähne mehr medianwärts, um beim Abrupfen der Pflanzen als Gegner der Unterkieferzähne zu functioniren. Eine grössere Reihe von *Hypsiprymnus*-Schädeln zeigt, auf wie verschiedene Weise dieses Ziel erreicht werden kann. Aber die vier Zähne sind zu schwach, als dass sie bei adaptiven Gruppen mit Vortheil erhalten werden könnten, deshalb erleiden sie das gleiche Schicksal, wie die entsprechenden Zähne im Unterkiefer von *Phalangista*. So scheint mir das typische Gebiss der Nagethiere mit seinen zwei Paaren von Schneidezähnen entstanden. Die Umbildung des schmelzbedeckten und wurzeltragenden Schneidezahnes in den mit einseitiger Schmelzplatte versehenen, immerwachsenden Nagezahn lässt sich ebenfalls im Stamme der Beutelthiere mit Leichtigkeit verfolgen. Im Geschlechte der Lagomorphen weist das Gebiss Verhältnisse auf, die wohl im Einklange mit meinen Speculationen stehen. Im Oberkiefer wird hinter den Nagezähnen das zweite Paar kleiner Schneidezähne ganz gegen die Medianebene gerückt; sie werden noch gewechselt und haben auch die Kraft andauernden Wachsthums erhalten. Die Nagezähne selbst, sowohl im Ober-, wie im Unterkiefer, besitzen noch ausserordentlich kurze Alveolen und eine schwache Krümmung.

Trotz der unzweifelhaft wichtigen Rolle, welche der Zahnbau für eine schnelle systematische Diagnose spielt, glaube ich nicht, dass allein auf die Ähnlichkeit des Gebisses sich der Schluss einer directen

Blutsverwandtschaft mit genügender Sicherheit stützen lässt. Deshalb will ich weitere Beweise anführen.

Als sehr bequemes, in die Augen springendes Merkmal ist am Unterkiefer der Beutelthiere der horizontal nach innen springende Kieferwinkel bekannt. Sind die Nager mit den Beutlern stammesverwandt, so muss jene Bildung noch heute erkennbar sein; in der That hat die Vergleichung vieler Schädel mich belehrt, dass die öfters beschriebene Beugung der hinteren Ecke des Unterkiefers bei Nagern, die bei verschiedenen Abtheilungen in wechselnder Ausbildung vorkommt, in einer directen Reihe von dem Befunde bei Beutelthieren ableitbar ist. Ganz entschieden halte ich die Behauptung fest, dass *Marsupialia* und *Rodentia* durch das homologe Verhalten des Kieferwinkels ihre Verwandtschaft bezeugen. Bei Muriden, Sciuriden, Myoxiden ist diese Eigenthümlichkeit besonders klar ausgeprägt, obschon sie manchmal durch secundäre Beeinflussung der dort inserirenden Musculatur etwas verändert wurde; sie kommt jedoch nicht dem ganzen Geschlechte zu und fehlt immer den *Hystrichidae*, *Subungulata*, *Octodontidae*, *Lagostomidae*, *Leporidae*.

Auch diese Modification lässt sich auf Verhältnisse im Beutlerstamme zurückführen; denn unter ihnen sind manche Formen eines deutlichen Kieferwinkels verlustig gegangen wie z. B. *Phascolarctos*. Dann erscheint der Unterkiefer bei seitlicher Betrachtung als eine nach hinten zu einer dreiseitigen Platte verbreiterte Spange. Jedoch der Contour des Randes und die auf der äusseren Fläche des Kieferendes befindlichen Gruben und Knochenleisten verrathen in wohl verständlichen Zeichen die frühere Geschichte des Skelettheiles. Es offenbart sich schon bei wahren Beutlern das Bestreben, den Kieferwinkel aus der einwärts gerichteten horizontalen Lage in eine mehr verticale überzuführen und ihn in die gleiche Ebene wie den aufsteigenden Ast zu bringen. Bei Nagern sind alle wünschenswerthen Stufen der Rückbeugung erhalten geblieben, die im Extrem den Anlass zu der mächtigen Flächenzunahme des hinteren Kieferendes wurden.

Damit gleichlaufend lässt sich eine Reduction des *Processus coronoideus* gewahren: bei Beutelthieren sehr kräftig ausgebildet, erhält er sich bei allen den Nagethieren, welche den nach innen springenden Kieferwinkel besitzen, aber er wird klein, fast bis zum gänzlichen Schwunde bei Nagern mit breiter Kieferplatte.

Da ich die Entstehung des Gebisses der *Rodentia* durch ähnliche Etappen verlaufen denke, wie sie heute noch die lebenden Reste der Spring- und Kletterbeutler im Modelle vorführen, so muss das Gebiss ihrer Vorfahren den omnivoren Charakter allmählig verloren haben

und herbivor geworden sein, damit musste sich natürlich die Bewegungsrichtung des Unterkiefers modificiren.

Wirklich lässt sich diese Umwandlung noch aus der Stellung und Form des *Condylus glenoidalis* am Unterkiefer erkennen, derselbe geht aus einer queren Richtung, die bei den omnivoren Beutlern allgemein verbreitet ist, in eine der Sagitalebene parallele Stellung aber und dem entsprechend wird die *cavitas glenoidalis* an der Schläfenschuppe, die bei Beutlern keine bedeutende Ausdehnung erreicht, immer länger, um auf den Jochbogen überzugreifen und eine lange, rinnenförmige Aushöhlung zu werden.

Der einmal eingetretene Wechsel der Nahrung lässt sich ferner aus der Beschaffenheit der verdauenden Organe bei den *Rodentia* erschliessen. Ich hebe jetzt nur die Form und den Bau des Magens hervor. Während derselbe bei den meisten Nagern eine ziemlich einfache Structur und Form besitzt, complicirt er sich bei den mausartigen Thieren in höherem Grade. Schon an der gewöhnlichen Hausmaus ist die Scheidung des Magens in zwei Hälften, deren eine links gelegene verhorntes Epithel, deren rechte drüsige Schleimhaut besitzt, sehr auffallend. Beim Hamster werden diese Magenabschnitte schon äusserlich sichtbar und bei den am meisten specialisirten Feldmäusen mit permanent wachsenden Backzähnen findet sich auch im Magenbau die grösste Complication, die ja Retzius schon genauer beschrieben hat.

Die Beutler besitzen eine wahre Kloake und ihre Stammesverwandten, die Nagethiere, schliessen sich hierin ziemlich direct an. Denn der frühere Besitz der gleichen Einrichtung bekundet sich immer noch dadurch, dass die äussere Öffnungen des Urogenitalapparates und der After dicht nebeneinander liegen, so dass sie fast zusammenstossen und von gemeinsamen Sphinkteren umfasst werden. Bei einem geburtsreifen Biberembryo fand ich sie in einem gemeinsamen haarlosen und etwas eingesenktem Felde dicht nebeneinander.

Bei Beutelthieren münden die beiden Hörner des Uterus mit getrennten Öffnungen in die Vagina, dei Nagern herrscht das gleiche Verhalten, dessen homologe Bedeutung nicht durch eine kurze Verschmelzung der beiden Hörner bei etlichen wenigen Nagern gestört wird.

Die grösste Zahl der Brustzitzen wird bei *Marsupialia, Rodentia* und *Insectivora* erreicht. In Berücksichtigung des Umstandes, dass das Vorkommen von rudimentären Zitzen bei anderen Abtheilungen der Säugethiere auf Reduction eines früheren und reicheren Besitzes deutet, sprechen die vielen Zitzen der Nager für die primitive Organisation dieser Thiere. Gegenbaur hat ferner gezeigt, dass die Milchdrüsen der Nagethiere im Baue vollkommene Homologie mit Beutlern besitzen.

Der Bau des Kehlkopfes schliesst direct an Beutelthiere an, wie Mayer bereits 1829 hervorhob und R. Owen hat vor langer Zeit betont, dass das Gehirn der *Rodentia* mit dem Hirn der *Marsupialia* in wesentlichen Punkten übereinstimme. Nicht nur die äussere Form, sondern auch die innere Structur ist bei beiden homolog. Gemeinsam ist die Armuth an Hirnwindungen, gemeinsam der Mangel eines gut entwickelten *Corpus callosum*, gemeinsam die starke Ausbildung des Wurmes am Kleinhirn und die freie Lage der Vierhügel.

Am Rückenmarke sind die Spinalnerven ebenso geordnet wie bei Beutlern, besonders die Lendenregion zeigt nach Ihering's Untersuchungen die grösste Gleichartigkeit.

Was mich aber besonders bestärkt, an der Behauptung festzuhalten, dass die Nager in directer Linie mit den Beutelthieren verwandt seien, sind die vielfachen und auffallenden Ähnlichkeiten, welche während der Embryonalentwickelung in beiden Gruppen auftreten.

Behält der Dottersack des Opossums während des Uterinlebens eine ansehnliche Ausdehnung und übertrifft er bis zum Momente der Geburt die Allantois weit an Grösse, so bleibt auch bei den Nagern, z. B. Kaninchen und Eichhörnchen der Dottersack während der ganzen Schwangerschaft verhältnissmässig gross, und die Allantois klein. Man kann in beiden Gruppen den gleichen Verlauf der Entwickelung constatiren; nur ist durch die Verschmelzung des Allantochorions mit der Uterinschleimhaut, d. h. durch die Entstehung einer diskoidalen Placenta die Function der Allantois sehr gesteigert worden. Aber die ursprünglichen Verhältnisse der phylogenetischen Geschichte lassen sich aus dem lange Zeit der Allantois gleichkommenden Volumen des Dottersackes erschliessen.

Ein scheibenförmig ausgebreiteter Gefässhof auf dem Dottersacke mit cordifugalem *Sinus terminalis* erscheint in durchaus homologer Ausbildung bei Beutlern, dem Kaninchen und Eichhörnchen.

Die lange Persistenz eines ekto-entodermalen Proamnions, das bei Opossum bis zur Geburt erhalten wird, ist wiederum bei den genannten Nagethieren nachweisbar.

Die Inversion der Keimblätter bei den *Murida* und *Subungulata* ist als eine Modification von einer sicher sehr einfachen Uterinentwickelung der Vorfahren zu betrachten.

Alle Organe der Nagethiere erweisen sich bei Betrachtung vom phylogenetischen Standpunkte direct vom Typus der Beutler ableitbar und ohne logischen Zwang kann man an den jetzt lebenden Formen Schritt für Schritt die Stadien erkennen, die uns die Umwandlung von altvererbten Einrichtungen verständlich machen. Diese Thatsache ist nicht allein mir aufgefallen, sie hat sich jedem Forscher, der mit

vergleichend-anatomischen Gesichtspunkten einzelne Organe der Nager studirte, geradezu aufgedrängt und ich darf bloss das Verdienst für mich in Anspruch nehmen, dass ich die einzelnen zerstreuten Angaben auf ihre Richtigkeit prüfte und zu einer einfachen Theorie combinirte.

In dem vorliegenden Berichte habe ich nur meine Ansichten über die Stammesverwandtschaft der Nager ausgesprochen, ohne auf andere Säugethiere einzugehen. Dadurch möchte ich aber nicht den Schein erwecken, als hätte ich mich einseitig nur mit dieser Gruppe beschäftigt; im Gegentheile, ich habe auch andere Abtheilungen in den Bereich meiner Untersuchungen gezogen und bin bezüglich der Insectenfresser und Fledermäuse zu dem Schlusse geführt worden, dass auch zwischen diesen beiden Gruppen und den Beutelthieren mit raubthierähnlichem Gebisse eine sehr innige Verwandtschaft besteht, die sich sowohl anatomisch wie embryologisch erhärten lässt. Darüber sowie über die Phylogenie der Raubthiere werde ich mir erlauben, der Akademie späterhin Bericht zu erstatten.



Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Fortsetzung der Mittheilung vom 13. März [St. XIV].)

§. 6.

Da sich jede ganzzahlige Transformation von

$$v\quad,\quad w$$

in

$$\beta' v - \alpha' w, \quad -\beta v + \alpha w \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

aus Transformationen:

$$\begin{pmatrix} v, w \\ -w, v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v, w \\ v, w + gv \end{pmatrix}$$

zusammensetzen lässt, so folgt aus den Gleichungen $(\mathfrak{E}_1)$ und $(\mathfrak{E}_2)$ des §. 4:

$$(\mathfrak{E}_1) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w, v),$$

$$(\mathfrak{E}_2) \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w + gv)$$

die allgemeinere Relation:

$$(\mathfrak{E}') \quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w),$$

welche auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$(\mathfrak{E}'') \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0' v' + \tau_0' w', u, v', w'),$$
$$(\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w)$$

und welche die beiden Relationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$ als speciellere enthält.

Die hier angegebene Ableitung der Relation $(\mathfrak{E}')$ erfordert freilich, dass bei keiner von den Zwischentransformationen die Variabeln v und w Werthe erhalten, für welche auch nur eine der Grössen σ_0, τ_0 gleich einer ganzen Zahl würde; aber die Gültigkeit des Endresultats ist doch nur an die Bedingung geknüpft, dass weder eine der Grössen σ_0, τ_0 auf der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{E}'')$ noch eine der Grössen σ_0', τ_0' auf der rechten Seite, d. h. also $\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$, einen ganzzahligen Werth habe. Denn wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man offenbar an Stelle von σ_0, τ_0 benachbarte Grössen:

$$\sigma_0 + \delta, \quad \tau_0 + \delta$$

so wählen, dass auch bei allen Zwischentransformationen, durch welche man von (σ_0, τ_0) zu $(\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0)$ gelangt ist, und also auch

$$\text{von } (\sigma_0 + \delta, \tau_0 + \delta) \text{ zu } \big(\alpha(\sigma_0 + \delta) + \beta(\tau_0 + \delta), \alpha'(\sigma_0 + \delta) + \beta'(\tau_0 + \delta)\big)$$

gelangt, niemals ganzzahlige Werthe vorkommen, und man erhält alsdann die Gleichung:

$$(\mathfrak{E}''') \quad \lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varrho\big((\sigma_0 + \delta)v + (\tau_0 + \delta)w, u, v, w\big) = \lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varrho\big((\sigma'_0 + \delta'_1)v' + (\tau'_0 + \delta'_2)w', u, v', w'\big).$$

$$\big(\delta'_1 = (\alpha + \beta)\delta, \quad \delta'_2 = (\alpha' + \beta')\delta\big)$$

Da nun im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden ist, dass $\mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w)$ als Function der reellen Variabeln σ_0 und τ_0 stetig ist, so ist aus der Gleichung $(\mathfrak{E}''')$ das Bestehen der obigen Gleichungen $(\mathfrak{E}'')$ und $(\mathfrak{E}')$ zu erschliessen, und diese sind also in der That nur an diejenigen Bedingungen geknüpft, deren Erfüllung schon bei der Definition der in den Gleichungen vorkommenden beiden Functionen $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w')$ vorausgesetzt worden ist.

§. 7.

Das Product:

$$e^{-2\tau_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + v, v, w)$$

kann gemäss der Definitionsgleichung $(\mathfrak{D})$ im §. 3 durch den Grenzwerth:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}}$$

dargestellt werden, wenn die Summation in Beziehung auf m von $-M + 1$ bis $M + 1$ und in Beziehung auf n von $-M$ bis M erstreckt wird. Der Unterschied zwischen diesem Grenzwerth und jenem, der durch $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ bezeichnet worden ist, wird also durch die Differenz der beiden Grenzwerthe:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - (M+1)\tau_0)2\pi i}}{\big(u + (M+1)v + nw\big)^{1+\varrho}}, \quad \lim_{M=\infty} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 + M\tau_0)2\pi i}}{(u - Mv + nw)^{1+\varrho}},$$

gegeben, welche gemäss der ersten von den beiden Gleichungen $(\mathfrak{C})$ im §. 3 gleich Null sind. Es findet demnach die Relation statt:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{-2\tau_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u + v, v, w),$$

aus welcher durch Anwendung der Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$ die fernere Relation folgt:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{2\sigma_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u+w, v, w)\,,$$

und aus diesen beiden geht die allgemeinere, für beliebige ganze Zahlen s, t gültige Relation hervor:

$$(\mathfrak{E}_3)\quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{2(t\sigma_0 - s\tau_0)}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u+sv+tw, v, w)\,.$$

Endlich sind noch die beiden durch die Definition evidenten Relationen anzuführen:

$$(\mathfrak{E}_4)\quad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, w) &= \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 - w\tau_0, u, -v, w)\,,\\ \mathrm{Ser}_\varrho(v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, w) &= \mathrm{Ser}_\varrho(-v\sigma_0 + w\tau_0, u, v, -w)\,. \end{aligned}$$

Setzt man nunmehr wie im §. 9 des art. XX:

$$\begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0\;, & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma_0'\,;\\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma\;, & \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma'\,,\\ v' &= \beta'v - \alpha'w\;, & w' &= -\beta v + \alpha w\,,\\ u_0' &= \sigma_0'v' + \tau_0'w' = u_0 + \gamma_0 v' + \gamma_0' w'\,, &&\\ u' &= \sigma'v' + \tau'w' = u + \gamma v' + \gamma' w'\,, && \end{aligned}$$

wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \gamma_0, \gamma_0'$ irgend welche ganze, nur der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ unterworfene, Zahlen bedeuten, so kann man die allgemeine Relation aufstellen:

$$(\mathfrak{E})\quad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = e^{((\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)\sigma_0 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\tau_0)\,2\pi i}\,\mathrm{Ser}_\varrho(u_0', u', v', w')\,,$$

welche unmittelbar aus den Relationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$, $(\mathfrak{E}_3)$ oder $(\mathfrak{E}')$, $(\mathfrak{E}'')$, $(\mathfrak{E}_3)$ folgt und aber auch diese sämmtlich in sich begreift.

Nimmt man $\gamma = \gamma' = 0$, so geht die Relation $(\mathfrak{E})$ in folgende über:

$$(\mathfrak{E}_0)\qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0', u', v', w')\,,$$

durch welche ausgesagt wird, dass $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ oder

$$\mathrm{Ser}_\varrho(\sigma_0 v + \tau_0 w, \sigma v + \tau w, v, w)$$

eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \infty (\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0, \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma_0', \alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \beta'v - \alpha'w, -\beta v + \alpha w)$$

ist, sobald nur für die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma_0, \alpha', \beta', \gamma_0'$ die Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ erfüllt ist. Aber es ist noch hinzuzufügen, dass hierbei, wie es die Gleichung $(\mathfrak{E}_0)$ erfordert, nur solche Systeme:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w)\,,\quad (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

genommen werden dürfen, für welche die Functionen Ser_ϱ im §. 3 $(\mathfrak{D})$ definirt sind, dass also alle diejenigen Systeme ausgeschlossen werden müssen, bei welchen auch nur eine der Grössen σ_0, τ_0 oder σ_0', τ_0' einen ganzzahligen Werth hat.

§. 8.

Die Summe:

$$\sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-N-k}^{n=+N+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}},$$

in welcher h, h', k, k', M, N positive Zahlen bedeuten und $N \geqq M$ vorausgesetzt wird, unterscheidet sich von der Summe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

durch das Aggregat von acht Summen:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

mit den Summationsbestimmungen:

$$-m = M+1, M+2, \ldots M+h\,; \; -n = 1, 2, \ldots M \quad \text{und } n = 0, 1, 2, \ldots M,$$
$$m = M+1, M+2, \ldots M+h'; \; -n = 1, 2, \ldots M \quad \text{und } n = 0, 1, 2, \ldots M,$$
$$-n = M+1, M+2, \ldots N+k\,; \; -m = 1, 2, \ldots M+h \text{ und } m = 0, 1, 2, \ldots M+h',$$
$$n = M+1, M+2, \ldots N+k'; \; -m = 1, 2, \ldots M+h \text{ und } m = 0, 1, 2, \ldots M+h'.$$

Der Werth jeder von diesen acht Summen nähert sich, wie aus den Gleichungen ($\mathfrak{C}$) im §. 3 hervorgeht, mit wachsendem M der Null, und es findet daher die Gleichung statt:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-N-k}^{n=+N+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}.$$

Da hierbei die Zahl N nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie nicht kleiner als M sein soll, so kann man auf der rechten Seite sowohl $N = M$ nehmen als auch zuerst N und dann M unendlich gross werden lassen. Es resultiren demnach, bei Anwendung der am Schlusse des §. 3 gegebenen Definition von $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, die beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{F}_0) \quad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} & \begin{pmatrix} -M-h \leqq m \leqq M+h' \\ -M-k \leqq n \leqq M+k' \end{pmatrix}, \\ \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} & \begin{pmatrix} -M-h \leqq m \leqq M+h' \\ -N-k \leqq n \leqq N+k' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die Grössen:

$$\sigma_0 \quad , \quad \tau_0 \quad , \quad v \quad , \quad w \quad , \quad m \quad , \quad n$$

durch:

$$\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \;\; \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \;\; \beta'v - \alpha'w, \;\; -\beta v + \alpha w, \;\; \alpha m + \beta n, \;\; \alpha' m + \beta' n,$$

wo α, α', β, β' ganze Zahlen bedeuten, für welche $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ ist, so behält, gemäss der Gleichung ($\mathfrak{E}'$) im §. 6 die Function $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ auf der linken Seite ihren Werth bei, und der Ausdruck unter dem Summenzeichen auf der rechten Seite bleibt formal ungeändert, während die Summation nunmehr in der ersteren von den beiden Gleichungen ($\mathfrak{F}_0$) auf alle diejenigen Systeme ganzer Zahlen (m, n) zu erstrecken ist, für welche die beiden Ungleichheitsbedingungen:

$$-M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \quad -M-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq M+k'$$

erfüllt sind, in der zweiten Gleichung ($\mathfrak{F}_0$) aber auf alle diejenigen Systeme (m, n), für welche:

$$-M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \quad -N-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq N+k'$$

ist. Mann kann dieses Resultat also durch die beiden allgemeineren Gleichungen darstellen:

$$(\mathfrak{F})\quad \begin{aligned} \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \\ -M-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq M+k', \\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) &= \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \\ -N-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq N+k', \\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

welche die Gleichungen ($\mathfrak{F}_0$) als speciellere (für $\alpha=\beta'=1$, $\alpha'=\beta=0$) mit umfassen und eine Haupteigenschaft der Function $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$ ausdrücken.

Da $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, gemäss der im §. 3 ($\mathfrak{D}$) gegebenen Definition, den Grenzwerth:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad (m, n=-M, -M+1, \ldots +M)$$

bedeutet, so kann das in den Gleichungen ($\mathfrak{F}$) enthaltene Resultat in folgender Weise formulirt werden:

I. Für alle verschiedenen ganzzahligen Systeme $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$, für welche weder $\alpha\sigma_0+\beta\tau_0$ noch $\alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0$ einen ganzzahligen Werth hat, nähert sich die Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \\ -M-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq M+k', \\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1 \end{pmatrix}$$

mit wachsendem M einem und demselben Werth.

II. Für alle bezeichneten Systeme $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ nähert sich die Summe:

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} -M-h \leqq \alpha m+\beta n \leqq M+h', \\ -N-k \leqq \alpha' m+\beta' n \leqq N+k', \\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1 \end{pmatrix},$$

wenn man zuerst N und alsdann M ins Unendliche wachsen lässt, einem und demselben Werth.

III. Beide Grenzwerthe sind mit einander identisch.

Denkt man sich die Systeme (m, n) durch Punkte in der Ebene repraesentirt, deren rechtwinklige Coordinaten die Zahlen m und n sind, so hat man im Falle I die Summation über alle innerhalb eines Parallelogrammes liegenden Punkte zu erstrecken, welches man beliebig annehmen kann, dessen Umfang man aber alsdann dergestalt ins Unendliche ausdehnen muss, dass dabei der Mittelpunkt fest bleibt und das Verhältniss der Seiten sich einer festen endlichen Grenze nähert. Im Falle II muss man dagegen das Parallelogramm, unter Festhaltung des Mittelpunktes, erst nach der einen und alsdann nach der anderen Dimension ins Unendliche ausdehnen.

§. 9.

Im §. 4 ist die Herleitung der beiden Transformationsrelationen $(\mathfrak{E}_1)$, $(\mathfrak{E}_2)$, aus welchen die allgemeinere Relation $(\mathfrak{E}')$ im §. 6 unmittelbar hervorging, in verschiedenartiger Weise erfolgt. Während die erstere Relation $(\mathfrak{E}_1)$ sich als eine einfache Consequenz der Definitionsgleichung ergab, musste bei der Herleitung der Relation $(\mathfrak{E}_2)$ nochmals auf den Integralausdruck, welcher der Entwickelung im §. 1 zu Grunde liegt, zurückgegangen werden. Man kann aber zu beiden Relationen $(\mathfrak{E}_1)$ und $(\mathfrak{E}_2)$ auf dieselbe einfache Weise gelangen, wenn man die im vorigen Paragraphen mit $(\mathfrak{F}_0)$ bezeichneten, aus den Gleichungen $(\mathfrak{E})$ im §. 3 resultirenden Gleichungen voranschickt.

Wie nämlich aus der ersteren der beiden Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{m=-M-h}^{m=+M+h'} \sum_{n=-M-k}^{n=+M+k'} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}}$$

unmittelbar die Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, -w, v)$$

folgt, wenn man in jener Gleichung:

$$h, h'\, k, k', \quad m, n, \quad \sigma_0, \tau_0, \quad v, w$$

in

$$k, k'\, h', h, -n, m, -\tau_0, \sigma_0, -w, v$$

verwandelt, so geht aus der zweiten der beiden Gleichungen $(\mathfrak{F}_0)$ zuvörderst, wenn man darin, wie es — da N zuerst ins Unendliche wächst — gestattet ist:

$$k = k_1 - gm, \quad k' = k_1' + gm$$

setzt, die Gleichung hervor:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} -M-h \leq m \leq M+h' \\ -N-k_1 \leq n \leq N+k'_1 \end{pmatrix},$$

und diese geht ferner, wenn

$$n+gm\,,\ \tau_0+g\sigma_0\,,\ v-gw$$

für

$$n\quad,\quad \tau_0\quad,\quad v$$

substituirt wird, in folgende über:

$$(\mathfrak{E}_2') \qquad \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v-gw, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w);$$

denn u_0 bleibt ungeändert, da:

$$u_0 = \sigma_0(v-gw) + (\tau_0+g\sigma_0)\,w = \sigma_0 v + \tau_0 w$$

ist. Die Gleichung $(\mathfrak{E}_2')$ führt nun ebenso unmittelbar, wie die Gleichung $(\mathfrak{E}_2)$, zu der allgemeinen Transformationsrelation $(\mathfrak{E}')$ im §. 6; sie selbst geht in $(\mathfrak{E}_2)$ über, wenn zuerst v in $-w$ und w in v verwandelt und alsdann, gemäss der Gleichung $(\mathfrak{E}_1)$

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0\,, u\,, -w-gv\,, v) \text{ durch } \mathrm{Ser}_\varrho(u_0\,, u\,, v\,, w+gv)$$

und

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0\,, u\,, -w\,, v) \text{ durch } \mathrm{Ser}_\varrho(u_0\,, u\,, v\,, w)$$

ersetzt wird.

Für $\rho = 0$ stimmt der in der zweiten Gleichung $(\mathfrak{F})$ enthaltene Grenzwerth mit demjenigen überein, durch welchen im §. 7 des art. XX die Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ definirt, und welcher a. a. O. mit $(\mathfrak{S}_0)$ bezeichnet worden ist.

§. 10.

Im §. 2 ist gezeigt worden, dass sowohl der reelle als auch der mit i multiplicirte Theil des Werthes der Summe:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \sum_{m,n} \frac{e^{(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\,2\pi i}}{(u+\varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} m = m_0\,,\ m_0+1, \ldots m_0+h-1, \\ n = n_0\,,\ n_0+1, \ldots n_0+k-1 \end{pmatrix}$$

absolut kleiner ist als:

$$\frac{G^2\Gamma(1+\rho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0)^{1+\rho}}.$$

Dabei waren die reellen positiven Grössen G, a_0, b_0 nur durch die Werthe von σ_0, τ_0, v, w bestimmt, und einzig und allein bei der Bestimmung der reellen (positiven oder negativen) Grösse c_0 kam der Werth von u in Betracht.

Setzt man $u = (u_0 + u_1 i) v$, so ist gemäss den im §. 1 gegebenen Bestimmungen:

$$c_0 + c_1 i = (u_0 + u_1 i)\left(2\varepsilon_0 \psi + (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon' \phi i\right),$$

also:

$$c_0 = 2\varepsilon_0 u_0 \psi - (2\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon' u_1 \phi.$$

Man kann daher, wenn der Werth der complexen Variabeln u innerhalb eines bestimmten endlichen Gebiets $\mathfrak{G}$ bleibt, stets eine Grösse $-\mathfrak{p}$ finden, unter welche der Werth von c_0 nicht sinkt, und der Werth der Summe $(\mathfrak{A})$ ist dann für alle innerhalb jenes Gebiets bleibenden Werthe von u absolut kleiner als:

$$\frac{G^2 \Gamma(1+\rho)}{(a_0 m_0 + b_0 n_0 - \mathfrak{p})^{1+\varrho}}.$$

Dabei müssen m_0, n_0 so gross sein, dass $a_0 m_0 + b_0 n_0 - \mathfrak{p}$ positiv wird.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Reihe:

$$\sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{m=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\varrho}},$$

als Function von M und u, mit $F(M, u)$, so kann man, gemäss der obigen Auseinandersetzung, M so gross wählen, dass für alle innerhalb eines gegebenen Gebiets $\mathfrak{G}$ liegenden Werthe der complexen Variabeln u der Werth der Differenz:

$$F(M+r, u) - F(M, u)$$

für jede, noch so grosse, Zahl r unter einer vorgeschriebenen festen Grenze bleibt, sobald nur das Gebiet $\mathfrak{G}$ keinen der von vorn herein ausgeschlossenen Werthe enthält, für welche einer der Nenner $u + mv + nw$ gleich Null wird. Die Reihe $\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$, wie sie durch die Gleichung $(\mathfrak{D})$ im §. 3 definirt ist, convergirt hiernach für alle innerhalb $\mathfrak{G}$ liegenden Werthe von u gleichmässig.

Nach diesen Vorbemerkungen erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$(\mathfrak{G}) \quad (1+\rho)\int_u^{u_1} \mathrm{Ser}_{1+\varrho}(u_0, u, v, w)\,du = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) - \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u_1, v, w),$$

da man hierin überall für die unendlichen Reihen $\mathrm{Ser}_{1+\varrho}$, Ser_ϱ die endlichen, durch die Summationsbedingungen:

$$-M \leq m \leq M, \quad -M \leq n \leq M$$

begrenzten Reihen nehmen und dabei M so gross wählen kann, dass für alle auf dem Integrationswege liegenden Werthe von u der Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Reihen, sowohl für ρ als auch für $1+\rho$, unter einer vorgeschriebenen festen Grenze bleibt.

Lässt man in der Gleichung ($\mathfrak{G}$) die Integrationsgrenzen an einander rücken, so resultirt die Gleichung:

$$(\mathfrak{G}') \qquad \frac{\partial \operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)}{\partial u} = (1+\rho) \operatorname{Ser}_{1+\rho}(u_0, u, v, w);$$

die Function $\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ hat also, als Function der complexen Variabeln u betrachtet, Differentialquotienten aller Ordnungen, und diese haben endliche Werthe, sobald nur nicht beide durch die Gleichung $u = \sigma v + \tau w$ definirten reellen Grössen σ, τ ganzzahlige Werthe haben.

Es ist hiernach $\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$, für $\rho = 0$ und für jede positive ganze Zahl ρ, eine Function von u mit folgenden Eigenschaften:

> sie selbst und ihre Differentialquotienten sind für alle Werthe von u, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, für welche die Gleichung $u + mv + nw = 0$ in ganzen Zahlen m, n erfüllbar ist, eindeutig und endlich, und der Grenzwerth, welchem sich das Product:
>
> $$(u + mv + nw)^{1+\rho} \operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$$
>
> nähert, wenn man $u + mv + nw$ gleich Null werden lässt, ist gleich $e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}$.

Weiss man nun von einer Function $F(u)$, dass ihr eben dieselben Eigenschaften zukommen, und zwar in der Weise, dass die Differenz $F(u) - \operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ für alle Werthe der Variabeln u unter einer bestimmten Grösse bleibt, so erschliesst man unmittelbar aus dem Cauchy'schen Theorem, dass $F(u)$ mit $\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ identisch ist.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, nehme ich zuvörderst für $F(u)$:

$$\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v', w') \qquad (v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w),$$

oder also:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m', n'} \frac{e^{(n'\sigma_0 - m'\tau_0)2\pi i}}{(u + m'v + n'w)^{1+\rho}} \qquad \left(\begin{matrix} m' = \beta' m - \beta n,\ n' = -\alpha' m + \alpha n, \\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \end{matrix}\right).$$

Da mittels der Relation ($\mathfrak{E}_3$) im §. 7 sowohl $\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ als auch $\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v', w')$ auf solche Functionen Ser_ρ reducirt werden können, in welchen das Argument u, wenn es auf die Form $\sigma v + \tau w$ gebracht ist, nur Grössen σ, τ enthält, die absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, und da für solche Werthe von u der absolute Werth jeder der beiden Reihen:

$$\operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v, w), \quad \operatorname{Ser}_\rho(u_0, u, v', w'),$$

nach Abtrennung des in beiden vorkommenden Gliedes $\frac{1}{u^{1+\rho}}$, unter einer nach §. 1 und §. 2 zu bestimmenden Grenze bleibt, so ist dies

auch für die Differenz der beiden Reihen der Fall, und man erschliesst also hieraus unmittelbar die allgemeine Transformationsformel ($\mathfrak{C}'$):

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v', w'),$$

welche im §. 6 auf andere Weise hergeleitet worden ist.

Ich nehme zweitens $\rho = 0$ und für $F(u)$ die im §. 8 des art. XX mit $\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$ bezeichnete Function, welche im Anfange des citirten Paragraphen durch den Ausdruck dargestellt ist:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

wo, wie dort, der mit i multiplicirte Theil von $\frac{w}{r}$ positiv vorausgesetzt wird.

Aus der für zwei beliebige ganze Zahlen s, t bestehenden Relation:

$$(\mathfrak{H}) \qquad \vartheta\left(\frac{u+sv+tw}{v}, \frac{w}{v}\right) = e^{-(t^2w+2tu+sv+tv)\frac{\pi i}{v}} \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$$

ist schon im §. 9 des art. XX die Gleichung hergeleitet worden:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u+sv+tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\, \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

und es findet ebenso, gemäss der Relation ($\mathfrak{C}$) im §. 7 dieses art. XXI, für die Function $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ die Gleichung statt:

$$\mathrm{Ser}(u_0, u+sv+tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\, \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w).$$

Man braucht daher, um die Endlichkeit der Differenz:

$$(\mathfrak{K}) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) - \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$$

für beliebige Werthe des Arguments u nachzuweisen, nur darzuthun, dass diese Differenz, ihrem absoluten Werthe nach, stets unter einer zu bestimmenden festen Grenze bleibt, wenn man sich auf solche Werthe von u beschränkt, bei welchen die beiden durch die Gleichung:

$$u = \sigma v + \tau w$$

bestimmten reellen Grössen σ, τ absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Für solche Werthe von u bleibt aber, wie aus der Productentwickelung der im Nenner des Ausdrucks ($\mathfrak{B}$) enthaltenen ϑ-Function $\vartheta\left(\frac{u}{r}, \frac{w}{r}\right)$ erhellt, die Differenz:

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, r, w) - \frac{1}{u},$$

ihrem absoluten Werthe nach, stets unter einer zu bestimmenden festen Grenze. Eben dasselbe findet, wie schon oben ausgeführt worden ist, für die Differenz:

$$\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) - \frac{1}{u}$$

statt. Da hiernach auch der absolute Werth der Differenz ($\mathfrak{K}$) unter einer zu bestimmenden festen Grenze bleibt, so erschliesst man nunmehr mittels des Cauchy'schen Theorems jene Hauptgleichung:

$$(\mathfrak{L})\qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w)$$

oder:

$$(\mathfrak{L}')\qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

welche schon im art. XX auf zwei verschiedene Arten hergeleitet worden ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, bei der vorstehenden höchst einfachen Verification der Gleichung ($\mathfrak{L}'$), von den Eigenschaften der ϑ-Function nur ihre Productentwickelung und die oben mit ($\mathfrak{H}$) bezeichnete Relation, von den Eigenschaften der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ nur ihre Convergenz und die im §. 7 mit ($\mathfrak{E}$) bezeichnete Relation gebraucht worden ist.

Die Formeln ($\mathfrak{L}$) und ($\mathfrak{L}'$) können, wenn man von der oben über das Vorzeichen von $\frac{wi}{v}$ gemachten Voraussetzung abstrahirt, mit Hülfe der zweiten von den Gleichungen ($\mathfrak{E}_4$) im §. 7, in folgender Weise dargestellt werden:

$$(\mathfrak{M})\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \mathrm{Atr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w),\\ &\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0+u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},\end{aligned}$$

wobei ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{w}{v}$ bedeutet, und es erhellt aus der obigen Formel ($\mathfrak{G}'$), dass der Werth der Reihe:

$$\mathrm{Ser}_\varrho(u_0, u, v, w)$$

für beliebige positive ganzzahlige Werthe von ϱ durch den Coefficienten von z^ϱ in der Entwickelung des Ausdrucks:

$$\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u-z, v, \varepsilon w),$$

oder:

$$\frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau_0(u-z)\pi i}{v}}\, \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0+u-z}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u-z}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

nach steigenden Potenzen von z, dargestellt wird.

Hierbei kann auch von der Beschränkung der Grössen σ_0, τ_0 auf nicht-ganzzahlige Werthe abgesehen werden, wenn man unter

$$\mathrm{Ser}_\varepsilon(u_0, u, v, w),$$

für ganzzahlige Werthe von σ_0, den Grenzwerth:

$$\lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varepsilon(u_0+\delta v, u, v, w),$$

für ganzzahlige Werthe von τ_0, den Grenzwerth:

$$\lim_{\delta=0} \mathrm{Ser}_\varepsilon(u_0+\delta w, u, v, w)$$

versteht.[1] Die complexen Grössen u_0, u, v, w sind demgemäss nur der Beschränkung unterworfen, dass die beiden ϑ-Functionen:

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right), \quad \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

von Null verschieden, also die beiden Gleichungen:

$$u_0+mv+nw=0, \quad u+mv+nw=0 \qquad (u_0=\sigma_0 v+\tau_0 w)$$

nicht in ganzen Zahlen m, n erfüllbar seien.

[1] Vergl. die Ausführungen in §. 5 und §. 6.

(Fortsetzung folgt.)

Ausgegeben am 27. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1890.

XVII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

27. März. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Hirschfeld las: Über einige Daten der römischen Kaiserzeit.



Zur Geographie des assyrischen Reichs.

Von Eb. Schrader.

(Vorgetragen am 5. December 1889 [s. Sitzungsberichte 1889 S. 1081].)

I.

Vor längerer Zeit habe ich an dieser Stelle gelegentlich einer Untersuchung über »die Namen der Meere in den assyrischen Inschriften« (s. Abhdll. der K. Akad. d. W. a. d. J. 1877, Berlin 1878 S. 169 ff.) unter Anderm auch die Frage erörtert, ob in den assyrischen Inschriften das »Schwarze Meer« erwähnt sei (a. a. O. 181 ff.). Ich erörterte die verschiedenen Möglichkeiten, mich schliesslich dahin entscheidend, dass dem nicht so sei, dass vielmehr die Assyrer dieses Meeres keine Erwähnung thun, auch da nicht und gerade da nicht, wo sie von Zügen berichten, die — nach den sonstigen geographischen Andeutungen — noch am weitesten nach dem Norden und in die Nähe dieses Meeres führten. Inzwischen ist dieser Frage wiederholt seitens der Fachmänner oder aber Historiker die Aufmerksamkeit zugewandt und namentlich ist es ein auf dem hier in Betracht kommenden Gebiete als besonders bewandert bekannter Gelehrter, Eduard Meyer, welcher diese Frage von Neuem aufgeworfen hat, dabei zu einem dem des Vortragenden entgegengesetzten Resultate gelangend.[1] Nachdem dazu inzwischen die historischen Inschriften der Assyrer in neuer Durcharbeitung und in chronologisch geordneter Folge übersichtlich vorgelegt sind (in Bd. I und II der von mir mit mehreren jüngeren Fachgenossen herausgegebenen »Keilinschriftlichen Bibliothek«); nachdem nicht minder auch sonst gerade die geographischen Fragen, wie sie die assyrischen Inschriften uns vorlegen, Gegenstand eingehenderer Untersuchungen geworden sind, scheint der Zeitpunkt gekommen zu sein, auch die oben skizzirte Streitfrage von Neuem einer Erörterung zu unterziehen. Es mag mir verstattet sein, solches im Folgenden zu thun.

[1] Ed. Meyer, Gesch. des Alterthums I S. 273 Anm. (S. 331); vergl. dazu C. P. Tiele, babylon.-assyr. Gesch. II, 614 (zu S. 163, 23); F. Hommel, Gesch. Babyloniens-Assyriens S. 526 flg; A. Delattre, encore un mot sur la géographie Assyrienne (Brux. 1888) p. 1 ss.

Dass zunächst die Assyrer irgendwie und irgendwann während des Bestandes ihres Reiches bis an das Schwarze Meer oder bis in seine nächste Nähe vorgedrungen sind, darüber kann auch für uns nicht der geringste Zweifel sein. Entpuppt sich auch des Ktesias Aussage von einem einst bestanden gewesenen grossen Assyrerreiche des Ninus und der Semiramis, das ganz Kleinasien umfasst und sich somit auch bis an das Schwarze Meer und bis zum Kaukasus erstreckt hätte, als eine einfache Rückübertragung des Machtbereichs der persischen Achämeniden-Könige auf die Assyrer und ihr Reich (KGF 495), so lassen nicht bloss die Sagen der Griechen und die Angaben der Periegeten über das Vorhandensein von Syrern (Σύροι, Σύριοι), d. h. aber natürlich von Ἄσσυροι, Ἀσσύριοι (Th. Nöldeke) am Pontus und in der Gegend von Sinope, jedenfalls seit dem 8. Jahrhundert, keinen Zweifel, sondern wir besitzen in den assyrischen Inschriften selber, insbesondere in denen König Sargon's (722—705), die bestimmtesten Aussagen der Assyrer über die Besetzung der Provinz *Kammanu-Chammanene*, durch die letzteren und zwar dieses im 10. *palû* oder Regierungsjahre Sargon's, das ist im Jahre 712 v. Chr. (siehe Annalen 182. 188 (jetzt bei Winckler, Sargon 32. 33), vergl. mit 178). Dass diese Gebiete im Norden Kleinasiens auch über die Zeit Sargon's nicht bloss, sondern auch Sanherib's und Asarhaddon's hinaus bis in die Regierung Aśur-bâni-abal's-Sardanapal's im Besitze der Assyrer verblieben, schliesse ich, obgleich wir keinerlei Notizen in den Inschriften darüber haben, aus dem Umstande, dass die Kimmerier — doch wohl von Sinope aus — einen Versuch machten, Asarhaddon aus den von ihm besetzt gehaltenen Gebieten zu vertreiben, ein Versuch, der aber von Asarhaddon (Cyl. col. II, 6—9) zurückgewiesen wurde — mit welchem Erfolge, erhellt indirect daraus, dass sich die Kimmerier seitdem westwärts wandten, wo sie mit Lydien in Berührung kamen, dessen König Gugu-Gyges dem begreiflicherweise dabei indirect sehr betheiligten Assyrerkönig zwei gefangene assyrische Kimmerierhäuptlinge zuführen liess (Cyl. II, 108 flg. s. KB. II, 175).[1]

Würde es sich also bei dieser Sachlage nicht bloss vollständig begreifen, sondern geradezu erwarten lassen, dass die Assyrer wenigstens in dieser Zeit auch mal das Schwarze Meer, bis zu welchem oder bis in dessen Nähe sie in diesem Jahrhundert (von 722 bis 626) denn

[1] Aus der Zeit der Regierung dieses Assyrerkönigs, der 42 Jahre über Assur das Scepter führte, wird auch die, sei es durch die ionischen Griechen, sei es über Sinope vermittelte Bekanntschaft der Griechen mit dem Namen »Sardanapal«, d. h. mit dem Namen des Aśur-bâni-abal stammen, des einzigen Königs der Assyrer, dessen Name — abgesehen von dem durch Herodot, doch wohl von den Aegyptern her, ihnen bekannt gewordenen Namen Σαναχάριβος-Sanherib — zu den Griechen gedrungen ist (KGF 522).

doch zweifelsohne wiederholt gekommen sind, Erwähnung thäten, so ist dem wiederum in Wirklichkeit gerade nicht so. Weder bei Sargon, noch auch bei einem seiner Nachfolger, bei keinem Sargoniden überhaupt findet sich auch nicht ein einziger Meeresname, der sich irgendwie auf jenes sich beziehen liesse. Ich kann mir dieses nur so erklären, dass die Assyrer zwar im Binnenlande, das assyrische Stammreich im Rückhalt, ihre Herrschaft in den Provinzen Kammanu, Kappadocien u. s. w. zu behaupten vermochten, dass sie aber — aus leicht zu erschliessenden Gründen — nicht im Stande waren, die Seestädte, z. B. Sinope, wohl überhaupt nicht die Küste zu besetzen bezw. zu halten. Hätte Sargon auf seinem Siegeszuge nach dem Norden das Schwarze Meer erreicht — er hätte uns das sicher nicht verschwiegen, er, der uns das Mittelländische Meer und den Persischen Meerbusen als West- und Ostmeer so bestimmt bezeichnet. Ähnliches gilt von seinen Nachfolgern.

Wenn aber nun bereits diese Könige mit ihrer festgegründeten Macht, so schliessen wir, nicht bis zu dem fraglichen Meere selber vorzudringen vermochten und deshalb auch dieses Meeres keiner Erwähnung thun, wird man vollends von vornherein Zweifel hegen, dass dieses seitens der früheren Könige, deren andauernde Macht sich unter allen Umständen nicht entfernt so weit nach Nordwesten erstreckte, geschehen sei. Allerdings lässt sich ja theoretisch wohl annehmen und kann es nichts weniger denn als unmöglich bezeichnet werden, dass bereits auch ein früherer Herrscher gelegentlich eines Eroberungszuges bis in jene fernen Gegenden vorgedrungen sei, vielleicht das Küstengebiet am Schwarzen Meere zeitweilig occupirend, während diese Besitzungen dann später wieder verloren gegangen und seitdem dem Machtbereich der Assyrer entzogen geblieben wären. Ich würde, meine ich, damit etwa die Ansicht EDUARD MEYER's umschrieben haben. Die uns durch die Inschriften bekannt gewordene Entwickelung der assyrischen Macht scheint mir indess dieser Annahme nicht günstig zu sein. Soweit wir diese Entwickelung verfolgen können, haben wir es bei dem assyrischen Staate mit einem ganz allmählichen, zeitweilig wohl gehemmten, aber doch im Grossen und Ganzen stetigen Fortschreiten der Macht zu thun. Es werden Vorstösse über das bisher besessene oder dauernd occupirte Grenzgebiet hinaus gemacht, das betreffende Gebiet gebrandschatzt, im Übrigen dieses in seiner Selbständigkeit nicht weiter beschränkt; das Heer selber geht wieder über die Grenzen zurück. Im nächsten oder in einem der nächsten Jahre werden diese Züge wiederholt und so die betreffenden Staaten mehr und mehr geschwächt und allmählich in eine irgendwie beschaffene Abhängigkeit von Assyrien gebracht, um schliesslich — aber oft erst nach langen Jahren — dem assyrischen Reiche einverleibt, d. h. nach

Einsetzung von assyrischen Statthaltern in eine assyrische »Provinz« verwandelt zu werden (*ana miṣir* [*mâtu*] *Aššur utirra:* »zum Gebiete Assyriens schlug ich es [das betreffende Land])«. Sind diese Vorstösse oft auch sehr weitreichende — man denke an Ašur-nâsir-abal's Westzug bis an das Mittelmeer und in das phönicische Küstengebiet, während die Westgrenze des assyrischen Reichs im engeren Sinne zu seiner Zeit den Euphrat nicht überschritt, — so sind sie doch keineswegs unvorbereitete und etwas ganz Aussergewöhnliches an sich tragende. Die Strasse oder die Strassen zwischen dem Euphrat und dem Mittelmeere, bez. Palästina waren seit uralters die begangensten in dem hier in Betracht kommenden Theile des vorderen Orients. Von Heereszügen, die von Osten nach dem Westen und umgekehrt auf derselben unternommen wurden, erfahren wir aus den frühesten Zeiten: ein Vorstoss, wie derjenige Ašur-nâsir-abal's in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts oder derjenige Tiglath-Pileser's I. am Ende des 12. Jahrh. (Jagdobelisk; Sebeneh-Su) hat nichts Überraschendes. Wie ganz anders aber steht es mit einem Zuge dieses selben, letzteren Königs von Ašur = Kal'at-Scherkat im südöstlichen Mesopotamien an das Schwarze Meer? — Gerade das, was zu Zügen nach dem Westen und Südwesten einlud, danach suchen wir bei einem Zuge von Ašur nach meinetwegen Trapezunt oder gar Sinope vergeblich. Anstatt der breiten, begangenen und bequemen Heerstrassen dort hat hier der Wanderer, hat das Saumthier schmale, steile Gebirgspfade zu beschreiten; Züge, Heereszüge sind hier nur mit einem erheblichen Kräfteaufgebot und unter Anwendung ausserordentlicher Mittel in's Werk zu setzen. Ein derartiges Kräfteaufgebot erscheint nur dann gerechtfertigt und erklärlich, wenn es sich um einen hohen Preis, um einen grossen Lohn handelt. Ein solcher aber winkte dem Assyrerkönige weder in diesem, dazumal vermuthlich ebenso wüsten und öden armenischen Berglande wie heute, nicht. Allenfalls hätte, wie heute, so dazumal vielleicht die Gegend um Erzerum einen Reiz für den Assyrerkönig gehabt. Aber darum hätte der Assyrer diese Mühseligkeiten sich und seinem Heere zugemuthet, die unvermeidlich waren, der König mochte mit seinen Truppen den Weg über Bitlis-Mûsch oder den westlicheren von Palu aus über Melikhan wählen? — Das scheint denn doch wenig glaublich. Und nun vollends ein Zug von Erzerum über die von West nach Ost streichenden Gebirgsketten und Querthäler bis an's Meer, Gebirgsketten, die bis auf 8000, 9000, 10000 Fuss ansteigen![1] Solche Wege schlägt man mit einem Heere

[1] Auf der Kiepert'schen Specialkarte finde ich dem Kop-Dagh, bez. Gök-Dagh, nordwestlich von Erzerum, die Höhenzahl 8320, dem Bingöl-Dagh, südlich von Erzerum, die Zahl »etwa 10000« beigeschrieben, während Palu's Höhe auf 3100, die

wohl in der Noth, in der Verzweiflung ein — ohne zwingenden Grund aber wird man sich sonst dazu schwerlich verstehen.

Aber vielleicht hat der König das Meer auf einer ganz anderen Route erreicht, indem er nicht direct nach dem Norden aufstieg, sondern — sich von vornherein mehr westlich haltend, sei es südlicher über Nisibis-Mardin nach Amid-Diârbekr aufsteigend, sei es nördlicher über Niniveh-Mosul am Tigris entlang ebenfalls nach Amid zu den Zug richtend, über Milid-Malaṭia in Kappadocien einzufallen, dieses zu durchziehen und so nach dem Küstengebiet des Schwarzen Meeres zu gelangen. Der Zug wäre kühn und für diese Zeit (etwa 1100 v. Chr.) einigermaassen überraschend und unwahrscheinlich; als unmöglich könnte man ihn natürlich nicht bezeichnen, und die Terrainschwierigkeiten wären erheblich geringere[1]. So fragt sich nun: lässt sich aus der Inschrift des Königs und aus seiner Darstellung des betreffenden Zuges nicht entnehmen, welche der beiden in Betracht kommenden Routen er einschlug — die östlichere, indem er direct nach dem Norden aufstieg, oder, sich von vornherein wesentlich westwärts wendend, die westlichere, die durch Kappadocien führte? — Prüfen wir hierzu den Bericht des Königs (Prismainschr. Tigl. Pil's I Col. IV, 43—V, 41), für den Wortlaut und sein Verständniss jetzt auf »Keilinschriftliche Bibliothek« I S. 28—33 verweisend.

Gemäss IV, 43 ff. zieht der König auf unwegsamen Pfaden und über steile Pässe, die kein König vorher kannte, 16 gewaltige Berge übersteigend, Bäume fällend, Brücken schlagend, nordwärts »nach Ländern ferner Könige am Gestade des oberen Meeres, die die Unterwerfung nicht kannten«. 23 Könige dieser Gegenden ziehen ihm entgegen; »er besiegt sie, erobert 120 ihrer Streitwagen. 60 Königen der Naïriländer, sammt denjenigen, die ihnen zu Hülfe gekommen, setzt er nach bis zum »oberen Meere«, ihre Städte erobernd und reiche Beute machend; schliesslich wird bemerkt, dass der Grosskönig alle Könige der Naïriländer lebend gefangen genommen, aber Gnade ihnen bewilligt und den Eid der Treue für ewig sie habe schwören lassen (IV, 49—V, 21). Schon die letztere Stelle in ihrem so bestimmten Wortlaute: »ich liess sie den Eid der grossen Götter für die Zukunft der Tage, für den Tag der Ewigkeit zur Unterthänigkeit schwören«, lässt darauf schliessen, dass wir es mit einem Gebiete zu thun haben, das irgendwie eine Aussicht bot, auch später von den Assyrern behauptet und in Unterwürfigkeit gehalten zu werden. Dass

---

von Mûsch auf 4200 Fuss, die endlich von Erzerum selber auf 5800 (6100) angegeben wird. A. PETERMANN auf seiner Karte bietet für Erzerum 5735, für Erzingian 4590, für den Bingöl-Dagh 11550 Fuss.

[1] Vergl. DELATTRE, encore un mot (1888) p. 13.

ein von Assyrien gänzlich losgelöstes, fern am Schwarzen Meere belegenes Gebiet, unter einen solchen Gesichtspunkt nicht fallen kann, liegt auf der Hand. Schon früher habe ich ferner darauf hingewiesen, dass der in Rede stehende Zug seitens des Königs ganz ausdrücklich und von vornherein als ein »Zug gegen ferne Könige am Gestade des oberen Meeres« bezeichnet wird, also als ein Zug nach einem von vornherein bestimmten und insofern bekannten Gebiete, also auch an ein sonst wohl bekanntes Meer: nicht zufällig auf seinen Zügen gelangt der König in dieses Gebiet, sondern dieses Gebiet ist von vornherein Zweck und Ziel seiner Unternehmung. Dass dieses Ziel eines Kriegszugs für einen südlich von Ninivch in Ḳal'at-Scherkat = Ašur residirenden König das pontische Küstengebiet sollte gewesen sein, wird schwerlich Jemand für wahrscheinlich erachten: da lagen denn doch andere Gebiete — man denke an das Gebiet der Araxes-Ebene = Urarṭu viel mehr im Gesichtskreise des Assyrers, und ein Zug an diesem sicherlich schon damals mächtigen Urarṭu-Lande und Staate westlich vorüber nach der Küste wäre ohnehin gewiss nicht ohne Bedenken gewesen. Die Nichterwähnung von Urarṭu bei der Aufzählung der Verbündeten ist jedenfalls nicht zu übersehen (vergl. unten).

Man beachte ferner die Bezeichnung »oberes Meer«. Wie gross oder wie klein immer sich die Assyrer das Schwarze Meer mögen vorgestellt haben: dass sie es würden in der Bezeichnung und Werthschätzung deshalb nicht unter den persischen Meerbusen heruntergesetzt haben, darf vorausgesetzt werden. Consequent nun bezeichnen sie, analog wie das Mittelländische Meer d. i. »die grosse See der untergehenden Sonne«, diesen als die »grosse See der aufgehenden Sonne«, d. i. als das grosse Ostmeer. Demgemäss erwartete man — da der Ausdruck »obere See« (und untere See) sonst sicher für den Vân-See und Urumia-See vorkommen, — für das Schwarze Meer eine Bezeichnung zum Mindesten wie »das obere grosse Meer« oder ähnlich. Nach diesem Epitheton »gross« aber suchen wir in diesem Berichte an beiden Stellen, wo des betreffenden Meeres Erwähnung geschieht (IV, 50; 100), vergeblich.

Wir lesen des Ferneren IV, 96 ff., dass der Assyrer 60 Königen der Naïri, sammt denen, die ihnen zu Hülfe gekommen, »bis zum oberen Meere« nachgesetzt habe. Die Könige, die (für die Assyrer) diesseit des »oberen Meeres« wohnten, und die er bekriegt und besiegt hatte, werden hier als »Könige von Naïri« bezeichnet; sie werden also da gewohnt haben, wo das Land Naïri belegen. Ich glaube nun bereits vor Jahren (KGF. 179 ff.) nachgewiesen zu haben, dass die Assyrer mit dem Namen Naïri — ursprünglich Name des nordnordöstlich von Ninivch belegenen Gebietes Ḫubuškia — später alle vom

Standpunkte des Assyrers dahinter liegenden Gebiete bis in die Gegend des Kaspischen Meeres hin, aber auch nördlich bis über den Murâd-Su oder Arsanias hinaus bezeichneten, das eigtl. L. Urarṭu, d. h. die Araxesebene aber stets ausgeschlossen. Der Begriff Naïri weist uns ferner ganz entschieden nach dem Nordosten, nicht nach dem Nordwesten, den Standpunkt in Aŝur-Niniveh genommen, wenn auch die Ausdehnung des Naïri-Gebietes nach Westen zu sich nicht scharf bestimmen und begrenzen lässt. Jedenfalls gehörte das Quellgebiet des Tigris mit der Stadt Tushan, sowie Ami'd-Diârbekr mitsammt der Landschaft Kaŝijari nicht mehr zu Naïri, das vielmehr östlich davon lag (KGF. a. a. O.). Das Schwarze Meer nun aber weist uns für den assyrischen Standpunkt nicht nach dem Nordosten, denn vielmehr nach dem Nordwesten. Nun wissen wir dazu, dass sicher die Assyrer den Vân-See als das »obere Meer des Landes Naïri«, den Urumia-See als das »untere Meer des Landes Naïri« sonst bezeichneten (s. Abhandlung über die Meere 192 flg.); dass sie ferner (Ŝamŝi-Rammân) den Vân-See durchweg auch »Meer des Westens« nannten (a. a. O. 184 ff.), und da sollte plötzlich mit diesem »oberen Meer« (Tigl. Pil. V, 96—100), bezw. »oberen Meer des Westens« (VI, 43 f.) nicht der Vân-See, sondern das »Schwarze Meer« gemeint sein?

Bereits 1878 habe ich darauf hingewiesen (Abhandlung über die Namen der Meere S. 184), dass die bei Aufzählung der von Tiglath-Pileser I. besiegten 23 Könige der Naïri-Länder beginnenden bezw. sie schliessenden beiden Völker der *Nummi'* (Nimmi') und *Dajai'ni* (Daiai'ni) für die Begrenzung des hier unter Naïri-Länder begriffenen Gebietes von erheblicher, wenn nicht entscheidender Wichtigkeit seien. Von diesen beiden Gebieten muss *Dajai'ni* gemäss der Monolith-Inschrift Salmanassar's II. Col. II, 45—55 zwischen dem Gebiete von I'nziti-Anzitene, das diesseit des Murâd-Euphrat-Arsanias zu suchen, und dem Urarṭu-Lande gegenüber (s. vorhin), also gegen den Vân-See zu belegen gewesen sein (gegen A. Delattre, encore un mot, 1888 p. 7 ss.). Das Land *Nummi'* (Nimmi') sodann, welches die Aufzählung der Gebiete der 23 Naïri-Könige eröffnet, erscheint bei Aŝur-nâṣir-abal I, 54 ff. als in unmittelbarster Nähe von Kirruri, am westlichen Ufer des Urumia-See's belegen (geg. Del. l. c.). Zwischen Nummi' im Osten und den Dajai'ni im Westen werden wir somit die übrigen der 23 Könige zu suchen haben: mit anderen Worten das von Tiglath-Pileser in Aussicht genommene Gebiet wird sich vom Urumia-See im Osten und meinetwegen dem heutigen Palu am Murâd-Arsanias im Westen hin erstreckt haben, aber zugleich so, dass Urarṭu nördlich gänzlich ausserhalb des Ringes belegen bleibt. Im Mittelpunkt dieses Naïri-Gebietes liegt aber mitten drinnen das »obere Meer des Landes Naïri«

(Cap. 12, 14 ff., s. Abhdlg. 192)[1]. Für das Schwarze Meer bleibt in dieser ganzen Betrachtung kein Platz und Raum.[2]

---

[1] Ehe er in dieses Naïri-Gebiet gelangt, hat der König 16 Gebirge (»gewaltige Berge«) zu übersteigen und danach erst noch den Euphrat zu überschreiten (Col. IV, 58—70, 71). Es ist klar, dass diese Gebirge am linken Ufer des Euphrat zu suchen, d. h. südlich vom Murâd-Arsanias (= östlicher Euphrat), also im Wesentlichen im Gebiete von Kirḫi, dem heutigen Kurdengebiete, nördlich und links vom Tigris, zwischen Tigris und Murâd, d. i. in jenem Gebiete, von dem uns Moltke in seinen »Briefen über Zustände und Angelegenheiten in der Türkei«, Berlin 1876, eine so anschauliche Schilderung gerade in militärischer Hinsicht gegeben hat. Dieses Gebirgsland von Süd nach Nord durchziehend, von Bitlis etwa über Mûsch an den Euphrat gelangend, hier diesen überschreitend, trifft der König — man kann denken in der Gegend von Khynys — auf die vom Süd- und Nordufer des Vân-See's herbeieilenden und ihn erwartenden Naïri-Könige. Nach ihrer Besiegung dringt er weder weiter nördlich, wo er unzweifelhaft mit Urarṭu in Conflict gerathen wäre, noch auch östlich vor, sondern wendet sich, einfach dem Laufe des Euphrat-Murâd folgend, westlich, um alsdann auf wohlbekannten und vielbetretenen, darum nicht weiter im Speciellen angegebenen Wegen, etwa über Palu-Kharput, vielleicht auch auf einer nördlicheren Route, nach Malaṭia in der Südostecke Kappadociens zu gelangen (V, 33; beachte die Erwähnung der Dajai'ni V, 22!). Nicht zu übersehen ist bei dieser ganzen Darstellung, dass nach Erwähnung der Überschreitung des Burattu-Euphrat (IV, 71) von der Übersteigung irgend eines Gebirges keine Rede mehr ist. Ein Zug aber von Erzerum oder gar von Khynys aus bis an's Schwarze Meer ist ohne Überschreitung gewaltiger Gebirge (Bingöl-dagh 10—11000'! Kop-d.; Gök-d. u. s. w.) bez. Flüsse gar nicht denkbar. Damit dürften auch C. P. Tiele's Bedenken (Bab. ass. Gesch. I S. 163) sich erledigen.

[2] Tiele versteht »das obere Meer des Westens« (VI, 43 s. o.) von dem Mittelländischen Meere (a. a. O. 164) und begründet dieses durch den Hinweis darauf, dass Tigl. Pil. ja doch Städte westlich vom Euphrat erobert habe und dass die von ihm bekämpften Kaskâja zu den Ḫattai gehört hätten (II, 100). Aber die hier gemeinten westlich vom Euphrat belegenen Städte waren ja gemäss V, 45 »Uferstaaten der Aramäer«, wie dazu durch die Erwähnung vom Karkemisch im Lande Ḫatti (V, 50) ausdrücklich bestätigt wird. Hätte der König dazumal ganz Syrien bis zum Mittelländischen Meere durchzogen: er hätte diesen Zug sicher nicht unerwähnt gelassen. Dass er aber, obgleich er nur die Uferstaaten vom Lande Ḫatti in seinen (zeitweiligen) Besitz gebracht hatte, nun deshalb in derselben Inschrift (VI, 43) die Herrschaft über das ganze Ḫattigebiet und dazu gar über das ganze Gebiet bis zum Mittelmeere hin sich zugeschrieben hätte (VI, 43), halte ich denn doch für wenig wahrscheinlich. Es kommt hinzu, dass wenn hier bei dem »oberen Meere des Westens« das Mittelländische Meer zu verstehen ist, die in dieser Inschrift eine so grosse Rolle spielenden Nordgebiete gar nicht erwähnt wären, während die Westgrenze sogar doppelt bestimmt wäre: Unterer Zâb = Südgrenze; »Übergang über den Euphrat« bez. Ḫattiland = Westgrenze; Mittelländisches Meer = dieselbe; Nordgrenze fehlt! (vergl. Delattre l. c. 14) Die Kaskâja sassen dazu im nordöstlichen Theile des Ḫattilandes, im Euphratgebiete (KGF. 227), und heissen gar nicht einfach »Ḫattäer = nišî (mâtu) Ḫattai, sondern ṣâbî (mâtu) Ḫatti d. i. »Männer vom Ḫattilande«, was vielleicht sogar noch in dem specielleren Sinne von »kriegerische Mannschaften« (im Solde der Ḫattäer?) zu verstehen ist. Auch bei diesem Anlass wird dazu der Ausdehnung des Zuges bis an das Mittelländische Meer keine Erwähnung gethan: es wird (II, 100) überhaupt kein Meer genannt. Von den Angehörigen des (mâtu) Kaski bei Sargon sind übrigens die Kaskâja des Tiglath-Pil. I geographisch bestimmt zu trennen, wie immer es mit ihrer historischen Zusammengehörigkeit sich verhalten mag. S. bereits Norris, dictionary 621.

Schliesslich — ich habe auch hierauf, wenn auch in aller Kürze, bereits 1877 hingewiesen — kommt oder zieht der König gemäss Tigl. Pil. V, 33: »während des Verlaufs des (geschilderten) Feldzuges« und nachdem er (Vs. 29 flg.) die weiten d. h. ausgedehnten Naïri-Länder *ana pat gimri-šu* unterworfen d. h. aber die Länder von Nummi' im Osten, am Urumia-See, bis hin nach Dajai'ni bei Palû-I'niziti'-Anzitene am Euphrat-Muràd im Westen durchzogen hat, nach *Mi'lidia-Malaṭia = Melitene* in Südost-Kappadocien im Lande *Hanirabbat*, nachdem er meinetwegen den Euphrat bei Isoglu, dem Orte der armenischen Keilinschrift, überschritten hatte. Damit aber endigt dieser Feldzug. Wir fragen billig: wie stimmt zu dieser knapp gehaltenen Darstellung ein Zug des Assyrers quer durch Armenien bis hinauf an die Küste des Schwarzen Meeres, ein Zug dann westlich an der Küste entlang bis etwa an den Halys, dann hinab durch Chammanene und Kappadocien nach Malaṭia und wiederum an den Euphrat? Von einem solchen Zuge durch die bedeutendsten Landschaften Innerkleinasiens hätte Tiglath-Pileser I. rein nichts zu erzählen gewusst? Gab es damals etwa keine Tabaläer in Kappadocien und keine 24 oder wieviel Tabaläerfürsten (Salmanassar, Obelisk 104 ff.)? Warum wird ihrer mit keinem Worte gedacht?[1] — Wir schliessen: wie in der Zeit Sargons die Besetzung von Kammanu-Chammanene eine ausdrückliche Bezeugung hat, so steht diese andererseits vor dieser Zeit ohne jeglichen Anhalt da, und insbesondere, meinen wir, lässt sich Tiglath-Pileser's I. hierfür angeführter Bericht für eine solche Annahme nicht geltend machen.

Indem wir für sonstige mehr untergeordnete Punkte, die etwa bei dieser ganzen Frage in Betracht kommen, auf unsere frühere Abhandlung verweisen, dieses auch für die Bezeichnung »(oberes) Meer (des Westens)« bei Šamši-Rammân (s. a. a. O. S. 184 ff. u. vgl. ZA. I (1886) S. 81 flg.), glauben wir uns zum Schluss wiederholt dahin aussprechen zu sollen, dass eine Ausdehnung des assyrischen Machtbereichs bis an die Küste des Schwarzen Meeres oder in deren Nähe zur Zeit des Tigl. Pil. I. ebenso unwahrscheinlich ist, wie andererseits mit allem, was uns durch die Monumente an die Hand gegeben wird, in Übereinstimmung sein würde ein Zug des Assyrers, nach erfochtenem Siege im Naïrigebiete, den Muràd-Euphrat entlang nach dem Westen, nach Mi'lid, auf einer Strasse, auf welcher uns zu Palu (Menuaš), zu Isoglu (Sarduri II!) spätere Beherrscher des Gebietes am Vàn-See steinerne Denkmäler dieser ihrer Züge hinterlassen haben (inscr. XXXIII; L bei Sayce = S. 55 flg. 642 ff.).

[1] Dasselbe gilt auch gegen DELATTRE, der, scheint es, den König vom westlichen Euphratübergange aus quer durch Kappadocien an den Halys und Iris und an's Meer gelangen lässt, um ihn — auf demselben Wege? — an den Euphrat oder wohin? zurückkehren zu lassen (vergl. a. a. O. 12 flg.).

II.

Gelegentlich seiner Untersuchungen über die Keilinschriften Armeniens, die er unter dem Namen: the cuneiform inscriptions of Van (Journal of Roy. Asiat. Soc. N. S. XIV, part 3. 4. p. 378—732) veröffentlichte, hat A. H. Sayce sich auch über die Wohnsitze der in den assyrischen Inschriften oft erwähnten Mannäer des Näheren verbreitet, deren Namen man lange Zeit hindurch und so auch der Vortragende, mit dem heutigen des Vân-See's südlich vom Araxes zusammengestellt und die man in Rücksicht hierauf und da die assyrischen Inschriften in ihren Angaben damit in Einklang gebracht werden zu können schienen, überwiegend östlich von dem genannten See, an der Ostküste selbst, ihren Wohnsitzen nach, anzusetzen sich gewöhnt hatte. Es muss nun Sayce darin Recht gegeben werden, dass eine solche einfache Gleichstellung der östlichen Küstenbewohner des Vân-See's mit den Mannäern der Inschriften nicht gerechtfertigt erscheint. Die Mannäer der assyrischen Inschriften sind — gemäss den armenischen Inschriften — von den Bewohnern Biaina-Vân[1] verschieden und wohnten irgendwie weiter östlich. Um was es sich handelt, ist lediglich, ob sie vom Vân-See einfach östlich und nördlich vom Urumia-See, oder aber ob sie südlicher und dazu am linken, westlichen Ufer dieses letzteren Sees sassen.

Der letzteren Ansicht ist Sayce: er lässt sie am südwestlichen Ufer des Urumia-See's siedeln, nicht zu weit nördlich von der Hauptstrasse, welche von Assyrien nach Medien hineinführt. Gegen diesen Ansatz glauben nun wir anderseits uns erklären zu müssen und zwar zunächst aus einem allgemeinen Grunde. In diesem Falle nämlich müsste — wie das demgemäss auch von Sayce geschieht — die ganze, auf Grund der Inschriften bislang statuirte geographische Configuration in bedenklicher Weise verändert, d. h. es müssten die hier in Betracht kommenden Ländergebiete sämmtlich ganz erheblich nach Süden verrückt werden. Barsua, das wir mit anderen Fachgenossen in Adherbeidschân, östlich vom Urumia-See, suchten, würde als südlich von diesem liegend anzusetzen sein. Dem entsprechend müssten auch Gilzan-Kirzan nach Süden verrückt werden u. s. w. Aber wir fragen: stimmt hiermit der Bericht über das 31. Regierungsjahr Salmanassar's II.? — Kann überhaupt ein so tief nach Süden an das Südwestufer des Urumia-See's verlegtes Gebiet wie Mât-Mannai mit Urarṭu in mittelbare Verbindung gebracht werden, selbst wenn man (s. darüber unten) den Namen Urarṭu-Land an dem Gebiete östlich

[1] Für den, historisch zu erklärenden, Übergang von *ai* in *â* vergl. unsere Bemerkungen Zeitschr. f. Assyriol. III (1888) S. 12 flg. Sonst s. Sayce passim.

des Vân-See's mit dem Mittelpunkte Vân-Biaina haften liesse und lässt? — Wie sehr die Ostgrenze des assyrischen Reiches bei diesen Ansätzen sich westlich zurückbiegen würde, wie der Urumia-See im Grunde einfach die Ostgrenze, wenigstens ihrem nördlichen Theile nach, sein würde, liegt auf der Hand. Wie man aber die zum Theil so speciellen localen Angaben gerade der älteren Inschriften (s. darüber KGF. 162—180) mit diesen Ansätzen in Einklang bringen will — von den Bezeichnungen »oberes und unteres Naïri-Meer« für Vân-See und Urumia-See (s. darüber die Namen der Meere S. 192 flg.) ganz abgesehen — erkenne ich nicht. Es mag mir verstattet sein, hier noch darauf aufmerksam zu machen, dass Man ein verhältnissmässig sehr hoch gelegenes Gebiet gewesen sein muss, da der Assyrer von Man, Harruna, Šurdira nach Barsua-Adherbeidschân hinabsteigt (*attarad!* — Salman. Obelisk 168—172): war Man im Südwesten des Urumia-See's und Barsua im Südosten desselben belegen — natürlich nach Medien zu, so hatte man von Man nicht hinab-, sondern hinaufzusteigen. Beachte auch den Bericht über den Zug im 24. Regierungsjahre, dem gemäss (119—126) der Grosskönig von Naïri aus nach Barsua mit seinen »27 Königen« in das Gebiet der Amadai, d. i. der Meder eindringt und von da nach Arazias und Harhar hinabsteigt, zwei Gebiete, die wir — mit Illip — südlich von Medien und nördlich von Elam zu suchen haben (KGF. 172—178). Läge Barsua südlich vom Urumia-See, so sollte man einen Zug: Barsua, Namri, Medien erwarten. Ein Zug: Namri, Barsua, Madai u. s. w. führt auf einen Zug von Namri-Shehrizûr über ein östliches Gebiet (unser Barsua-Adherbeidschân) nach Medien hinein und von da ab südwärts.

Wir besitzen nun aber noch einen unbefangenen und von der Auffassung der Inschriften unabhängigen Zeugen, der, meinen wir, gegen die so südliche Ansetzung der Mannäer Einspruch erhebt. Bekanntlich werden in der prophetischen Rede Jer. 51, 27 unmittelbar nebeneinander die מַמְלְכוֹת אֲרָרָט מִנִּי וְאַשְׁכְּנָז aufgeführt. Zweifelsohne sind hiermit Nordvölker gemeint, die gegen Babel aufgerufen, und denen alsdann Vs. 28 die östlichen Meder angereiht wurden. Die Aufführung der Aschkenâz neben (Riphat und) Thôgarma Gen. 10, 3 lässt darüber wohl keinen Zweifel. Wie die Minni-Mannäer,[1] falls sie im Südwesten des Urumia-See's, also nach Medien zu wohnten, dazu kommen sollten, anstatt zu diesen vielmehr zu den Nordvölkern gestellt und

[1] S. über die Identität der מִנִּי Mannai (Mun) und des Volkes Μίνυας KGF. S. 160; KAT.[2] 423 flg. Auch SAYCE zweifelt an dieser Identität nicht (inscrr. of Van 388 flg. 394).

zwischen Aschkenâz und Urartu eingereiht zu werden, vermögen wir nicht einzusehen, man mag unter אֲרָרָט (אֶרֶץ) lediglich die Araxes-Ebene oder aber das von den Urartäern später ebenfalls besetzte südliche Vorland mit dem Mittelpunkte Biaina am Vân-See, oder beides zusammen, also im Wesentlichen das gesammte Ostarmenien (s. darüber den Excurs!) begreifen.

Im Zusammenhange mit dem vorher Ausgeführten folgt aus dieser biblischen Zusammenordnung der betreffenden Gebiete bez. Völker, dass wir die Minni-Mannäer nach Urartu zu, also ziemlich weit nördlich zu suchen haben. Mit Rücksicht auf ihre Einreihung zwischen Parsua(sic!)-Adherbeidschân einerseits, Urartu anderseits bei Sargon (s. KGF. 173, oben), mit Rücksicht ferner auf das Auftreten von Mun (doch wohl sicher = »Man«!) zwischen Ginunbund und Barsua bei Rammân-nirâri (KGF. 172), die abermalige Zusammenkoppelung von Man und Barsua bei Šamši-Rammân (ebenda), den Bericht endlich Salmanassar's über den Zug seines Tartan Dajan-Ašur nach dem Nordosten, der im 30. Regierungsjahre des Königs[1] nach Überschreitung des (oberen) Zâb in's Gebiet der Hubuškaër eindringt, sich den Städten Udaki's von Man nähert, um alsdann von Man nach Barsua hinabzuziehen (Salm. Obel. 159—174), scheint mir nicht bloss eine ziemlich nördliche Ansetzung des Gebietes der Mannäer geboten, sondern näher noch das Gebiet zwischen Urumia-See und der Araxes-Ebene, welches durch die Landschaften Choi und Marand bezeichnet wird, dasjenige zu sein, wo wir die Mannäer local zu fixiren haben. Von dort brachen sie dann später, beim Schwächerwerden der Assyrer in ihren östlichen Stellungen, insbesondere unter Ašurbâniabal in das assyrische Gebiet westlich vom Urumia-See, etwa in die Landschaft Kirruri ein, so die Assyrer zu einer Abwehr gegen sich herausfordernd (Ašurb. Cyl. Rass. II, 126 III, 26; Cyl. B III, 23—84; vergl. Keilinschr. Bibl. II, 177 ff.; 241 ff.).

Excurs. Urartu, die Araxes-Ebene und das Reich von Biaina.

Es gebührt Sayce das Verdienst, die lange Zeit für als in armenischer Sprache geschrieben geltenden beiden Inschriften des armenischen Königs Sardurri I. als solche rein assyrischen Idioms

[1] Die Angabe KGF. 172, dass Salmanassar auch während seines Berichts über den Feldzug des 31. Jahres des L. Man erwähnt habe, beruht auf einem Irrthume. Andiu (Andiai 182) wird allerdings genannt.

aufgezeigt und für die Abhängigkeit der armenischen Keilschrift und des gesammten armenischen Schriftwesens von der assyrischen Schrift und dem assyrischen Schriftwesen den Erweis erbracht, zugleich aber auch gezeigt zu haben, dass für eine gewisse Zeit für die Assyrer die Begriffe Land Naïri und Land Urarṭu sich deckten (s. a. a. O. 454 ff.). Es ist von Interesse zu fragen, seit welcher Zeit dieses der Fall war und wie anderseits die ebenfalls unzweifelhafte Scheidung der Begriffe Naïri und Urarṭu zu verstehen und historisch zu deuten sei? Es ist bekannt, dass Tiglath-Pileser I. um 1100 v. Chr. ein Urarṭu nicht nennt und vielmehr lediglich von Naïri-Ländern spricht, die er bekriegt und durchzogen habe (vergl. oben in Abschnitt I.). Dass der Name, sei es für die Araxes-Ebene, sei es für das südlich davon am östlichen Ufer des Vân-See's belegene Gebiet damals noch nicht existirte bezw. den Assyrern noch nicht bekannt war, ist daraus schwerlich zu schliessen. Ist unsere in Abschnitt I dargelegte Ansicht über den wahrscheinlichen Zug des Königs richtig, der sich südlich vom »oberen Meere«, d. i. dem oberen Naïri-Meere = Vân-See, hinbewegte, so war zur Erwähnung des betreffenden Gebietes auch keine Veranlassung, zumal der Zug im Verlauf anstatt östlich vielmehr westlich in der Richtung auf Mi'lid-Malaṭia in Kappadocien sich fortsetzte. Trotz alledem wird man sagen müssen, dass, hätte ein Reich Urarṭu am östlichen Ufer des »oberen Meeres« damals bereits bestanden, es auffallend sein müsste, dass alsdann unter den 23 Naïri-Königen, die vom »unteren Meere«, d. i. dem Urumia-See bis jenseit des »oberen Meeres« hin wohnten (s. oben), nicht auch Urarṭu, falls dieses dazumal bereits am »oberen Meere« Fuss gefasst hatte, bez. bis dahin sich ausgedehnt hatte, unter den Verbündeten mit erschien. Die Vermuthung liegt nahe, dass es dazumal hier noch kein Reich Urarṭu gab, dass hier das eine oder andere der Gebiete der 23 Naïri-Könige belegen war, somit für eine Erwähnung Urarṭu's seitens des Assyrerkönigs nicht eine Veranlassung war. Implicite würde darin liegen, dass das später von Urarṭu irgendwie beherrschte bez. besetzte Gebiet dazumal noch den Namen Naïri für die Assyrer führte, unter diesem Namen mitbegriffen wurde.

Der erste, bei welchem sich der Name (*mâtu*) *Urarṭu* bez. das Gentile *Urarṭai* findet, ist bekanntlich Ašurnâṣirabal (885—860 v. Chr.) s. Stand inscr. 9 u. sonst. Er unterscheidet dasselbe des Bestimmtesten von den *Naïri*-Ländern (vergl. a. a. O. 7) und lässt sich die Grenze Assyriens im Norden bez. Nordwesten ausdrücklich »bis zum Lande Urarṭu« erstrecken, nachdem er dieselbe als »von den Quellen des Supnat,« d. i. des Sebeneh-Su's, eines Quellarmes des Tigris, nordnordöstlich von

Ami'd-Diârbekr an, sich erstreckend bezeichnet hat[1]. Sein Sohn Salmanassar II.[2] geräth bereits in kriegerische Verwickelungen mit dem Lande *Urarṭu*, er liegt wiederholt mit den Urarṭäern zu Felde (Obelisk und Monolith) und durchzieht einmal gelegentlich eines solchen Zuges das Urarṭu-Land von einem Ende bis zum anderen es dreschend d. i. niedertretend wie ein Wildstier (*kîma rîmu adiš* s. Monolithinschr. II, 52). Sein Nachfolger Šamši-Rammân (825 - 812 v. Chr.) rühmt sich wiederholt das gesammte Land Naïri niedergeworfen zu haben (I, 53—II, 6; II, 16—34; 34 ff.), bei seinem zweiten Zuge dabei bis zum »Meere des Westens«, d. i. dem Vân-See = »oberen Naïri-Meer« gelangend (II, 21). Eines Zuges aber nach dem Lande Urarṭu erwähnt er nicht, weder bei diesem Anlass noch sonst. Auch die »Verwaltungsliste« (s. KB. I 208 ff.) erwähnt für s. Regierung eines Zuges nach Urarṭu wenigstens für die Jahre 817—812/11 nicht. Dasselbe gilt für König Rammânnirâri 812/11—782/781. Dagegen zieht sein Nachfolger Salmanassar III 781 sofort nach dem Lande Urarṭu und wiederholt diese Züge für die Jahre 780, 779, 778, 776, 774, unternimmt also im Ganzen ihrer sechs Züge gegen Urarṭu. Von welchem Erfolge diese Züge begleitet waren, wissen wir nicht. Dass ihrer sechs während einer kurzen Regierung von zehn Jahren nöthig geworden waren, lässt darauf schliessen, dass der Staat Urarṭu inzwischen sich mächtig entwickelt hatte und Assyrien gegenüber eine drohende Machtstellung eingenommen hatte[3]; und der weitere Umstand, dass für die nächstfolgenden Regierungen Ašurdân's und Ašurnirâri's die genannte Liste eine Unternehmung gegen Urarṭu überhaupt nicht mehr verzeichnet, wird im Hinblick zugleich auf die von der Liste angemerkten Aufstände im Innern des Reiches (763, 761, 760, 759, 746) zu dem Schlusse berechtigen, dass die Urarṭäer im mächtigen Vordringen gegen Assyrien begriffen waren, bez. Assyrien im Norden des Reichs arg zurückgedrängt und überhaupt erheblich geschwächt hatten. Der Assyrerkönig, der zuerst die Offensive gegen das Nordreich ergriff und mit Erfolg ergriff, war der Begründer des neu-assyrischen Reichs, Tuklat-abal-i'šarra III. (745—727). Schon für das dritte Jahr seiner Regierung wird in den Eponymenlisten von einer »Metzelei« berichtet, die er »unter den Truppen Urarṭu's« angerichtet (KB. I. 212/213). Im

[1] Gelegentlich z. B. Stand. wird das Urarṭu-Land auch als (das Land) *ša bitâni* »das gegenüberbelegene« Land bezeichnet. S. darüber KGF. 147 Anm. Ein besonderes Land des Namens Bitâni oder Bit-Ani (A. H. Sayce a. a. O. 394 ff.) existirt nicht.

[2] Vergl. zum Folgenden die Darstellung der parallelen armenischen Geschichte bei Sayce a. a. O. 402 ff.

[3] S. hierzu die Inschriften des Argisti Nr. 38 (= Col. II) 52. 53; 39 (= Col III). 31 u. vergl. Sayce p. 406.

Jahre 735 unternimmt derselbe nach denselben Listen abermals einen Zug *ana* (*mâtu*) *Urarṭu* und aus seinen eigenen Inschriften erfahren wir, dass er den damaligen König von Urarṭu, Sardaurri, der mit Matilu (?) von [Kappadocien] einen Bund geschlossen und von Assyrien abgefallen war, auf's Haupt geschlagen und sein Land erobernd durchzogen hat (KG. II, 7) (über den zweiten Zug fehlen uns genauere Mittheilungen aus den Annalen).

Unter Sargon sehen wir Assyrien und Urarṭu in heftiger Fehde miteinander begriffen.

Gegen Ende der Regierung Sanherib's finden wir Asarhaddon, seinen Sohn, im Lande Urarṭu als Feldherr thätig, und wie er von dort zur Bekämpfung der Mörder seines Vaters herbeieilt, so erfahren wir, dass die Mörder Sanherib's nach Urarṭu = אֶרֶץ אֲרָרָט (2. Kön. 19, 37) geflohen waren, zweifelsohne, um bei dem mit Assyrien in Fehde liegenden Könige des Nordreiches Zuflucht zu suchen und zu finden. Asarhaddon's Sohn und Nachfolger Ašur-bâni-abal (668 bis 626 v. Chr.) erwähnt die Urartäerkönige: Rusà und Sarduri, lediglich als solche, welche sich um die Bundesgenossenschaft und Freundschaft des Assyrers beworben hätten (Asurb. Sm. 147, 3; Cyl. R. X, 40 ff.); kriegerische Verwickelungen zwischen den beiden Reichen scheinen während seiner Regierung überhaupt nicht Statt gehabt zu haben. Lediglich mit den östlich vom Vân-See nach dem Urumia-See zu wohnenden Mannäern rühmt er sich siegreich gekämpft zu haben (Cyl. II, 126 ff. u. Parall.). Vielleicht trieb eben die aufstrebende Macht dieser Mannäer die Urarṭäer dazu, sich der Freundschaft der Assyrer zu versichern.

Dass die Urarṭäer seit Ašurnâṣirabal in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts mit den Assyrern zu Felde lagen, dass sie während dieser Zeit — bald ohne, bald mit Erfolg — strebten, nach Süden vorzudringen, kann einem Zweifel nicht unterliegen, wie nicht minder, dass sie schliesslich die Assyrer aus den von diesen occupirten Gebieten zwischen Vân-See und Urumia-See vertrieben.

Die Frage drängt sich auf: wo denn nun sassen eigentlich diese Urarṭäer? — War Mittel- und Ausgangspunkt ihrer Herrschaft — wie man bisher so ziemlich allgemein angenommen — das Land der Alarodier, d. i. die Araxes-Ebene: *Ararat regio campestris per quam Araxes fluit* (Hieronymus s. u.)[1], und drangen sie von dort aus nach dem Süden vor, so insbesondere auch das Gebiet am östlichen Ufer des Vân-See's occupirend und von da wieder nach dem Westen bis Mi'lid-Malaṭia in Südost-Kappadocien vordringend? — oder aber war das Gebiet am

[1] Comm. ad Jes. 37, 36 sq. (Opp. ed. Vallarsi IV p. 467): »Ararat autem regio in Armenia campestris est, per quam Araxes fluit, incredibilis ubertatis, ad radices Tauri montis qui usque illuc extenditur.«

östlichen Vânsee-Ufer mit der Veste Biaina-Vân der Mittel- und Ausgangspunkt der Urartäer-Herrschaft? Die letztere Ansicht scheint diejenige SAYCE's zu sein; wir sind der entgegengesetzten. Unsere Gründe sind diese. Ein hohes Culturvolk, als welches wir uns denn doch die Urarṭäer zu denken haben, bildet sich nicht in einer local beschränkten und physikalisch wenig begünstigten Gegend wie das Gebiet östlich vom Vân-See zu einem solchen heran. Es muss einen breiteren Untergrund haben. Einen solchen bietet die regio campestris ... *incredibilis ubertatis* (Hieronymus s. die Stelle ob. in der Anmerk.), nämlich die Araxes-Ebene. Eine solche Gegend ward selbstverständlich der Gegenstand der Wünsche und der Zielpunkt der Angriffe von in weniger günstiger Lage sich befindenden umwohnenden, insbesondere Bergvölkern, unter ihnen — so denken wir — z. B. auch der Assyrer. Dieser, deren cultureller Überlegenheit sie im Übrigen sich beugten,[1] sich zu erwehren, musste je länger je mehr als die Aufgabe der Bewohner der Urarṭu-Araxes-Ebene erscheinen. Es galt sich ein »Trutz-Assyrien« zu schaffen. Dazu ward die Veste Biaina-Vân am östlichen Ufer des oberen Naïri-Meeres (Vân-See) ausersehen, die dann seitdem überall der militärische Mittelpunkt für die kriegerischen Unternehmungen der Urarṭäer ward. Der erste König, der mit den Assyrern urkundlich in Conflict gerieth, war Si'duri, auf den heimischen Inschriften, wie SAYCE (p. 405. 413) mit gutem Fug vermuthet, Sardurri geheissen, welcher in Salmanassar's II. 27. Regierungsjahre = 834/833 v. Chr. von dem Assyrer-Könige mit Krieg überzogen und gemäss Obel. 141 ff. durch dessen Tartan Dajan-Ašur besiegt wurde. Salmanassar bezeichnet ihn ausdrücklich als *(mâtu) Urarṭai* »Urarṭäer« und als Ziel seiner kriegerischen Expedition das Land Urarṭu. Da die beiden von dem betreffenden Armenier-Könige uns erhaltenen Inschriften in Biaina-Vân gefunden wurden (von SCHULZ-LAYARD), so ist anzunehmen, dass die Bewohner der Araxes-Ebene, die Alarodier-Urarṭäer, damals, also in der zweiten Hälfte des 9. Jahrhunderts, das Gebiet am Vân-See, insbesondere das östliche Ufergebiet bereits occupirt hatten. Ihr Vorstoss nach Süden gab vermuthlich den Assyrern Veranlassung, ihnen entgegen zu treten. Nach dem assyrischen Bericht geschah dieses mit Erfolg; die heimischen Siegestafeln lassen die Sache in einem anderen Lichte erscheinen. Unter allen Umständen tritt für die Assyrer an die Stelle des Namens

[1] Ich denke an Sarduri's I. in assyrischer Schrift und Sprache aufgesetzte Inschriften und Urzana's, Königs von Muṣaṣir (zur Zeit Sargon's), assyrisches Siegel (s. für letzteres Monatsber. 17. März 1879 S. 289 ff.). Auch die Bezeichnung des neu occupirten Gebietes am Vân-See mit dem rein assyrischen Namen »Land Naïri« (s. u.) gehört hierher.

(mâtu) Naïri für die Gegend am Vân-See, den sie selber danach als »oberes Naïri-Meer« benannten, eines Namens, den der erste Armenier-König, von dem wir eine Inschrift besitzen (es ist der oben genannte Si'duri-Sardurri), zunächst selber einfach acceptirte (I, 2; II, 2), tritt, sage ich, an die Stelle des Namens Naïri, für die Assyrer seitdem der Name Urartu, indem die Gegend am Vân-See seit ihrer Occupirung durch die Alarodier-Urartäer unter diesen Namen mitbegriffen wurde, während noch Ašur-nâṣir-abal zwischen Naïri und Urarṭu scharf unterschied.

III.

Mit gutem Grund ist es Assyriologen und Geschichtsforschern aufgefallen, dass in den assyrischen Inschriften niemals der Stadt *Kition* Erwähnung geschieht, des Mittelpunktes der phönicischen Ansiedelungen in Cypern, des Mittelortes der כִּתִּים der Bibel und der heimischen Inschriften, fragelos lange Zeit des Hauptortes der östlichen Hälfte der Insel. Die Thatsache musste um so auffälliger erscheinen, als gar an diesem Orte selber — nämlich im heutigen Larnaka — durch L. Ross im Jahre 1845 die jetzt im Berliner Museum befindliche Sargons-Stele[1] gefunden wurde, auf welcher noch dazu der Assyrerkönig ausdrücklich erzählt, dass er das steinerne Standbild auf Veranlassung der Huldigung der Cyprier habe anfertigen und aufrichten lassen.[2] Das Bedürfniss, diese östliche Hauptstadt Cyperns inschriftlich erwähnt zu sehen, war bei den Assyriologen ein so lebhaftes, dass man, angesichts der corrupten Gestalt der lange Zeit allein bekannten Liste der in Betracht kommenden cyprischen Städte und Könige (ihrer zehn), nämlich der Liste auf dem zerbrochenen Prisma Asarhaddon's, gelegentlich wohl in einem, Kitti gelesenen, Stadtnamen das gesuchte und vermisste *Kition* vermuthete. Die auch von mir (in den Abhandlungen unserer Akademie) veröffentlichte Doublette der Liste bei Ašurbanipal[3] hat diesen Wahn zerstört: der betreffende Ort ist nicht Kition nach Phönicien zu, sondern *Kuri* = Curium nach Griechenland zu, jenes nach Südosten, dieses nach Südwesten zu belegen. Aber wir meinen, diese selbe Tafel, die dem alten Irrthum von einem angeblichen

[1] S. Eb. Schrader, Die Sargons-Stele des Berliner Museums. Abhdlg. d. K. Akad. d. Wiss. aus dem J. 1881. Berl. 1882.

[2] A. a. O. S. 25 Col. II (IV), 43—53.

[3] S. Eb. Schrader, Zur Kritik der Inschriften Tiglath-Pileser's, des Asarhaddon und des Asurbanipal (1879). Berl. 1880. S. 33. Vergl. schon früher G. Smith, Assyrian annals, in North British review, July 1870 p. 329, sowie neuerdings S. A. Smith, Keilschrifttexte Ašurbanipals II, 25 flg.

Kitti — Kition ein definitives Ende gemacht hat, bietet uns auch die Lösung bezüglich des Räthsels, das uns beschäftigt. An der Stelle nämlich des Namens, den man auf dem Asarhaddon-Cylinder B früher Amtiḥadasti las, bietet die Tafel Asurbanipal's in der denkbar klarsten assyrischen Keilschrift Karti-ḥadasti d. i. unzweifelhaft das phönicische קרת־חדשת[1] d. h. »Neustadt-Karthago« = Καρχηδών. Eine »Neustadt« setzt eine Altstadt voraus. Diese Altstadt wird — so darf man annehmen — wenn, wie der Fall, die Neustadt eine »Königsstadt« ist, selber eine Stadt von einiger Bedeutung gewesen sein, und wenn, wie der Name besagt, die Tochterstadt eine phönicische war, wird dazu auch die Mutter- und Altstadt vermutlich eine phönicische gewesen sein.

War diese Mutterstadt nun Tyrus? war es Sidon? Eine von diesen beiden führenden Städten — so wird zunächst anzunehmen sein — wird es gewesen sein.[2] Mit Sicherheit wird sich das allerdings wohl kaum entscheiden lassen. Manches, wie schon die geographische Lage, könnte uns in erster Linie an das nördlichere Sidon denken lassen. Später freilich — dies ist unzweifelhaft — war auch oder allein Tyrus in Cypern mächtig, so dass man die Beantwortung der Frage wohl besser dahingestellt sein lässt.

War nun aber auch Sidon die betr. phönicische Mutterstadt oder war dieses Tyrus, war es irgend eine andere phönicische Stadt, war Karti-ḥadas(š)ti überhaupt lediglich eine von Phöniciern gegründete und benannte »Neustadt« — immer werden wir eine phönicische »Neustadt« in erster Linie an der dem phönicischen Mutterlande zugewandten Küste Cyperns, also an der Südostküste belegen vermuthen, z. B. da, wo כתים Κίτιον = Larnaka belegen ist. Und dahin weist uns schliesslich auch die Liste der 10 cyprischen Städte bei Asarhaddon

[1] Die Wiedergabe des ursprünglichen ש in חדשת durch ein assyr. ס beruht auf dem bekannten Wechsel der Aussprache der Zischlaute ש und ס bei den Assyrern gegenüber den Babyloniern und übrigen Nordsemiten. S. darüber: die Aussprache der Zischlaute etc. in Monatsbericht 5. März 1877 S. 79 ff.; Zeitschrift f. Keilschriftf. I (1884) S. 1 ff.

[2] Man könnte an sich ja freilich versucht sein, קרת חדשת auf eine »Neustadt« im Gegensatze zu Kition selber, als der »Altstadt«, zu beziehen, ähnlich wie man wohl bei Karthago קרת חדשת als »Neustadt« gegenüber einer afrikanischen »Altstadt«, etwa Utica (עתיקה?? —), oder aber an Παλαίτυρος gegenüber Τύρος gedacht hat. Allein wie es jetzt wohl allgemein anerkannt ist, dass Karthago diesen seinen Namen »Neustadt« sicher nicht im Gegensatz zu dem jener afrikanischen Stadt, denn vielmehr zu der Mutterstadt Tyrus als der »Altstadt« erhalten hat (s. darüber O. Meltzer, Geschichte der Karthager I. Berl. 1879, S. 91 ff.; 450 ff.), so scheint nicht minder die Bezeichnung der auf dem Festlande belegenen Stadt Παλαίτυρος als »Altstadt« im Gegensatze zu dem wirklichen Tyrus als der Altstadt recht secundären Ursprungs zu sein, s. R. Pietschmann, Geschichte der Phönicier. Berl. 1879 S. 69 flg.

und Ašurbanipal (s. diese in meiner Abhandlung »Zur Kritik der Inschriften Tiglath-Pileser's II., des Asarhaddon und des Asurbanibal« Berl. 1880 S. 33 flg.). Diese Liste zerlegt sich von selbst in drei Gruppen:

I. Östliche Gruppe:

1 (13[1]) I'di'al (Idalium)
2 (14) Kitrusi (Chytros)
3 (15) Silûa (Salamis ?)

II. Westliche Gruppe:

4 (16) Pappa (Paphos)
5 (17) Sillu (û?) (Soli)
6 (18) Kurî (Curium)

III. Mittlere Gruppe:

7 (19) Tami'su (Tamassus) im Norden
8 (20) Kartiḫada's(š)ti (Kition?) im Süden

IV. Nachgebracht:

9 (21) Lidir (Ledron)
10 (22) Nuri' (??)

Sondert man ferner von der Gesammtzahl der zehn tributären Städte die westliche und zugleich für die Assyrer fernste Gruppe: Paphos, Soli, Curium, ab, so erhält man eine überschiessende Summe von sieben Städten. darunter auch *Ḳarti-ḫadas(š)ti* = קרת חדשת, welche es nahe liegt den sieben cyprischen Städten gleichzusetzen, die dem Könige Sargon von Assyrien gemäss dessen Inschriften huldigten. Ist nun, wie wir meinen, Ḳarti-ḫadas(š)ti eben Kition-Larnaka, so wäre dieses unter den dem Sargon huldigenden Städten mitbegriffen, und es erklärte sich nunmehr mit einem Male, wie die Sargons-Stele, d. i. unsere Sargons-Stele gerade in dem in den assyrischen Inschriften sonst nicht genannten Kition gefunden wurde: Kition war eben Ḳarti-ḫadas(š)ti, die phönicische »Neustadt«.[2]

Aber stimmen hierzu auch die Zeitverhältnisse? Schliessen dieselben eine Tributpflichtigkeit Kition's, was die Assyrer anbetrifft, während der Zeit des Sanherib, Asarhaddon, Asurbanipal nicht ein-

[1] Nummerirung auf der Liste selber in KAT.[2] 355/356. — Zu der Ansetzung der Lage der betreffenden Städte, vergl. die dem zweiten Bande der »Keilinschriftlichen Bibliothek« (1890) beigegebene Karte von H. Kiepert.

[2] Nachschrift vom 21. Decbr. Durch die Freundlichkeit eines Collegen werde ich noch nachträglich auf die Abhandlung von J. P. Six, series cypriotes, in Revue numismatique 1883 p. 249—374 aufmerksam, der p. 253 gelegentlich der Erwähnung des cyprischen »Qartiḫadasti-Carthage« hinzusetzt: »En outre Kition qui n'est pas nommée à moins qu'elle ne portât alors le nom de Carthage (»ville neuve«), mais où fut trouvée la stèle de Sargon et qui dépendait à ce qu'il parait directement du roi d'Assyrie.« In der Vermuthung, dass Ḳarti-ḫadasti ein anderer und zwar phönicischer Name für Kition sei, ist mir hiernach der Verfasser zuvorgekommen. Welche näheren Gründe er für diese seine Annahme hatte, erhellt aus dem Obigen nicht. Ed. Meyer scheint die Ansicht von Six entweder nicht gebilligt oder sie ebenfalls nicht gekannt zu haben, da er ihrer in keiner Weise Erwähnung thut (vergl. insbes. dessen Gesch. des Alterh. I, 1883. S. 283 Anm.). Sonst vergl. noch J. Halévy, Revue archéologique, NS. XL, 1880 p. 305 s.; Friedr. Delitzsch. Paradies, 1881 S. 293; A. Delattre. l'Asie occidentale 1885 p. 87.

fach aus? — Wir lesen bei Ed. Meyer, Geschichte des Alterthums I 433 (§ 357): »Dann (nach den bei Tiglath-Pileser erwähnten Königen Hiram und Mi'ti'nna) folgt Elulaeos, von dem der tyrische Geschichtsschreiber Menander berichtet, dass er das abgefallene Kition wieder unterworfen habe. Dem entspricht genau, dass die Assyrer unter den selbständigen Fürstenthümern auf Cypern Kition niemals erwähnen (vergl. S. 402). Als dann Elulaeos von den Assyrern angegriffen wurde, heisst es weiter, seien Sidon, Akko, Palaetyros und viele andere Städte von ihm abgefallen: mithin müssen sie ihm vorher unterthänig gewesen sein. Genau das Gleiche lehren die Angaben Sanherib's. Hier heisst Lûlî (= Ἐλουλαῖος) König von Sidon;[1] ihm gehorchen Gross- und Klein-Sidon, Bît-zitti, Sarepta, Machalliba, Ušu, Akzib und Akko, die sämmtlich erobert werden; er selbst flieht von Tyros nach Cypern. Sonst wird Tyros hier nicht genannt, da es nicht erobert wurde; und ebendeshalb nennt Sanherib wohl auch den Elulaeos König von Sidon, nicht von Tyros, während seine Vorgänger nur von Königen von Tyros reden, Könige von Sidon aber nicht erwähnen. Im Übrigen decken sich die assyrischen und tyrischen Angaben vollkommen.«

Als Eduard Meyer diese Worte schrieb (1883/84), hatte er mit denselben ganz Recht. Wir selber haben uns um dieselbe Zeit und schon früher ebenfalls so ausgesprochen (KGF. 244; Abhandlungen der Berl. Akad. d. Wiss. 1879 S. 31ff.; 1881 [1882], die Sargonsstele u. s. w. S. 4). Inzwischen nun aber hat sich durch die neue Textedition des Josephus durch B. Niese (Jos. antiqq. IX, 14. 2) herausgestellt, dass der Text des Menander-Josephus an der betreffenden verderbten Stelle nicht Sanherib oder was sonst? sondern einfach Σελάμψας ὁ τ. Ἀσσ. β. d. i. *Salmanassar* (vergl. lat. vers. *salamanassis*) bietet[2]. Also bereits zu Salmanassar's (IV.) Zeit (727—722) waren — vergl. Menander's Darstellung — die Kittier von Tyrus abgefallen gewesen und wurden von Eluläus zum Gehorsam zurückgebracht, was dann wiederum zum Kriegszuge Salmanassar's gegen Tyrus führte, durch welchen die Cyprier selbstverständlich wieder Luft bekamen, unter ihnen sicherlich auch die Kittier, so dass es uns weder überrascht, dass unter Sargon, Salmanassar's Nachfolger, sieben cyprische Städte Assyrien in Babylon (709) huldigen, noch dass die Stele des assyrischen Königs in Kition-Larnaka Aufstellung fand. Von einer Wiederunterwerfung Kition's durch die Phönicier aber erfahren wir nichts! Dahingegen finden wir, wie unter Sargon ihrer sieben, so unter Asarhaddon

[1] Von mir unterstrichen.

[2] Ed. Meyer. S. meinen Bericht in ZA. I (1886) S. 126.

und Asurbanipal ihrer zehn cyprische Königsstädte in Abhängigkeit von Assyrien (s. die Tributlisten): inzwischen waren die drei der westlichen Gruppe hinzugekommen. Endlich gar erscheint in denselben Listen Asarhaddon's und Asurbanipal's König Ba'al von Tyrus als Tributär der Assyrerkönige: auch das tyrisch-cyprische Kition wird somit sicher Assyrien tributpflichtig gewesen sein. Es sollte somit auch auf diesen Listen erwähnt sein. Es wäre nicht erwähnt, wenn nicht der Name einer anderen aufgeführten cyprischen Stadt mit Kition sich deckte. Die Vermuthung, dass das Ḳarti-ḫadas(š)ti sei, drängt sich unmittelbar auf.

Es kann auffallen und ist aufgefallen, dass Sanherib auf dem Prisma den Eluläus König von Sidon nennt, während er doch sonst als König von Tyrus erscheint (KGF. 49 flg.). Vielleicht löst Ed. Meyer die Schwierigkeit mit gutem Fug so, dass das ältere Sidon dazumal unter der Oberhoheit von Tyrus stand und Eluläus König von Tyrus und Sidon war, so dass sich Sanherib der Besiegung des Sidonierkönigs Eluläus rühmen konnte, während ihm Tyrus unbezwinglich blieb und er des Beherrschers von Tyrus demgemäss keine Erwähnung thut. Als dann umgekehrt später Tyrus sich dem Willen der Assyrer fügte (Tributlisten Asarhaddon's und Asurbanipal's: Ba'al von Tyrus Tributär der Genannten!), bedurfte es einer Erwähnung Sidons nicht: Sidon seinerseits war eben Tyrus' Tributär, somit in Tyrus selber und seiner Tributpflichtigkeit mitbefasst, falls es nicht inzwischen, was das Wahrscheinlichste, ganz dem assyrischen Reiche einverleibt war.

Denkbar wäre es, dass Kition zur Zeit des Asarhaddon und des Asurbanipal noch unter tyrischer Oberhoheit stand; es ist das aber mehr wie fraglich. Das Streben der Cyprierstadt, sich dem näheren Oberherrn — Tyrus — zu entziehen, um sich dem minder lästigen ferneren — Assyrien — in die Arme zu werfen, tritt zur Zeit Salmanassar's IV. für Kition und seit Sargon auch für andere cyprische Städte (nach unserer Ansicht darunter abermals Kition) so evident zu Tage, dass darüber kein Wort zu verlieren ist. Und ist Ḳarti-ḫadas(š)ti, wie wir meinen, einfach mit Kition in der Hauptsache identisch, so spricht dafür auch der uns inschriftlich überlieferte Name des tributpflichtigen Königs Damûsu (s. die Listen!), der auf jeden anderen, nur nicht semitisch-tyrischen Ursprung schliessen lässt: es befand sich eben die antiphönicische bezw. antityrische Partei in der Stadt am Ruder.

Dass schliesslich die in Rede stehende Hafen- und Handelsstadt Kition ausser diesem wohl sicherlich heimischen noch einen zweiten, von den Phöniciern nach der Colonisirung des Gebietes durch diese beigelegten Namen führte, d. h. dass ein solcher zweiter nicht heimischer, phönicischer Name derselben beigelegt wurde, hat nichts

Auffälliges vergl. den assyrischen Namen für Cypern: (*mâtu*) *Jatnan*, welcher Bedeutung und welches Ursprungs immer derselbe sein möge. Vielleicht bezeichnete man mit dem Namen »Neustadt« auch nur einen besonderen, vornehmlich von phönicischen Handelsleuten erbauten und bewohnten Stadttheil, der dann aber den Assyrern allein oder vornehmlich bekannt wurde.

Aber — so fragt man schliesslich und mit gutem Grund — besitzen wir nicht vielleicht auch heimische, cyprische Spuren der Existenz einer Stadt des Namens *Kartiḥadas(š)ti* und dazu unseres *Kartiḥadas(š)ti*? Wir glauben auch diese Frage im bejahenden Sinne beantworten zu sollen. Wir besitzen zwei phönicische in Cypern gefundene Inschriften, in welchem einer Örtlichkeit des Namens קרת חדשת Erwähnung geschieht (vergl. Ed. Meyer a. a. O. 343. §. 283 Anm.). Die erste dieser Inschriften, publicirt Corpus inscriptionum semiticarum I, 1 (Parisiis 1881) auf Tab. IV als Inschrift: Templum Baalis ad Libanum (vergl. Commentar I, 1 p. 22 [55] (Nr. 5)), wurde in Limassol an der Südküste Cyperns gekauft, und befindet sich zur Zeit im Cabinet des antiques zu Paris.[1]

Der Fundort sei der Gipfel eines Berges, der den Namen Muthi Shinois (sic!) führe, im Nordwesten des genannten Limassol belegen. In der Stätte des Fundes wird ein Grab (»τάφος«) vermuthet. Die Möglichkeit, dass die Inschrift darum dennoch nicht aus Cypern stammt, d. h. in Cypern aufgesetzt wurde, ist dadurch nicht von vornherein ausgeschlossen (gegen Meyer a. a. O.). Immerhin neige ich mich für meine Person (gegen die Herausgeber des Corpus inscriptionum Sem.) der Ansicht zu, dass es in der That ein Denkmal cyprischen Ursprungs ist, obgleich es dem »בעל לבנן« gewidmet war (Fragm. B S. 24; Fr. H S. 26), dem man ja aber auch in Cypern seine Verehrung bezeugen konnte. Da der Veranlasser der Inschrift sich wie als Bürger von קרת חדשת, so auch als עבד חרם מלך צדנם »Diener Hiram's, Königs der Sidonier« bezeichnet (Fragm. E. A.), bei dem »Könige der Sidonier« (resp. Tyrier s. darüber Meyer) in erster Linie an den damaligen Oberherrscher auch von Cypern (Südküste) zu denken sein wird, so scheint, dass der Veranlasser der Inschrift ein Cyprier bez. cyprischer Phönicier war, immer noch das weitaus Wahrscheinlichere zu sein. Wo freilich dieses cyprische קרת חדשת, der Heimathsort des Bürgers der Stadt, dessen Grab in der Nähe von Limassol aufgedeckt wurde, zu suchen und wo es belegen, das ist dieser Inschrift nicht zu entnehmen. Es könnte ein Ort in der unmittelbaren Nähe des heutigen Limassol gewesen sein. Es ist aber ebenso wenig ausgeschlossen,

[1] Vergl. hierzu Meltzer, Gesch. der Karthager I (1879) S. 430.

dass der betreffende Bürger, dessen Inschrift bei Limassol gefunden wurde, ursprünglich gar nicht hier, sondern in einem anderen cyprischen Orte dieses Namens zu Hause war, und von der Existenz eines solchen (anderen?) cyprischen Ḳarti-ḫadas(š)ti wissen wir in der That.

Und damit kommen wir auf die zweite für uns wichtige cyprisch-phönicische Inschrift Corp. inscr. Sem. I. Tab. XII 86 B. (Commentar II S. 92 ss., insbes. S. 97). In dieser lesen wir B. Z. 6: לעבדאבסת הקרתחדשתי »dem Abdubast, dem von Ḳart-ḫadašt«. Die Inschrift wurde gemäss einer Notiz von C. P. Newton von Lieutenant Sinclair im Jahre 1879 in unmittelbarer Nähe von Larnaka in einem Schutthügel gefunden.[1] Die Frage entsteht, an welches Ḳart-ḫadašt-Karthago bei diesem Abdubast von »Karthago« zu denken ist: ob an das afrikanische oder an ein cyprisches? — Das Inschriftenwerk entscheidet sich für die erstere der beiden Möglichkeiten (p. 98 ad l. 6). Wir glauben, dass in diesem Falle so ziemlich alles für das cyprische, nichts für das afrikanische Karthago spricht. Mit Phönicien und Cypern stand Aegypten — auf das der Name der aegyptischen Göttin Bast hinweist —, seit den ältesten Zeiten in regster Beziehung und lebhaftestem Verkehr (unsere Inschrift wird von den Herausgebern des Corp. inscr. in die Zeit von 400—350 v. Chr. gesetzt). Ein Name, Ἀβδουβάστιος, wie er (s. das Citat des C. I. S. aus Waddington's inscr. grecques de Syrie) auf einer Inschrift in Sidon gefunden wurde, überrascht demnach auf einer aus Cypern stammenden Inschrift nicht. Von einem besonders lebhaften zwischen dem afrikanischen Karthago und Cypern bestehenden Verkehr anderseits wissen wir wenigstens nichts. Die Lage der Insel weist in erster Linie auf einen Verkehr mit den ägäischen Inseln bezw. Griechenland, mit der Süd- und Westküste Vorderasiens (Cilicien-Phönicien), endlich mit Aegypten hin; ein Verkehr mit dem nordafrikanischen Karthago wird jedenfalls jenem gegenüber nur ein secundärer gewesen sein. Eine Herkunft des Bürgers von Ḳart-ḫadašt-Karthago aus dem afrikanischen Karthago hat, wenn und da es ein cyprisches gemäss den assyrischen Inschriften sicher gab, wenig Wahrscheinlichkeit für sich.

Dem sonstigen Inhalte der Inschrift ist für die Frage, ob hier das afrikanische oder das cyprische Karthago gemeint sei, nichts zu entnehmen. Dass der Name Abdubast auch in dem afrikanischen

---

[1] »Near Larnaka is a mound of rubbish close to a stagnant pool of saltwater, which is believed the site of the ancient harbour of Kition. . . . . Among the antiquities found here (by Lieut. Sinclair) the most interesting are two pieces of calcareous stone, on one of which are 17 lines of Phoenician inscription on one side and 12 lines in the same charactar written in black on the other side . . . . . . On the other stone are four lines of Phoenician inscribed in red colour.« (Corp. inscr. sem. (Commentar) I, 92).

Karthago uns begegnet (C. I. S. l. c.), hat nichs Auffälliges: der Cultus der aegyptischen Göttin Bast wird eben überhaupt bei den Phöniciern heimisch gewesen sein, bei den eigentlichen Phöniciern nicht minder wie bei denen der Colonien in Afrika und Cypern.

Wir meinen durch die vorstehenden Ausführungen dargethan zu haben, dass einer Deutung des in den assyrischen Inschriften erwähnten cyprischen Ḳarti-ḫadas(š)ti auf die durch das heutige Larnaka bezeichnete Κίτιον nichts entgegensteht, diese Deutung durch den Fundort — Larnaka — der zweiten phönicischen Inschrift, in welcher einer Stadt קרתחדשת Erwähnung geschieht, noch erheblich bezüglich ihrer Richtigkeit verstärkt wird. Hienach glauben wir die Beziehung des keilinschriftlichen Ḳarti-ḫadas(š)ti auf die Stadt Κίτιον und die Deutung des Namens »Neustadt«, sei es als Name eines von Phöniciern erbauten Quartiers der »Altstadt« Κίτιον, sei es als »Neustadt« gegenüber einer in Phönicien belegenen »Altstadt«, als die weitaus wahrscheinlichste bezeichnen zu sollen.

Ausgegeben am 3. April.

1890.
XVIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

27. März. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Munk theilte Untersuchungen über die Fühlsphaere der Grosshirnrinde mit.

2. Hr. Klein sprach über eine Methode, ganze Krystalle oder Bruchstücke derselben zu Untersuchungen im parallelen und im convergenten polarisirten Lichte zu verwenden.

Die erste Mittheilung wird später veröffentlicht werden, die zweite folgt umstehend.



Über eine Methode, ganze Krystalle oder Bruchstücke derselben zu Untersuchungen im parallelen und im convergenten polarisirten Lichte zu verwenden.

Von Carl Klein.

Die in der Mineralogie gebräuchlichsten Methoden zur Erforschung der optischen Eigenschaften der Krystalle erfordern für das Studium derselben im parallelen sowohl, als auch im convergenten polarisirten Lichte je nach den Umständen dünne oder dicke planparallele Platten, hie und da Prismen, von natürlichen oder künstlich angeschliffenen Flächen gebildet, seltener kommen aussergewöhnlich günstig gestaltete, ganze Krystalle in Betracht.

Unter diesen Umständen mag es wohl befremdlich erscheinen, wenn ich anführe, dass ein gewöhnlicher Apophyllitkrystall, der äusseren Form nach von der Combination $P(111)$, $\infty P\infty(100)$, an dem einen Ende durch eine Spaltfläche $0P(001)$ begrenzt und mit dieser auf den Objectträger gestellt, in einem Polarisationsmikroskop mit Gypsblättchen versehen die Feldertheilung und in einem Polarisationsinstrument in jedem Felde den Axenaustritt und den Charakter der Mittellinie auf's Beste erkennen lässt und zwar immer, wenn der ganze Krystall, natürlich unter passenden Vorkehrungen, untersucht wird.

Sieht man von diesen zunächst ab, so gewährt die Benützung ganzer Krystalle oder grösserer Bruchstücke derselben mehrere wesentliche Vortheile:

1. Es findet eine Ersparniss an Material statt. Der ganze Krystall bleibt für anderweitige Betrachtungen erhalten; zeigt er sich ferner bei der Untersuchung aus irgend einem Grunde für das Detailstudium ungeeignet, so werden neben seiner Erhaltung auch Kosten und Mühe erspart, um Schliffe aus ihm herzustellen.

2. Man kann prüfen, wie sich der ganze Krystall optisch verhält und ist nicht den Veränderungen ausgesetzt, die das Schleifen und das damit Hand in Hand gehende Erwärmen beim Aufkitten

in seinen optischen Eigenschaften unter Umständen bewirken; dies ist besonders wichtig bei gewissen Zeolithen.

3. Man kann mit ganzen Krystallen oder Bruchstücken derselben arbeitend, in unglaublich kurzer Zeit eine Menge der interessantesten Praeparate anfertigen, was durch Schleifen die 20 bis 30fache Zeit in Anspruch nehmen und wodurch immer wieder das Material zerstört werden würde. Auch ist beim Arbeiten mit möglichst ganzen Krystallen eine auf sehr viel mehr Einzelfälle sich stützende Kenntniss von den Beziehungen zu gewinnen, die zwischen der äusseren Form und dem inneren Gefüge bestehen, als wenn nur Schliffe erforscht werden.

In Anbetracht dieser grossen Vortheile ist es zu verwundern, dass man nicht schon längst die überaus einfache Methode, vermöge deren man die Praeparate herrichtet, ganz allgemein zur Anwendung gebracht hat. Dieselbe besteht in Folgendem:

Man bringe den Krystall in der zu untersuchenden Stellung auf einen Objectträger, fixire ihn, hülle ihn sodann mit einem Medium von möglichst gleicher Brechbarkeit ein und gebe diesem zum Lichtein- und Austritt eine untere und obere, ebene Grenzfläche, parallel der Fläche des Objectträgers.[1]

Zum Fixiren kann man sich in vielen Fällen alten, zähen Canadabalsams bedienen, in den man den Krystall eindrückt. Als umhüllendes Medium ist ebenfalls öfters Canadabalsam zu gebrauchen, in anderen Fällen wird der Krystall mit einem Stückchen Glasrohr umgeben, in demselben fixirt und danach in das Röhrchen Canadabalsam oder eine stark brechende Flüssigkeit gegossen, so dass der Krystall um-

[1] Die Methode besteht danach in der Beseitigung der Totalreflexion durch ein den Krystall umgebendes, stärker als Luft brechendes, und, wie ich ausführe, dem Krystall an Brechbarkeit gleichkommendes Medium. In dieser vervollständigten Art ist die Methode meines Wissens noch nicht angewandt worden. Ohne diese Vervollständigung hat sie schon früher vielfach in Fällen, in denen man die Totalreflexion beseitigt haben wollte, Verwendung gefunden. So findet sie sich u. A. erwähnt in der Arbeit von Dr. Küch, Petrographische Mittheilungen aus den südamerikanischen Anden. N. Jahrb. f. Mineral. 1886. Bd. I. S. 44—45; dort dient sie dem Verfasser und dem mit ihm arbeitenden Dr. Tenne beim Studium mikroskopischer Quarze. Auch Prof. Groth erwähnt sie und führt sie weiter aus in seiner Edelsteinkunde 1887 S. 42 und 43, macht aber, wie die vorhin erwähnten Verfasser, keine allgemeine Anwendung von ihr auf die durchsichtigen Krystalle überhaupt. — Ich habe in der Absicht gewisse Zeolithe vor dem Schleifen auf das Vorhandensein optischer Abnormitäten zu prüfen mir den hier eingeschlagenen Weg ersonnen, zunächst ohne meine Vorgänger zu kennen. — Indem ich nach gehaltener Umschau in der Litteratur die Untersuchungen und Angaben derselben als Grundlagen meiner Mittheilung ansehen muss, glaube ich sowohl das Moment, dass ich den Krystall in einem Medium von gleichem oder annähernd gleichem Brechungsvermögen, wie es der Krystall besitzt, untersuche, als auch den Hinweis auf die weite Verwendbarkeit der Methode für mich in Anspruch nehmen zu dürfen.

hüllt und bedeckt wird. Geschieht dies, so ist der störende Einfluss der Flächen, Kanten und Ecken des Krystalls nicht nur verringert, sondern bei gleichen Brechungsverhältnissen von Krystall und umgebendem Medium aufgehoben.

Nehmen wir an, dass der zu untersuchende Krystall zu der vertical gestellten optischen Hauptrichtung keine Fläche normal habe, so werden die etwa vorhandenen anderen Flächen nur wenn sie in ihrer Lage jener ersten, nicht vorhandenen, ähnlich sind, ungefähr wirken wie diese. Für gewöhnlich sind aber Flächen solcher Lage nicht vorhanden, sondern andere, die stärkere Neigung zur Horizontalebene haben.

Im Falle des Apophyllits z. B. bilden die Flächen von $P(111)$ mit der Axe c einen Winkel von je $29° 32'$, folglich kommt ein bei Anwendung parallel polarisirten Lichts parallel c die Pyramidenfläche treffender Strahl gegen das Einfallsloth der Fläche unter $60° 28'$ an. Da nun, wenn der mittlere Brechungsexponent des Apophyllits $n = 1.53$ gesetzt wird, der Grenzwinkel $40° 49'$ ist, so muss bei einem Einfallswinkel von $60° 28'$ totale Reflexion stattfinden, insofern Luft den Krystall umgiebt.

Wird nun der Krystall in Canadabalsam $n = 1.536$ getaucht, so fällt durch dessen Umhüllung das früher den Krystall umgebende, schwächer brechende Medium, Luft, fort und die Erscheinung kann wie in einer Spaltplatte des Minerals, oder als ob dasselbe eine Basisfläche hätte, beobachtet werden, zumal Balsam und Krystall von sehr ähnlichen Brechungsverhältnissen sind und somit ersterer um letzteren eine isotrope Hülle nahezu gleicher Brechbarkeit bildet.

Um zweckmässig Untersuchungen anstellen zu können, dürfen die Krystalle nicht zu gross sein, sie müssen sich als durchsichtig, mindestens aber als stark durchscheinend erweisen: dann kann man mit der Methode erforschen:

1. Die Coincidenz oder Nichtcoincidenz der Hauptauslöschungsrichtungen des Lichts mit den Krystallkanten und in Folge dessen das Krystallsystem.

2. Die optische Structur der Krystalle, namentlich ob sie einheitlich gebildet oder feldergetheilt sind, ferner die näheren Verhältnisse der Felder im Einzelnen feststellen und zwar sowohl im parallelen, als auch im convergenten polarisirten Licht.

Die Bestimmungen im ersten Falle werden namentlich da Platz greifen, wo nur spärliches Material, kleine, vielleicht abgebrochene Krystalle, die man nicht mehr schleifen kann oder will, vorhanden sind.

Nehme ich z. B. an, es sei an einem Fragmente eine Kante vorhanden und zwei Flächen derselben anliegend, so lege man die

Kante parallel der Fläche des Objectträgers, richte sie von vorn nach hinten und lasse die ihr anliegenden Flächen gleichmässig zur Rechten und Linken abfallen.[1] Der Krystall sei überdies mit seinem abgebrochenen Untertheil in Canadabalsam eingebettet.

Wird der so justirte Krystall auf den Tisch des Instrumentes gebracht, dessen Nicols gekreuzt sind, so beobachtet man entweder:

a) Dunkelheit, wenn die Kante mit den anliegenden Flächen in eine der Polarisationsebenen der gekreuzten Nicols kommt.

Beispiel: Baryt. Kante $\frac{1}{2}P\bar{\infty}$ (102): $\frac{1}{2}P\bar{\infty}$ $(10\bar{2}) = 77° 43'$.

b) Dunkelheit, wenn die Kante mit den anliegenden Flächen einen Winkel mit jenen Richtungen bildet.

Beispiel: Adular. Kante ∞P (110): ∞P $(\bar{1}10) = 61° 13'$.

c) Dunkelheit auf der einen Hälfte, Helligkeit auf der anderen, wenn die Kante einen gewissen Winkel mit besagten Richtungen einschliesst.

Beispiel: Epistilbit. Zwilling nach $\infty P\bar{\infty}$ (100). Kante, gebildet von ∞P (110): $\underline{\infty P}$ $(\underline{\bar{1}10}) = 46° 3'$.

Wie viele zu einander senkrechte Richtungen man zu untersuchen habe, um das Krystallsystem festzustellen, versteht sich nach den Lehren der Krystalloptik von selbst; bemerkt mag nur noch werden, dass die Methode in einzelnen wichtigen Fällen Anwendung finden kann, wo andere Methoden versagen, so z. B. bei der Unterscheidung von monoklinem Augit und Hypersthen, wenn die Krystalle zu den Prismenflächen der parallelen Gegenflächen entbehren und nur z. B. mit zwei Flächen, die unter einem stumpfen Winkel zu einander neigen, deutlich entwickelt sind.

Die Bestimmungen im zweiten Falle werden ganz besonders schöne Resultate liefern, wenn die Krystalle eine von oben nach unten durchlaufende, senkrecht zur Horizontalebene stehende Feldertheilung besitzen; z. B. Apophyllit, Phakolith, Amethyst. Etwas weniger ausgezeichnet erweisen sich die Krystalle, bei denen die Sectoren zur Horizontalebene ganz oder zum Theil geneigt sind, z. B. Milarit, Chabasit, Faujasit, Analcim; immerhin können hier noch bei Anwendung kleinerer Krystalle sehr schöne Praeparate erhalten werden. — Selbstverständlich nicht geeignet ist die Methode für Krystalle, die einem sehr complicirten Zwillingsaufbau in zarten Lamellen und schiefer Durchkreuzung derselben ihre Structur verdanken, wie Boracit, Perowskit und viele Leucite. — Hier kann man aber sofort erkennen, dass ein solcher Aufbau vorliegt.

[1] Wenn dies aus freier Hand nicht gehen sollte, so ist es leicht mittelst einer den vollkommenen neueren Mikroskopen beigegebenen Einstellvorrichtung zu erreichen.

In allen Fällen, in denen durch die Methode der Aufbau der Krystalle klar wird, lässt sich am ganzen Krystall auch noch erkennen, ob die Doppelbrechung in allen Theilen gleichmässig ist, oder ob und wo sie sich besonders verstärkt zeigt. Das Bild, was hierdurch erreicht wird, übertrifft an Wirkung das der Einzelschnitte oftmals bedeutend.

Abgesehen von den bis jetzt vorwiegend betrachteten abnormen Erscheinungen können auch mit der genannten Methode normale studirt werden. Sie eignet sich vortrefflich zur Darstellung des Axenaustritts der Krystalle. Dieselben brauchen nur die geforderte Grösse und Durchsichtigkeit zu haben und es muss ein Medium vorhanden sein, was ebenso stark bricht wie sie. Werden sie in dieses Medium so eingetaucht, dass dasselbe sie allseitig umgiebt, so tritt das Relief der Kanten und Ecken wie bekannt zurück, die ganze Disposition wirkt als ob der Krystall von einer senkrecht zur Verticalrichtung stehenden Fläche oben und unten begrenzt wäre. Stehen die optischen Richtungen im Krystalle so, dass sie zu jenen Flächen die geforderte Lage haben, so kann man beobachten, ähnlich wie bei richtig angeschliffenen Flächen.

In dieser Weise zeigen, richtig gestellt und in Canadabalsam, resp. in Monobromnaphtalin eingesenkt, Quarz (Amethyst) in gewöhnlicher Krystallform und Kalkspath als Spaltrhomboeder genommen, die bekannten Axenerscheinungen, bez. Circularpolarisation, Airy'sche Spiralen u. s. w. Von optisch zweiaxigen Krystallen wurden Topas (ohne Basis, aber mit vorherrschendem Doma $4P\breve{\infty}$ [041]), ferner Baryt (mit dem Doma $\frac{1}{2}P\bar{\infty}$ [102]), dann Gyps (mit ∞P [110], $-P$ [$\bar{1}$11], $\infty P\breve{\infty}$ [010]), endlich Adular (mit ∞P [110] und $0P$ [001]) geprüft, — alle zeigten deutlichen Axenaustritt. Derselbe erlaubt sowohl ein Urtheil über die Art der Dispersion der Axen, als auch über die der Mittellinien ohne weitere Vorbereitung, selbst bei Anwendung von Medien zu gewinnen, die nur ungefähr von demselben Brechungsverhältniss sind als der betreffende Krystall in der gegebenen Richtung es erfordert. Die Resultate werden noch in anderer Weise verwerthbar sein, wenn erst genau gleich brechende Medien und vollkommen im Gleichgewicht ausgebildete Krystalle zur Verwendung kommen können, worüber nähere Untersuchungen vorbehalten bleiben mögen.

Der grosse Vortheil der Methode für eine rasche Orientirung tritt durch das Vorgeführte gebührend zu Tage und es sei nur noch bemerkt, dass dieselbe auch praktisch zur Erkennung der Edelsteine, besonders in Bezug auf Axenaustritt, wenn solcher in Frage kommt, Verwendung finden kann. Der vom Steinschleifer gewöhnlich nicht

nach krystallographischen Principien mit Facetten umkleidete Stein wird in eine Flüssigkeit gebracht, in der sein Relief verschwindet, die also mit ihm gleiches Brechungsverhältniss hat. Die früher dem Axenaustritt unter Umständen hinderlichen Flächen, Ecken und Kanten treten zurück und wird nun durch Drehen der Krystall in die erforderliche Lage gebracht, dass die optische Axe oder die erste Mittellinie derselben zur Flüssigkeitsoberfläche normal steht, so kann man das Axenbild ungehindert beobachten. — Andere Anwendungen, wie Prüfungen von Bergkrystallen zu optischen Instrumententheilen, verstehen sich von selbst.

Aus dem Vorgetragenen erhellt, dass die neue Methode ungemein vieler Anwendungen fähig ist. Neben ihr können selbstverständlich die seither im Gebrauch gewesenen nicht entbehrt werden; sie tritt aber diesen hinzu, sie ergänzend und unterstützend bei dem Bestreben, den Bau der Krystalle zu erforschen.

Ausgegeben am 3. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1890.
XIX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

10. April. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Schwendener las über die Mestomscheiden der Gramineenblätter.

Die Mittheilung wird in einem der nächsten Stücke erscheinen.

2. Die physikalisch-mathematische Classe hat bewilligt: 2000 Mark dem Privatdocenten Hrn. Dr. Will in Rostock zu einer Reise nach den Balearen und nach Algier, um die Entwickelung der Geckonen und verwandter Formen zu verfolgen; 500 Mark dem Director Hrn. Prof. Dr. Harzer in Gotha zur Bezahlung von Hülfsarbeitern bei der Berechnung einer an der Herzoglichen Sternwarte angestellten Beobachtungsreihe; 2000 Mark Hrn. Dr. von Rebeur-Paschwitz, gegenwärtig auf Teneriffa, zur Fortsetzung seiner Versuche über Schwankungen der Lothlinie in Wilhelmshafen und auf Teneriffa; 3600 Mark Hrn. O. Jesse in Steglitz bei Berlin zur fortgesetzten Beobachtung und zum Photographiren der leuchtenden Nachtwolken von verschiedenen Standörtern aus.

Zur Thermodynamik der Atmosphaere.

Von Wilhelm von Bezold.

(Vorgetragen am 17. October 1889 [St. XL].)

Dritte Mittheilung.

Luftmischung. Wolken- und Niederschlagsbildung.

In den beiden früher veröffentlichten Abhandlungen über den oben bezeichneten Gegenstand[1] wurde stets die beschränkende Voraussetzung gemacht, dass die betrachteten Luftmengen keinerlei Mischung mit solchen von anderer Temperatur und anderem Feuchtigkeitsgehalte erfahren. Zugleich wurde jedoch darauf hingewiesen, dass solche Mischungen in der Natur häufig vorkommen müssen, und dass die betreffenden Untersuchungen immer nur eine beschränkte Allgemeinheit besitzen können, so lange man diese Vorgänge unberücksichtigt lässt.

Es ist deshalb schon aus diesem Grunde nothwendig, die früheren Untersuchungen nach dieser Richtung hin zu ergänzen.

Zugleich aber können Untersuchungen über diese Fragen ein besonderes Interesse deshalb beanspruchen, da man lange Zeit hindurch der Mischung ungleich warmer, der Sättigung nahe stehender Luftmengen eine viel zu hohe Bedeutung beimaass, während man in neuester Zeit wohl in das entgegengesetzte Extrem verfiel und derselben beinahe gar keine Beachtung mehr schenkt.

Man betrachtete nämlich bis vor wenigen Jahrzehnten die Mischung solcher Luftmengen nach dem Vorgange von James Hutton[2] als die Hauptquelle der atmosphaerischen Niederschläge.

Gegen diese Anschauung, welche übrigens auch heute noch eine weit verbreitete ist, hat meines Wissens zuerst Wettstein[3] Stellung genommen. Er verfiel jedoch dabei in den entgegengesetzten Fehler, indem er geradezu bestritt, dass durch Mischung überhaupt jemals Niederschläge entstehen könnten.

[1] Diese Berichte f. 1888 S. 485—522 u. S. 1189—1206.
[2] Edinb. Trans. I. für 1788. S. 41—86. Edinb. 1808.
[3] Vierteljahrsschrift d. naturf. Gesellschft. i. Zürich. 14. Jahrg. S. 60—103. 1869.

Erst Hann hat auch hier, wie in so vielen Punkten der modernen Meteorologie Klarheit geschaffen, indem er im Jahre 1874 nachwies,[1] dass durch Mischung zwar Condensationen hervorgerufen werden können, dass jedoch die ältere Methode für die Berechnung der ausgeschiedenen Mengen mit einem principiellen Fehler behaftet war, nach dessen Beseitigung die erhaltenen Werthe so klein werden, dass die Erzeugung einigermaassen ergiebiger Niederschläge auf diesem Wege unmöglich ist.

Zugleich zeigte er, dass die adiabatische Expansion in dieser Hinsicht eine ganz andere, viel bedeutendere Rolle spiele, und dass man in ihr die Quelle aller ausgiebigeren Niederschläge zu erblicken habe.

Hierbei beschränkte er sich, sofern es sich um Mischung handelt, auf die Berechnung eines Beispieles, aus welchem hervorgeht, dass selbst unter sehr gewagten Annahmen auf diesem Wege doch immer nur ganz geringe Niederschlagsmengen erzielt werden können.

In umfassenderer Weise trat mehrere Jahre später Pernter[2] an die Lösung der Aufgabe heran, indem er sie in scharf mathematische Form brachte und zugleich auch einige kleine Zahlentabellen berechnete, um den Überblick über die in Frage kommenden Grössen zu erleichtern.

Da jedoch die empirische Formel für die Spannkraft der Wasserdämpfe in die von Hrn. Pernter gegebenen Ausdrücke eintritt, so werden sie ziemlich verwickelt und entbehren der Durchsichtigkeit.

Es schien mir deshalb nicht nur wünschenswerth, sondern geradezu nothwendig, die Frage von Neuem aufzunehmen, und sie womöglich einem gewissen Abschluss entgegenzuführen.

Dies ist der Zweck der nachstehenden Zeilen.

Es soll gezeigt werden, wie sich wiederum an der Hand graphischer Darstellung ausserordentlich leicht ein Einblick in die ganze Lehre von der Luftmischung gewinnen lässt, und wie man in derselben zugleich ein höchst einfaches Mittel für die numerische Auswerthung der in Frage kommenden Grössen besitzt.

Verschiedene Tabellen, von denen einige auch bei anderen Untersuchungen willkommen sein dürften, werden sowohl den Überblick als auch die Berechnungen noch weiter erleichtern.

Nach diesen Vorbereitungen sollen die verschiedenen Ursachen der Niederschlagsbildung nämlich die directe Abkühlung, die adiabatische Expansion und die Mischung in ihrer gegenseitigen Bedeutung

[1] Österr. Ztschft. f. Met. Bd. IX. S. 292—296. 1874.

[2] Österr. Ztschft. Bd. XVII. S. 421—426. 1882.

betrachtet und gezeigt werden, wie es nur unter Berücksichtigung all' dieser Momente möglich sein wird, in das Wesen der Wolkenbildung einen tieferen Einblick zu gewinnen.

a. Die Mischung ungleich warmer feuchter Luftmengen.

Bevor man an die mathematische Behandlung dieser Aufgabe herantritt, muss man sich vor Allem darüber klar werden, ob man bestimmte Massen oder bestimmte Volumina der Rechnung zu Grunde legen will.

Auf den ersten Blick scheint es zweckmässig, das letztere zu thun, da man aus den bekannten Tabellen unmittelbar erfährt, welche Wassermengen bei der Sättigung in der Volumeneinheit enthalten sind.

Hierin lag wohl auch der Grund, weshalb man bei den älteren auf Hutton's Theorie gestützten Untersuchungen über diese Fragen stets von der Betrachtung der Volumina ausging und weshalb auch Hann als er die Mängel dieser Theorie nachwies, bei seinen Überlegungen sich in dieser Hinsicht noch an die frühere Behandlungsweise anschloss, d. h. ebenfalls Volumina zu Grunde legte.

Dies ist auch ganz berechtigt, sofern es sich um erste Schätzungen handelt, und habe ich auch selbst noch vor Kurzem bei einer populären Darstellung das gleiche Verfahren angewendet.

Sowie man jedoch exacte Formeln aufstellen will, geräth man hierbei in Schwierigkeiten. Diese rühren daher, dass die Wärmecapacität der Volumeneinheit, die sogenannte Volumencapacität selbst ohne Berücksichtigung des beigemischten Wasserdampfes in hohem Grade von Druck und Temperatur beeinflusst wird, so dass hier keinerlei Vernachlässigungen statthaft sind. Die Wärmecapacität der Masseneinheit feuchter Luft, also ihre Wärmecapacität im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist von den eben genannten Grössen ganz unabhängig, und wird auch von dem Wassergehalt innerhalb der in der Meteorologie zu berücksichtigenden Grenzen so wenig beeinflusst, dass man sie, wie später genauer begründet werden soll, bei der hier vorliegenden Frage einfach als Constante betrachten darf.

Um jedoch des Vorzuges nicht verlustig zu gehen, den der Anschluss an vorhandene Tabellen gewährt, habe ich die Menge Wasserdampfes, welche im Kilogramm gesättigter feuchter Luft bei verschiedenen Drucken enthalten ist, innerhalb des in der Meteorologie zu berücksichtigenden Temperaturintervalles für verschiedene Drucke von Grad zu Grad berechnet, und die so gewonnenen Tabellen im Anhang mitgetheilt.

Diese Tabellen erleichtern nicht nur die Lösung der auf Mischung feuchter Luft bezüglichen Fragen sehr wesentlich, sondern sie lassen sich auch bei vielen anderen Untersuchungen mit Vortheil verwenden.

Nach diesen Einleitungen soll nun der Aufgabe selbst näher getreten, und zu dem Zwecke vor Allem passende Bezeichnungen eingeführt werden.

Es seien:

m_1 und m_2 die zu mischenden Luftmengen in Kilogrammen;
t_1 und t_2 ihre Temperaturen;
y_1 und y_2 die im Kilogramme feuchter Luft jeweils thatsächlich enthaltenen Dampfmengen in Grammen;
y'_1 und y'_2 die entsprechenden Werthe im Zustande der Sättigung;
R_1 und R_2 die zugehörigen Werthe der relativen Feuchtigkeit in Procenten;
ρ_1 und ρ_2 die nämlichen Grössen in Bruchtheilen der Einheit, d. h. $\rho_1 = \frac{R_1}{100}$ und $\rho_2 = \frac{R_2}{100}$;
t_3, y_3, y'_3, R_3 und ρ_3 die verschiedenen Werthe der eben aufgezählten Grössen im Gemische, sofern die Sättigungsgrenze nicht überschritten, oder wenigstens kein Wasser ausgeschieden wurde, d. h. wahre Übersättigung vorhanden ist;
t, y, y', R und ρ die entsprechenden Werthe nach erfolgter Mischung und nach dem Ausscheiden des die normale Sättigungsmenge überschreitenden Wassers oder auch eine beliebige Gruppe zusammengehöriger Werthe der genannten Grössen.

Der Druck, in Millimetern Quecksilber gemessen, soll ebenso wie früher durch β bezeichnet werden, das Maximum der Spannkraft des Wasserdampfes in entsprechender Weise durch ε.

Der Druck β darf während des Mischungsvorganges als constant betrachtet werden.

Zwei zur Mischung kommende Luftmengen müssen nämlich dort, wo die Mischung thatsächlich erfolgt, nothwendiger Weise unter nahezu gleichem Drucke stehen und muss dieser auch erhalten bleiben, wenn bei der Mischung eine — im Allgemeinen nur sehr unbedeutende — Änderung des Gesammtvolumens eintritt.

Das Mischungsproblem gestaltet sich nun ungemein einfach, so lange noch keine Ausscheidung von Wasser stattgefunden hat, d. h. so lange die bei der Mischung erzielten Grössen durch den Index 3 zu kennzeichnen sind.

Alsdann ist nämlich

$$y_3(m_1 + m_2) = y_1 m_1 + y_2 m_2$$

oder

$$(1) \qquad m_1(y_3 - y_1) = m_2(y_2 - y_3)$$

und ferner:

$$c_1 m_1(t_3 - t_1) = m_2 c_2(t_2 - t_3),$$

wenn man unter c_1 und c_2 die Wärmecapacitäten der zu mischenden Luftmengen versteht[1], oder, da diese als gleichwerthig zu betrachten sind,

$$(2) \qquad m_1(t_3 - t_1) = m_2(t_2 - t_3).$$

Vereinigt man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1}$$

d. i. die bekannte Gleichung, wie sie für die Mischung zweier verschieden temperirter Mengen der nämlichen Flüssigkeit gilt.

Da für die weitere Entwickelung die graphische Darstellung gewählt werden soll, so muss vor Allem diese einfache Formel in das geometrische Bild übersetzt werden.

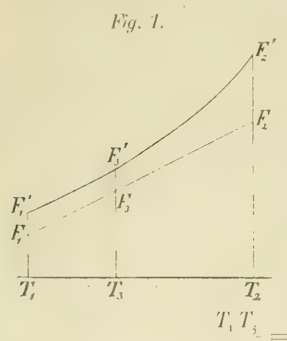


Fig. 1.

Trägt man zu dem Zwecke (Fig. 1) in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme die Temperaturen t als Abscissen auf, die Dampfmengen y als Ordinaten, und bezeichnet man dieselben in selbstverständlicher Weise durch OT_1, $OT_2 \ldots T_1F_1$, T_2F_2 u. s. w., wobei jedoch der Punkt O in der Figur weggelassen ist, so übersieht man sofort, dass F_3 auf der durch F_1 und F_2 gezogenen Geraden liegt, und dass

$$\frac{T_1T_3}{T_2T_3} = \frac{T_3F_3 - T_1F_1}{T_2F_2 - T_3F_3} = \frac{m_2}{m_1} \text{ ist.}$$

Um nun ein Urtheil über den Sättigungsgrad zu gewinnen, muss man neben den Werthen von $y_1 y_2$ und y_3 noch die zugehörigen, der vollen Sättigung entsprechenden y_1', y_2' und y_3' ebenfalls als Ordinaten in das Diagramm eintragen. Die Endpunkte dieser Ordinaten, die durch F_1', F_2', F_3' bezeichnet werden sollen, liegen sämmtlich auf einer Curve, die mit wachsendem t stark ansteigt, und für welche die Gleichung

$$y = .623 \frac{\varepsilon}{\mathfrak{B} - 0.377\,\varepsilon}$$

gilt[2], wenn man für $\mathfrak{B}$ den betreffenden constanten Druck einsetzt.

[1] Streng genommen hätte man nach besonderer Formel zu bildende Mittelwerthe zwischen den eben genannten und jenem des Gemisches c_3 anzuwenden. Da jedoch die Werthe von c sich für die verschiedenen Temperaturen und Drucke kaum von einander unterscheiden, so kann man hiervon Umgang nehmen.

[2] Hann, Österr. Zeitschr. Bd. IX S. 324.

Mit Hülfe dieser Gleichung, bez. mit der durch Umformung erhaltenen Näherungsformel

$$y = 623\frac{\varepsilon}{\beta} + 234.88\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2$$

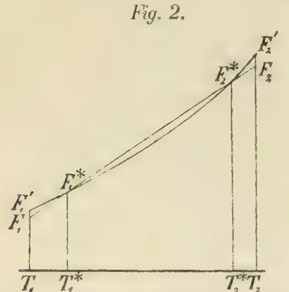
sind die im Anfange mitgetheilten Tabellen berechnet, mit deren Hülfe man die Curven, die man als Curven der Sättigungsmengen für den Druck β bezeichnen könnte, für die dort berücksichtigten Drucke unmittelbar leicht construiren kann.

Es genügt nun, einen Blick auf die Figur zu werfen, um sofort die nachstehenden Sätze zu erhalten:

1. So lange für gegebene Temperaturen t_1 und t_2 die Werthe $\frac{y_1}{y_1'} = \rho_1$ und $\frac{y_2}{y_2'} = \rho_2$ unterhalb gewisser Grenzen bleiben, verläuft auch die Gerade F_1F_2 ganz unterhalb der Curve der Sättigungsmengen, und giebt es demnach kein Mischungsverhältniss, bei welchem Condensation eintreten könnte.

2. Wenn ρ_1 und ρ_2 soweit wachsen, dass die Gerade F_1F_2 die Curve der Sättigungsmengen berührt oder schneidet, (Fig. 2) so giebt es ein, bez. unendlich viele Mischungsverhältnisse, welche Condensation im Gefolge haben.

Fig. 2.



3. Wenn $R_1 = R_2 = 100$ ist, d. h. wenn die beiden zu mischenden Luftmengen gesättigt sind, so fällt die Gerade F_1F_2 mit der Geraden $F_1'F_2'$ zusammen und dann tritt bei jeder Mischung Übersättigung oder Condensation ein.

Die Untersuchung der unter 2 inbegriffenen Fälle lässt sich jederzeit auf den Fall 3 zurückführen, da die Punkte F_1^* und F_2^*, in welchen die Gerade F_1F_2 im zweiten Falle die Curve $F_1'F_2'$ schneidet, genau dieselbe Rolle spielen wie F_1 und F_2 im Falle 3.

Betrachtet man die eben aufgestellten Sätze genauer, so wird man unwillkürlich darauf geleitet, gewisse Grenzwerthe aufzusuchen, deren Kenntniss zur Lösuug der Grundfrage führt, ob unter gegebenen Bedingungen überhaupt Condensation möglich sei oder nicht.

Die Fragen, welche sich in dieser Richtung aufdrängen, lauten:

1. Welche Beträge muss die relative Feuchtigkeit bei gegebenen Temperaturen der Componenten wenigstens bei einer derselben überschreiten, wenn bei richtig gewähltem Mischungsverhältniss Condensation möglich sein soll?

2. Welchen Grenzwerth muss die relative Feuchtigkeit der einen Componenten überschreiten, wenn jene der anderen gegeben ist, und wenn wieder bei richtig gewähltem Mischungsverhältniss Condensation möglich sein soll?

Die erste dieser beiden Fragen lässt sich auch in die Form bringen:

Welches ist bei gleichem relativem Feuchtigkeitsgehalte beider Componenten der Minimalwerth dieses Gehaltes, wenn die Sättigungsgrenze bei passendem Mischungsverhältniss eben erreichbar sein soll?

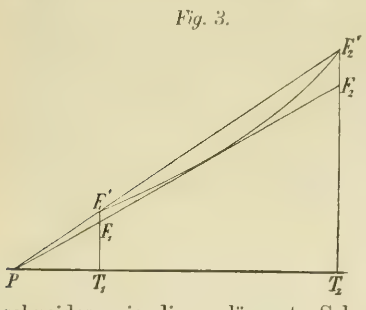


Fig. 3.

Dass mit der Angabe dieses Minimalwerthes auch die Frage 1 gelöst ist, übersieht man am besten, wenn man der Beantwortung der zuletzt formulirten wirklich näher tritt.

Man erhält diese sehr leicht durch nachstehende Betrachtung:

Soll $R_1 = R_2$ sein, so muss die Gerade $F_1 F_2$ die Abscissenaxe in demselben Punkte P (Fig. 3) schneiden wie die verlängerte Sehne $F_1' F_2'$.

Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, so ist auch

$$\frac{T_1 F_1}{T_1 F_1'} = \frac{T_2 F_2}{T_2 F_2'}$$

nun ist aber

$$\frac{T_1 F_1}{T_1 F_1'} = \frac{y_1}{y_1'} = \rho_1 = \frac{R_1}{100}$$

und

$$\frac{T_2 F_2}{T_2 F_2'} = \frac{y_2}{y_2'} = \rho_2 = \frac{R_2}{100}$$

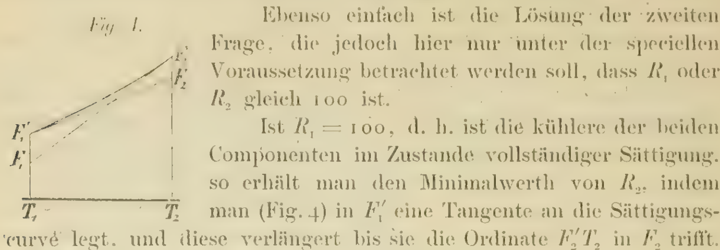
und mithin auch $R_1 = R_2$

Soll nun für einen bestimmten Werth von $R_1 = R_2$, der R_0 heissen mag, durch geeignete Mischung eben noch der Sättigungspunkt erreichbar sein, dann muss die Gerade $PF_1 F_2$ die Curve der Sättigungsmengen $F_1' F_2'$ eben noch berühren.

Der Berührungspunkt S giebt alsdann die Mischungstemperatur, bei welcher die Sättigung gerade erreicht wird, und damit auch das Mischungsverhältniss.

Der Werth R_0 aber muss, wie die Figur auf den ersten Blick lehrt, wenigstens bei einer der Componenten überschritten werden, wenn wirklich Condensation möglich sein soll, und er ist demnach eben jener Grenzwerth, nach welchem unter 1. gefragt wurde.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Kenntniss dieses Grenzwerthes eine hohe Bedeutung besitzt und wurde derselbe deshalb auch in später mitzutheilenden Tabellen sorgfältigst berücksichtigt.



Ebenso einfach ist die Lösung der zweiten Frage, die jedoch hier nur unter der speciellen Voraussetzung betrachtet werden soll, dass R_1 oder R_2 gleich 100 ist.

Ist $R_1 = 100$, d. h. ist die kühlere der beiden Componenten im Zustande vollständiger Sättigung, so erhält man den Minimalwerth von R_2, indem man (Fig. 4) in F_1' eine Tangente an die Sättigungscurve legt, und diese verlängert bis sie die Ordinate $F_2'T_2$ in F_2 trifft. $100\frac{F_2T_2}{F_2'T_2} = R_2$ ist der gesuchte Werth. Sowie R_2 diesen Grenzwerth übersteigt, treten bei der Mischung Condensationen ein, sofern nur die kühlere Componente hinreichend stark vertreten ist d. h. sofern $\frac{m_1}{m_2}$ gross genug ist.

Nimmt man jedoch den anderen Fall als gegeben an und setzt man voraus, dass $R_2 = 100$ sei, d. h. dass die wärmere Componente gesättigt sei, dann findet man R_1, indem man in T_2' eine Tangente an die Curve legt, und den Durchschnitt derselben mit der Ordinate $F_1'T_1$ sucht.

Hiebei springt sofort in die Augen, dass R_1 immer kleiner als R_2 ist, ja dass bei hinreichend grossem Unterschiede zwischen T_1 und T_2 die Grösse R_1 sogar negative Werthe annehmen könnte, wenn solche überhaupt denkbar wären.

Physikalisch gedeutet heisst dies: wenn warme gesättigte Luft mit kühlerer gemischt wird, so kann die letztere einen hohen Grad von Trockenheit besitzen und trotzdem bei richtigem Mischungverhältniss Condensation eintreten, ja es darf in vielen Fällen die kühlere Luft absolut trocken sein, ja sie dürfte einem negativen R_1 entsprechend bis zu einem gewissen Maasse sogar noch hygroskopische Substanzen enthalten, sofern nur die warme in hinreichender Menge vertreten, d. h. sofern $\frac{m_2}{m_1}$ gross genug ist.

In solchen Fällen tritt demnach an die Stelle des Minimalwerthes R_1 ein Grenzwerth von $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, welcher überschritten werden muss, wenn Condensation eintreten soll.

Diese Überlegungen lehren, dass Mischungen gesättigter warmer Luft mit ungesättigter kühler weit leichter zu Condensationen Veran-

lassung geben können, als solche von gesättigter kühler mit trockener warmer Luft.

Das Einströmen eines Strahles gesättigter warmer Luft in einen kühlen Raum muss demnach von viel kräftigeren Condensationen begleitet sein, als das Einströmen von gesättigter kalter Luft in einen Raum, der mit ungesättigter warmer Luft erfüllt ist.

Die Thatsache, dass über jedem offenen Gefässe mit warmem Wasser so leicht Dampfwolken entstehen, während Nebelbildung bei sehr kalten Körpern in wärmerer Umgebung viel seltener zu beobachten ist, bildet einen Beleg dafür.

Sowie bei einigermaassen kühlerem Wetter die Thüre einer Waschküche geöffnet wird, treten mächtige Dampfwolken aus, das Öffnen eines Eiskellers an heissen Tagen hat nicht die gleichen Folgen.

Nachdem so die Grenzen bestimmt sind, innerhalb deren überhaupt Mischung eintreten kann, handelt es sich nunmehr darum, die Menge anzugeben, welche bei der Condensation zur Ausscheidung kommen kann. Solche Ausscheidung kann eintreten, so oft der Punkt F_3 oberhalb der Curve der Sättigungsmengen zu liegen kommt.

Alsdann ist nämlich die Sättigungsgrenze überschritten und zwar um einen Betrag, der durch die Länge $F_3 F_3' = y_3 - y_3'$ dargestellt wird.

Diese Menge, welche durch a_3 bezeichnet werden soll, war es nun, von welcher man vor Wettstein und Hann annahm, dass sie bei der Mischung als Wasser herausfalle.

Dass und in welchem Maasse man bei dieser Annahme fehlte, dies übersieht man am leichtesten eben an der Hand der Figur durch folgende Betrachtung:

Gesetzt es sei bei der Mischung zuerst thatsächlich Übersättigung eingetreten und sei die ganze Menge y_3 wirklich dampfförmig (als Wassergas) vorhanden, so wird allmähliches Ausscheiden des Dampfes gleichzeitig mit Erwärmung verbunden sein.

Die hierdurch bedingte Temperaturzunahme ergiebt sich aus der Gleichung

$$1000\, c dt = -r dy,$$

wo c die Wärmecapacität der feuchten Luft (bei constantem Druck) und r die Verdampfungswärme ist, und wobei man c mit 1000 zu multipliciren hat, da wir uns ein Kilogramm Gemisch gegeben denken, während y in Grammen ausgedrückt ist.

Da nun, wie später ersichtlich sein wird, die Temperatur t auch bei erheblichen Übersättigungen nur um wenige Grade steigt, so darf man $\frac{c}{r}$ in jedem einzelnen Falle als constant ansehen und erhält dementsprechend

$$(3) \qquad y_3 - y = \frac{10^3 c}{r}(t - t_3),$$

wenn man unter y und t die Werthe versteht, welche nach Ausscheidung des die Sättigungsgrenze übersteigenden Wassers erhalten werden.

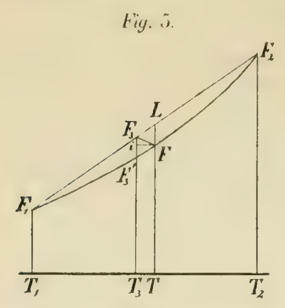


Fig. 5.

Man findet demnach in der Figur (Fig. 5) diese Temperatur t in höchst einfacher Weise indem man durch F_3 eine Gerade zieht, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{10^3 c}{r}$ bildet.

Der Punkt F, in welchem diese Gerade die Curve der Sättigungsmengen schneidet, besitzt alsdann die gesuchten Coordinaten t und y, während die ausgeschiedene Wassermenge $a = y_3 - y$ ist, eine Grösse, die in der Figur durch die kleine Strecke $F_3 i$ dargestellt ist.

Nach der alten Theorie glaubte man t_3 und t, sowie y_3' und y' oder was das nämliche ist, y_3' und y identificiren zu dürfen.

Hier sieht man, wie schon Hann an dem bestimmten Beispiele gezeigt hatte, dass dies nicht der Fall ist, sondern dass $t > t_3$ und $y > y_3'$ ist, und dass dementsprechend auch die thatsächlich bei der Mischung im günstigsten Falle zur Ausscheidung kommende Wassermenge

$$a = y_3 - y < a_3$$

ist, d. h. kleiner als man sie früher zu berechnen pflegte.

Da nun $y = f(t)$, so kann man die Gleichung [3] auch in die Form bringen

$$t = t_3 + K\,(y_3 - f(t)),$$

wobei $K = \frac{r}{1000\,c} = \cot \alpha$, und für $f(t)$ ein empirischer Ausdruck zu setzen ist.

Dem letzteren könnte man bei der hier erforderlichen Genauigkeit jederzeit die Form

$$f(t) = y_3 + A\,(t - t_3) + B\,(t - t_3)^2$$

geben, so dass es sich nur um die Lösung einer Gleichung zweiten Grades handeln würde.

Immerhin wäre die Rechnung eine ziemlich umständliche und ist es deshalb entschieden vorzuziehen, diese graphisch auszuführen,

da dies rasch und mühelos geschehen kann und alle praktisch erforderliche Genauigkeit gewährt.

Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei der Umstand, dass man K im Allgemeinen als eine Constante betrachten kann, der man nur zwei verschiedene Werthe beizulegen hat, je nachdem es sich um Temperaturen über oder unter 0° handelt.

Bisher war nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dass die Temperaturen über 0 lägen, wird diese Voraussetzung hinfällig, dann tritt an die Stelle von $\frac{r}{c}$ der Werth $\frac{r+l}{c}$, wo l die Schmelzwärme des Eises ist.

Sofern man jedoch den Schmelzpunkt nicht überschreitet, kann man K getrost als constant ansehen, wie die folgende Überlegung zeigt:

Für c gilt die Gleichung

$$c = 0.2375 + 0.00024 y,$$

von deren höchst einfacher Ableitung hier wohl Umgang genommen werden kann.[1]

Nun lehrt ein Blick auf die im Anhang enthaltenen Tabellen, dass c nicht leicht über den Werth 0.2447 steigen wird, wie es einer Temperatur von 32° bei 760^{mm} entspräche.

Da sich aber anderseits r für Temperaturen zwischen 0° und 32° nach den Regnault'schen Zahlen[2] innerhalb der Grenzen 606.5 und 584.2 hält, so sind die extremsten Werthe, welche $\frac{r}{1000c}$ bei einem Drucke von 760^{mm} annehmen kann, 2°55 für $t = 0$, und 2°39 für $t = 32$.

Bei niedrigeren Drucken, d. h. in grösseren Höhen wird c für die nämlichen Temperaturen grösser, dafür kommen aber unter diesen Bedingungen eben nur mehr niedrigere Temperaturen vor und sind demnach auch nur die höheren Werthe von r zu berücksichtigen, so dass sich K doch wieder nahezu innerhalb derselben Grenzen hält.

Bei dem ausserordentlich geringen Einfluss, den die Änderung des Werthes von K um eine Einheit der ersten Decimale auf das Endresultat ausübt, kann man kurzweg $K = 2.5$ setzen, so lange $t > 0$ bleibt.

[1] Hann. Öst. Ztschft. Bd. IX. S. 324. 1874.

[2] Nach den Untersuchungen von Dieterici (Wiedemann's Ann. 37. 1889. S. 494 bis 508) sowie nach jenen von Eckholm (Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. 15. Aft. I. Nr. 6. 1889) sind diese Zahlen freilich nicht einwurfsfrei. Da aber einerseits die Berichtigung derselben für das hier erstrebte Endresultat kaum in Betracht kommt und da sich anderseits der hier angenommene Werth der Wärmecapacität trockener Luft auch auf die von Regnault benutzte Calorie bezieht, so schien es mir statthaft, wenn nicht sogar geboten, auch für r noch von den älteren Zahlen Gebrauch zu machen.

Ist $t < 0$, dann hat man zu r noch den Werth 80 hinzuzufügen. Berücksichtigt man dies und berechnet man alsdann K für 0° und − 30°, einmal für $\beta = 760$, das andere Mal für $\beta = 400$, so erhält man als Extreme 2.87 und 2.98, so dass man hier mit noch mehr Recht K constant annehmen und wie wir es thun wollen = 2.9 setzen darf.

Man kann demnach ohne nennenswerthen Fehler die Linien F_3F sämmtlich als parallele Gerade betrachten, die nur an der 0° entsprechenden Ordinate eine leichte Knickung erfahren.

Bei der wirklichen Anwendung des oben angeführten graphischen Verfahrens legt man deshalb am besten über das Coordinatennetz, in welches man die Curven der Sättigungsmengen eingetragen hat, eine Schaar solcher Geraden, von denen die links von der Nullordinate liegenden im Verhältniss von 1 : 2.9, die rechts davon liegenden im Verhältniss von 1 : 2.5 nach der Abscissenaxe zu fallen, so dass

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2.9}$ bez. $\frac{1}{2.5}$ wird.

Ganz besonderes Interesse bietet offenbar die Frage, in welchem Verhältniss man zwei Luftmengen von gegebener Temperatur und gegebenem Feuchtigkeitsgehalt zu mischen hat, um den grösstmöglichen Niederschlag zu erhalten.

Die Lösung dieser Aufgabe springt bei einem Blicke auf die Figur 5 von selbst in die Augen.

Da die gebildete Niederschlagsmenge

$$a = F_3F \sin\alpha$$

ist, so wird a ein Maximum, wenn F_3F den grössten Werth erreicht.

Dies ist aber offenbar dann der Fall, wenn die in F an die Curven gelegte Tangente der Geraden F_1F_2 bez. $F_1'F_2'$ parallel ist.

Den Punkt, in welchem diese Tangente die Curven trifft, kann man entweder durch Construction (Probiren) bestimmen oder, falls für den betreffenden Luftdruck eine Tabelle der Sättigungsmengen nach Art der im Anhang enthaltenen zur Verfügung steht, dadurch, dass man jenen Werth von t sucht, für welchen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

ist, was nach entsprechender Ergänzung der Differenzentabelle von Zehntel zu Zehntel Grad keine Schwierigkeit macht.

Hat man alsdann den Punkt F gefunden, so geht man parallel den früher erwähnten Geraden weiter, bis man auf die Gerade F_1F_2

trifft und bestimmt dadurch den Punkt F_3, der seinerseits wieder T_3 und damit die Längen $T_1 T_3$ und $T_3 T_2$, und somit das Mischungsverhältniss giebt, welches dem Maximalniederschlage entspricht.

Den letzteren selbst aber erhält man nach der schon oben angeführten Formel:

$$a = y_3 - y.$$

Man kann jedoch zur Ermittelung dieser Grösse auch einen anderen rein rechnerischen Weg einschlagen. Es ist nämlich unschwer zu sehen, dass (s. Fig. 5) zugleich mit $F_3 F$ auch FL ein Maximum wird, wenn man mit L den Punkt bezeichnet, in welchem die verlängerte Ordinate FT die Gerade $F_1' F_2'$ trifft.

Überdies ist, wenn man für FL den Buchstaben l einführt,

$$\begin{aligned} l &= y_1 + (t - t_1) \operatorname{tg} \beta - y \\ &= t \operatorname{tg} \beta - y + y_1 - t_1 \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}$$

wenn man unter β den Winkel versteht, welchen die Gerade $F_1' F_2'$ mit der Abscissenaxe bildet, d. h. wenn man $\operatorname{tg} \beta = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$ setzt.

Da man nun die Werthe von y unschwer berechnen, wenn nicht gar unmittelbar aus der Tabelle entnehmen kann, so ist man auch ohne Mühe in den Stand gesetzt, sich für einige Werthe von t, die in der Nähe des gesuchten liegen, eine kleine Hülfstabelle für die Grösse $l = FL$ herzustellen und aus ihr den Maximalwerth herauszunehmen bez. den Werth von t, welcher diesem Maximum entspricht.

Der Werth von a ergiebt sich alsdann aus der Formel:

$$a = l \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta},$$

von deren Ableitung hier wohl abgesehen werden darf.

Es steht demnach sowohl der rechnerische als der graphische Weg zur Verfügung. Wenn man den ersteren einschlägt, kann man sich jedoch leicht überzeugen, dass eine einigermaassen sichere Bestimmung der Werthe a und t sowie des Verhältnisses $m_1 : m_2$ eine äusserst genaue Kenntniss der im Sättigungszustande im Kilogramm enthaltenen Dampfmengen voraussetzen würde.

Bei der lange nicht so weit reichenden Zuverlässigkeit der vorhandenen Angaben tragen dementsprechend auch die rechnerisch ermittelten Werthe noch einen ziemlich hohen Grad von Unsicherheit an sich, so dass man sich ebenso gut der weit bequemeren graphischen Methode bedienen kann, ohne dabei in Wahrheit an Genauigkeit einzubüssen.

Auf diese letztere Weise sind auch die nachstehenden kleinen Tabellen berechnet worden, welche für die Drucke von 700 und

400^{mm} und für Temperaturen, die von 10 zu 10 Graden weiter schreiten, die oben als besonders interessant bezeichneten Grenzfälle behandeln und dadurch eine rasche Orientirung über die auf Luftmischung bezüglichen Fragen ermöglichen.

Die erste Horizontalzeile jeder dieser Tabellen bezieht sich auf den Fall, wo beide Componenten vollständig gesättigt sind und giebt unter a den grössten Niederschlag, der unter diesen Umständen bei dem günstigsten unter $m_1 : m_2$ zu findenden Mischungsverhältniss erhalten werden kann. a ist demnach in dieser Zeile der bei den gegebenen Temperaturen durch Mischung überhaupt erreichbare Maximalniederschlag.

Die zweite Zeile giebt den Werth der relativen Feuchtigkeit, welcher mindestens bei einer der Componenten überschritten werden muss, wenn überhaupt Niederschlagsbildung durch Mischung möglich sein soll. Zugleich findet man unter t und $m_1 : m_2$ die Mischungstemperatur und das Mischungsverhältniss, bei welchem gerade noch der Sättigungspunkt erreicht wird, wenn in beiden Componenten die relative Feuchtigkeit den unter R_1 und R_2 angegebenen Minimalwerth hat.

Die dritte Zeile lehrt den Werth R_2 kennen, welchen die relative Feuchtigkeit der wärmeren Componente überschreiten muss, wenn die kühlere vollkommen gesättigt ist und überhaupt Niederschlagsbildung durch Mischung möglich sein soll.

Die vierte Zeile giebt das Mischungsverhältniss, welches überschritten werden muss, wenn bei vollkommener Trockenheit der kühleren und vollkommener Sättigung der wärmeren Componente Niederschlagsbildung möglich sein soll, sofern sich diese überhaupt durch passendes Mischungsverhältniss erreichen lässt.

Zugleich zeigt die fünfte Zeile unter a den Maximalniederschlag, welcher unter den zuletzt geschilderten Feuchtigkeitsverhältnissen der Componenten denkbar ist, sowie Mischungsverhältniss und Mischungstemperatur, bei welchen dieses Maximum erreicht wird.

In vielen Fällen ist bei vollkommener Trockenheit der kühleren Componente überhaupt kein Niederschlag möglich. Alsdann wird die vierte Zeile das Analogon der dritten, indem sie den Minimalwerth giebt, welchen die relative Feuchtigkeit der kühleren Componente überschreiten muss, wenn Niederschlag durch Mischung überhaupt denkbar sein soll. Die fünfte Zeile aber fällt unter diesen Bedingungen der Natur der Sache nach aus.

Die mitgetheilten Tabellen beziehen sich freilich nur auf die Drucke von 700 und 400^{mm}.

Da jedoch hierdurch die Höhen zwischen etwa 680 und 5150^{m} umfasst werden, d. h. jenen Höhen, in welchen die Wolken- oder

wenigstens die eigentliche Niederschlagsbildung vorzugsweise erfolgt, und da die Vervollständigung derselben mit Hülfe der im Anhang mitgetheilten Tabelle keine Schwierigkeiten bereitet, glaubte ich mich auf diese speciellen Fälle beschränken zu dürfen.

Sie werden jedenfalls genügen, um eine allgemeine Orientirung über die in Betracht kommenden Grössen zu gewinnen, und so mögen nun die Tabellen selbst folgen und nur noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die sämmtlichen Zahlen nur als Annäherungen betrachtet werden dürfen, da sie im Wesentlichen auf den ersten Differentialquotienten zum Theil sogar auf den zweiten Differentialquotienten der Spannkrafteurve fussen, so dass ganz kleine Änderungen in den experimentellen Grundlagen oder in der Art der Interpolation sich stark fühlbar machen müssen.

$b = 700$; $t_2 - t_1 = 20$.

t_1	t_2	R_1	R_2	a	t	$m_1 : m_2$
		100	100	0.4	− 9.0	102 : 98
		76	76	$\frac{1}{\infty}$	−14.0	140 : 60
−20	0	100	52	$\frac{1}{\infty}$	−20.0	1 : 0
		0	100	$>$ 0.0	$>$ −11.8	$<$ 118 : 82
		0	100	$<$ 0.13	$\gtrless$ − 5.5	$\gtrless$ 60 : 140
		100	100	0.55	1.0	106 : 94
		81	81	$\frac{1}{\infty}$	− 2.8	128 : 72
−10	+10	100	61	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	1 : 0
		0	100	$>$ 0.0	$>$ − 0.1	$<$ 1 : 1
		0	100	$<$ 0.2	$\gtrless$ 0.5	$\gtrless$ 54 : 146
		100	100	0.75	11.0	108 : 92
		86	86	$\frac{1}{\infty}$	6.2	138 : 62
0	+20	100	62	$\frac{1}{\infty}$	0.0	1 : 0
		0	100	$>$ 0.0	$>$ 12.2	$<$ 80 : 120
		0	100	$<$ 0.2	$\gtrless$ 16.7	$\gtrless$ 37 : 163

$b = 700$; $t_2 - t_1 = 10$.

t_1	t_2	R_1	R_2	a	t	$m_1 : m_2$
		100	100	0.04	−15.5	57 : 43
		92	92	$\frac{1}{\infty}$	−16.0	60 : 40
−20	−10	100	82	$\frac{1}{\infty}$	−20.0	1 : 0
		55	100	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	0 : 1
		100	100	0.11	− 4.0	43 : 57
		94	94	$\frac{1}{\infty}$	− 5.5	55 : 45
−10	0	100	85	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	1 : 0
		47	100	$\frac{1}{\infty}$	0.0	0 : 1
		100	100	0.19	5.0	54 : 46
		94	94	$\frac{1}{\infty}$	4.5	55 : 45
0	+10	100	87	$\frac{1}{\infty}$	0.0	1 : 0
		64	100	$\frac{1}{\infty}$	10.0	0 : 1
		100	100	0.21	14.5	55 : 45
		94	94	$\frac{1}{\infty}$	14.0	60 : 40
+10	+20	100	87	$\frac{1}{\infty}$	10.0	1 : 0
		76	100	$\frac{1}{\infty}$	20.0	0 : 1

t_1	t_2	R_1	R_2	a	t	$m_1 : m_2$
		$b = 400;$	$t_2 - t_1 = 20.$			
−20	0	100	100	0.50	− 9.5	108 : 92
		76	76	$\frac{1}{\infty}$	−14.0	140 : 60
		100	58	$\frac{1}{\infty}$	−20.0	1 : 0
		0	100	$> \frac{1}{\infty}$	> -11.8	$<$ 118 : 82
		0	100	< 0.2	$\gtreqless -5.4$	$\gtreqless$ 54 : 146
−10	+10	100	100	0.75	1.2	110 : 90
		80	80	$\frac{1}{\infty}$	− 3.3	133 : 67
		100	65	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	1 : 0
		0	100	$> \frac{1}{\infty}$	$>$ 0.3	$<$ 97 : 103
		0	100	< 0.2	$\gtreqless$ 6.0	$\gtreqless$ 45 : 155

t_1	t_2	R_1	R_2	a	t	$m_1 : m_2$
		$b = 400;$	$t_2 - t_1 = 10.$			
−20	−10	100	100	0.12	−15.5	58 : 42
		96	96	$\frac{1}{\infty}$	−16.0	60 : 40
		100	85	$\frac{1}{\infty}$	−20.0	1 : 0
		48	100	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	0 : 1
		—	—	—	—	—
−10	0	100	100	0.17	− 4.5	50 : 50
		94	94	$\frac{1}{\infty}$	− 5.5	55 : 45
		100	88	$\frac{1}{\infty}$	−10.0	1 : 0
		52	100	$\frac{1}{\infty}$	− 0.0	0 : 1
		—	—	—	—	—
0	10	100	100	0.20	6.0	47 : 53
		93	93	$\frac{1}{\infty}$	5.0	50 : 50
		100	86	$\frac{1}{\infty}$	0.0	1 : 0
		65	100	$\frac{1}{\infty}$	10.0	0 : 1
		—	—	—	—	—

Diese Tabellen zeigen nun ganz im Einklange mit den früheren Angaben von Hann und Pernter, wie klein die durch Mischung zu erzielenden Niederschläge selbst dann bleiben, wenn man die Temperaturdifferenzen der Componenten grösser wählt, als sie wohl jemals in der Natur vorkommen.

Da nun anderseits nach kürzlich von Hann gemachten Zusammenstellungen[1] erheblich grössere Wassermengen in der Luft suspendirt bleiben können, so sieht man recht deutlich, dass durch Mischung zwar Wolkenbildung, kaum aber die Ausscheidung von Regen oder Schnee in irgend nennenswerthen Mengen verursacht werden kann.

Zugleich gestattet das Diagramm, dessen wir uns hier zum graphischen Rechnen bedienten, in höchst einfacher Weise die durch Mischung sich bildenden Niederschlagsmengen mit jenen zu vergleichen, welche durch directe Abkühlung sowie durch adiabatische Expansion ausgeschieden werden.

Nimmt man nämlich an, es werde durch Mischung gesättigter Luft von der Temperatur t_2 mit solcher von der Temperatur t_1, bei günstigstem Mischungsverhältnisse die Wassermenge a ausgeschieden

[1] Meteorol. Ztschft. f. 1889. S. 303—306.

(Fig. 6), so erhält man die gleiche Niederschlagsmenge, wenn man die Componente y_2 von der Temperatur t_2 auf t_d direct abkühlt, sofern $y_2' - y_d' = a$ ist. y_d' aber ist die Ordinate, deren Fusspunkt F_d ist.

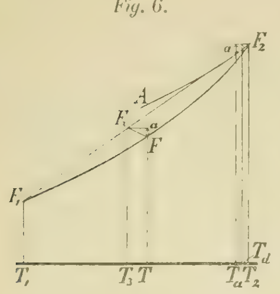


Fig. 6.

Hier genügt ein blosser Blick auf die allgemeine Gestalt der Curven der Sättigungsmengen, um sich sofort davon zu überzeugen, dass die Differenz $t_2 - t_d$ sehr erheblich kleiner ist als die Differenz $t_2 - t$, d. h. dass eine sehr geringe directe Abkühlung ebensoviel Niederschlag liefert als eine ganz bedeutende Abkühlung durch Mischung mit kälterer Luft, selbst wenn diese vollkommen gesättigt ist.

Die Wirkung adiabatischer Abkühlung übersieht man, wenn man in das Diagramm die Adiabate als Function von Temperatur- und Wassergehalt pro Kilogramm einzeichnet.

Eine solche Curve sinkt, wie man leicht einsieht, etwas schwächer von rechts nach links als die Curve der Sättigungsmengen. Da nämlich in diesem Falle die Temperaturabnahme mit Vermehrung des Volumens Hand in Hand geht, so wird die zur Sättigung erforderliche Dampfmenge bei sinkender Temperatur stets grösser sein, als sie bei Festhalten des Anfangsdruckes, d. h. beim Fortschreiten nach der Curve der Sättigungsmengen wäre.

Die Adiabate, welche sich mit Hülfe der Hertz'schen Tafel[1] mit hinreichender Genauigkeit ohne jede Schwierigkeit in das Diagramm einzeichnen lässt, wird demnach einen ähnlichen Verlauf haben, wie ihn die Curve $F_2 A$ der Figur zeigt.

In diesem Falle muss man aber die Temperaturerniedrigung bis auf t_a treiben, wenn die ausgeschiedene Wassermenge wiederum gleich a sein soll, da alsdann für y_a', welches in der Figur durch die über T_a errichtete Ordinate dargestellt wird, die Gleichung gilt

$$y_2' - y_a' = a.$$

Auch hier zeigt schon wiederum der allgemeine Verlauf der Curven, dass die Temperaturerniedrigung, welche erforderlich ist, um durch adiabatische Expansion eine bestimmte Ausscheidung zu bewirken, sehr viel geringfügiger ist, als wenn der gleiche Niederschlag durch Mischung erzeugt werden soll.

Ein Zahlenbeispiel wird dies am besten zur Anschauung bringen:

[1] Meteorol. Ztschft. f. 1884. Taf. 7.

Aus den oben gegebenen Tabellen entnimmt man, dass bei 700^{mm} Druck gesättigte Luft von 0° und von 20° durch Mischung höchstens 0^{gr}75 pro Kilogramm Mischung ausscheiden kann und zwar bei einer Endtemperatur von 11°0, d. h. bei einer Abkühlung der wärmeren Componente von 20° auf 11°.

Durch directe Abkühlung wird aus der wärmeren Componente die gleiche Wassermenge ausgeschieden, wenn man sie von 20° auf 19°2 bringt, während bei adiabatischer Ausdehnung eine Abkühlung von 20° auf 18°4 erforderlich wäre, d. h. ein Emporsteigen der Luft durch etwa 310 Meter.

Dieses Beispiel zeigt in recht schlagender Weise, wie geringfügig die directe Abkühlung durch Berührung mit kalten Gegenständen oder durch Ausstrahlung oder auch jene durch adiabatische Expansion zu sein braucht, um Niederschlagsmengen zu liefern, wie sie durch Mischung nur in den extremsten, kaum denkbaren Fällen erhältlich wären.

Hiermit mögen die Betrachtungen über die Mischung feuchter Luftmengen beschlossen werden und soll nur noch die eine Bemerkung Platz finden, dass die Differenz $t - t_3$ um so kleiner wird, je geringer die Menge a der ausgeschiedenen Flüssigkeit ist.

Ihr Betrag wird demnach nur in so extremen Fällen, wie sie in den obigen Tabellen vorausgesetzt wurden, den Werth von 1 oder 2 Grad übersteigen, meist aber weit unterhalb dieser Grenzen bleiben.

Man wird demnach in der Mehrzahl der Fälle ohne nennenswerthen Fehler die Mischungstemperatur jener gleichsetzen dürfen, welche man bei Mischung der gleichen Mengen trockener Luft erhielte, wodurch viele Rechnungen eine grosse Vereinfachung erfahren.

b. Übersättigte Luft.

Bei der im Vorhergehenden gegebenen Lösung des Mischungsproblemes wurde der Vereinfachung halber angenommen, dass in den Fällen, wo wirklich Niederschlagsbildung auf diesem Wege möglich ist, zuerst Übersättigung eintrete, und dass dann erst die Wasserausscheidung erfolge.

Diese Voraussetzung hat a. a. O. schon Hann stillschweigend gemacht, zu einer Zeit, wo man noch nichts davon wusste, dass Wasserdampf thatsächlich im übersättigten Zustande existiren kann.

Seitdem diese Möglichkeit durch die Untersuchungen von Aitken, Coulier, Mascart, Kiessling und besonders auch durch R. v. Helmholtz[1] nachgewiesen ist, hat es Interesse die Wasserausscheidung

[1] Wiedemann's Ann. XXVII S. 527. 1886.

aus übersättigter Luft auch an sich zum Gegenstande der Untersuchung zu machen.

Diese Ausscheidung erfolgt bekanntlich, wenn übersättigter Luft, die nur bei vollkommener Staubfreiheit existiren kann, plötzlich ganz feine Theilchen fester Körper beigemischt werden oder vermuthlich auch, wenn elektrische Entladungen durch solche Luft erfolgen[1].

Den Betrag der hierbei ausgeschiedenen Menge, sowie die gleichzeitig eintretende Temperaturerhöhung aber erhält man unmittelbar nach den oben angegebenen Regeln.

Man hat nur in Fig. 5 die mit den Indices 1 und 2 bezeichneten Stücken wegzulassen, und den durch Index 3 bezeichneten Zustand als Ausgangspunkt zu betrachten, dann giebt die Ordinate $T_3 F_3 = y_3$ den Wassergehalt im Zustande der Übersättigung, während y wieder wie oben die schliesslich verbleibende Feuchtigkeit, $y_3 - y$ die ausgeschiedene Menge und $t - t_3$ die eingetretene Temperaturerhöhung bezeichnet.

Dies ist demnach eine Art von Niederschlagsbildung, bei welcher man thatsächlich von einem Freiwerden der latenten Wärme (Verdampfungswärme) sprechen kann, wie man es früher bei der Niederschlagsbildung überhaupt zu thun pflegte.

In gewissem Sinne ist dies zwar auch bei der Niederschlagsbildung durch Mischung zulässig, insofern die Temperatur der Mischung höher ausfällt, wenn Wasser ausgeschieden wird, als wenn dies wegen unzureichenden Wassergehaltes unter sonst gleichen Verhältnissen nicht der Fall ist. Diese Temperaturerhöhung bleibt jedoch in Anbetracht der geringen Mengen, welche durch Mischung condensirt werden können, immer eine sehr unbedeutende.

Anders, wenn wirklich Übersättigung vorhanden ist. In solchen Fällen kann die Temperaturerhöhung je nach dem Grade der Übersättigung eine sehr erhebliche werden, wie sich sofort aus der Figur entnehmen lässt.

Noch weit beträchtlicher aber müssen die Niederschläge werden, welche das plötzliche Aufhören der Übersättigung im Gefolge hat.

Sowie nämlich an irgend einer Stelle der Atmosphaere eine plötzliche Wärmeentwickelung eintritt, erfolgt gewaltsames Aufsteigen der Luft, was dann durch adiabatische Abkühlung immer neue Niederschlagsbildung nach sich ziehen muss.

Wenn die verticale Temperaturvertheilung sich auch nur einigermaassen dem convectiven Gleichgewichte nähert, so muss dies unter solchen Bedingungen sofort in labiles übergehen und spielt dem-

[1] R. v. Helmholtz, Wiedemann's Ann. XXXII. S. 4. 1887.

entsprechend das Aufhören der Übersättigung die Rolle einer Auslösung für eine Reihe von Erscheinungen.

Ich halte es für wahrscheinlich, dass man in solchen Vorgängen, die eine eingehende Untersuchung verdienen dürften, den Grund der eigentlichen Wolkenbrüche zu suchen habe. Freilich müsste zur Begründung dieser Anschauung erst der Beweis geliefert werden, dass die Übersättigung, die man bis jetzt nur bei Laboratoriumsversuchen hat kennen lernen, auch in der freien Atmosphaere vorkommt.

Die Mischung übersättigter Luft mit anderen Luftmengen bedarf wohl kaum mehr einer besonderen Besprechung, da man des Ergebniss einer solchen sofort übersieht, wenn man in Fig. 5 einen der Punkte F_1 oder F_2 auf die oberste Seite der Curve $F' F'$ verlegt denkt und dann die weiteren Constructionen ganz nach den früher gegebenen Regeln ausführt.

c. Feuchte Luft mit beigemischtem Wasser oder Eis.

Das Wasser kommt in der Luft nicht nur als Dampf, sondern auch in der Form von Tropfen, Eiskrystallen oder Nebelkörperchen vor.

Psychrometer und Hygrometer lehren, dass bei dieser Art der Wasserbeimischung die Luft durchaus nicht mit Dampf gesättigt zu sein braucht.

Leider besitzen wir nur sehr unvollkommene Angaben darüber, wie gross die auf solche Weise mechanisch beigemischten Wassermengen sind[1].

Es unterliegt aber kaum einem Zweifel, dass die Summe des mechanisch beigemengten Wassers und des in Dampfform vorhandenen sowohl kleiner als auch gleich oder grösser sein kann als die bei der betreffenden Temperatur der Sättigung entsprechende Menge.

Dem entsprechend will ich auch derartige Gemenge als »mechanisch theilweise gesättigte, ganz gesättigte oder übersättigte« Luft bezeichnen, und nun vor Allem untersuchen, wie sich solche Luftmengen bei der Mischung mit gewöhnlicher mehr oder minder feuchter Luft verhalten.

Durch diese Untersuchung lernt man alsdann die Bedingungen kennen, unter welchen die Auflösung von Nebeln oder Wolken oder von fallenden Tropfen erfolgen kann.

Durch Mischung ist solche Auflösung, wie man von vornherein übersieht, nur dann zu erreichen, wenn die beigemengte Luft, die zunächst als die wärmere angenommen werden mag, relativ trocken ist.

[1] S. Hann a. a. O.

Es soll demnach die Mischung vorerst einmal unter den nachstehenden Bedingungen untersucht werden:

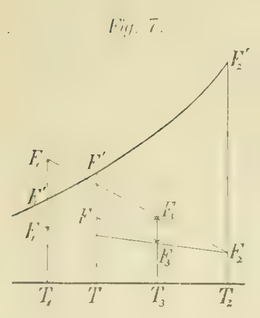
Es sei $R_1 > 100$ und zwar aus zwei Theilen bestehend, von denen der eine $\overline{R}_1$ dampfförmig, der andere $\overline{\overline{R}}_1$ flüssig und überdies $\overline{R}_1 < 100$ sein soll, während

$$\overline{R}_1 + \overline{\overline{R}}_1 = R_1 \text{ ist.}$$

Ferner sei $R_2 < 100$ und $t_2 > t_1$.

Dies vorausgesetzt gelten unter Anwendung von Bezeichnungen, die nach Analogie selbstverständlich sind die Sätze:

$$\overline{y}_1 + \overline{\overline{y}}_1 = y_1$$
$$y_1 > y_1'$$
und
$$\overline{y}_1 < y_1'.$$



In der zugehörigen Figur (Fig. 7) aber wird $\overline{y}_1$ durch $T_1 F_1$ und $\overline{\overline{y}}_1$ durch $F_1 F_1$ dargestellt, während die übrigen Bezeichnungen wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Höchstens das eine mag noch hervorgehoben werden, dass die Längen, welche das tropfbare[1] oder gefrorene Wasser versinnlichen, durch zwei von einander abgewendete Pfeilspitzen begrenzt sind, da dies eine leichte Übersicht gestattet.

Sind nun die zur Mischung kommenden Mengen beider Componenten wieder m_1 und m_2 und denkt man sich auch hier wieder, dass zunächst sowohl der vorhandene Dampf als auch das Wasser in dem Gemische gleichförmig vertheilt sei und Verdampfung des Wassers erst nachträglich erfolge, sofern die Dampfsättigung des Gemisches überhaupt solche gestattet, dann gelangt man ähnlich wie oben wieder zu einem Übergangszustande, für den die entsprechenden Grössen passend durch den Index 3 zu bezeichnen sein werden.

Der Unterschied zwischen diesem Übergangszustande und dem bei der Mischung gesättigter Luftmengen betrachteten liegt nur darin, dass er in dem hier vorliegenden Falle wohl thatsächlich durchlaufen wird, während der oben angenommene eben nur zur Erleichterung der Rechnung fingirt wurde.

[1] Im Allgemeinen setze ich im Folgenden Temperaturen über 0° voraus, da die Übertragung der Betrachtungen auf die tieferen unschwer ist. Wollte man jedoch auch noch jene Fälle berücksichtigen, in welchen Wasser und Eis nebeneinander vorkommen oder wo Wasser in überkältetem Zustande vorhanden ist, so würden die Untersuchungen übermässig verwickelt werden.

In diesem Übergangszustande befinden sich nun vor der erfolgten Auflösung im Kilogramme die Dampf- und Wassermengen y_3 und $\bar{y}_3$, wie sie sich aus den Gleichungen

$$\frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_1}{y_2 - \bar{y}_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{und } \frac{\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_3}{\bar{\bar{y}}_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1} \text{ ergeben,}$$

Gleichungen, die ihren scheinbaren Mangel an Symmetrie verlieren, wenn man bedenkt, dass $\bar{y}_2 = y_2$ und $\bar{\bar{y}}_2 = 0$ ist.

Ausserdem hat man ebenso wie oben

$$\frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1}.$$

In der Figur wird $\bar{y}_3$ durch die Länge $T_3 \bar{F}_3$, $\bar{\bar{y}}_3$ durch $\bar{F}_3 F_3$ dargestellt.

Die Menge $\bar{\bar{y}}_3$, die jetzt noch flüssig ist, wird sich nun auflösen, sofern das Gemisch nicht gesättigt ist, oder es wird sich soviel von ihr auflösen, bis es gesättigt ist.

Dies kann natürlich, sofern keine Wärme von aussen her zugeführt wird, ein Fall der hier ausgeschlossen sein soll, nun geschehen indem sich das Gemisch abkühlt, und zwar für jedes Gramm das zur Verdampfung kommt, um 2°6 bez. 2°9.

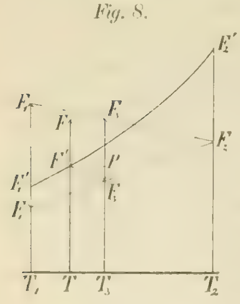


Fig. 8.

Man findet demnach die Endtemperatur T indem man von F_3 aus den Leitlinien parallel nach links aufwärts steigt bis man die Höhe von F_3 in F erreicht hat, oder wenn dies ein Durchschneiden der Curve $F_1' F_2'$ erfordern würde, bis man diese Curve trifft.

Im letzteren Falle, der in Fig. 8 seine Versinnlichung findet, kommt überhaupt nicht alles Wasser zur Auflösung, sondern nur ein Theil $y' - \bar{y}_3$, wie er in der Figur der Länge $F_3 P$ entspricht.

Der erste dieser beiden Fälle lässt sich leicht rechnerisch behandeln, insofern als unter diesen Bedingungen

$$t = t_3 - K y_3$$

$$= t_3 - K y_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} - K \bar{\bar{y}}_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 - K \bar{y}_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ ist.}$$

So einfach gestaltet sich die Rechnung jedoch nur dann, wenn wirklich alles Wasser zur Verdunstung kommen kann, in dem zweiten Falle, wo immer noch mechanische Übersättigung bestehen bleibt, wendet man besser das graphische Verfahren an.

Ganz besonderes Interesse gewährt auch hier wieder die Untersuchung der Grenzfälle, bei denen überhaupt noch vollständige Auflösung des in der einen Componente ursprünglich tropfbar vorhandenen Wassers erfolgen kann.

Solcher Grenzfälle giebt es natürlich ausserordentlich verschiedene, je nachdem man über das Mischungsverhältniss, oder über die Feuchtigkeitsverhältnisse der einen oder der anderen Componente frei verfügen kann.

Hier soll nur die Frage behandelt werden, von welchem Grenzverhältnisse der Mischung beginnend bei gegebenen Componenten jederzeit Auflösung erfolgen muss.

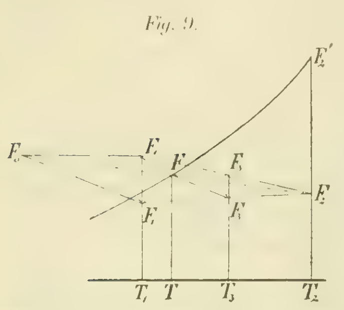
Diese Grenze ist offenbar dann erreicht, wenn F' und F_3 gleich hoch über der Abscissenaxe liegen, d. h. wenn $y = y' = y_3$ ist, bez. wenn F und F' zusammenfallen.

In diesem Falle ist F die Spitze eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete $F_3\overline{F_3}$ ist und dessen Hypothenuse den Leitlinien parallel läuft.

Lässt man nun in Gedanken den Punkt T_3 auf der Abscissenaxe hin- und herlaufen, so beschreiben die Spitzen der in der angegebenen Weise auf $F_3 F_3$ errichteten Dreiecke eine durch F_2 gehende Gerade, die man leicht findet, wenn man auf dem von einer beliebigen Ordinate durch die Geraden $F_1 F_2$ und $F_1 F_2$ abgeschnittenen Stücke ein solches Dreieck errichtet und alsdann dessen Spitze mit F_2 verbindet.

Man kann z. B. wie in Fig. 9 geschehen, die auf T_1 errichtete Ordinate zu diesem Zwecke auswählen. Dann ist $F_1 F_0 F_1$ das besagte Dreieck und $F_0 F_2$ die Gerade, auf welcher der gesuchte Punkt F liegen muss; da er sich ausserdem auf der Curve der Sättigungsmengen befinden muss, so liegt er eben auf dem Schnittpunkte von $F_0 F_2$ und der Curve $F_1' F_2'$ und ist

Fig. 9.



$$\frac{T_2 T_3}{T_1 T_3} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$$

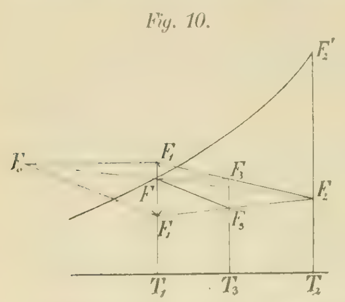
das gesuchte Grenzverhältniss.

Sowie das Mischungsverhältniss diese Grenze erreicht oder nach der Seite von m_2 hin übersteigt, d. h. sowie $\frac{m_2}{m_1} \gtrless \mu$ ist, tritt vollständige Auflösung des suspendirten Wassers ein.

Bei derartigen Mischungen kann es vorkommen, dass FF_3 die Curve $F_1'F_2'$ auf der linken Seite von T_1F_1 scheidet. In solchen Fällen ist die nach Vollziehung der Mischung sich ergebende Temperatur niedriger als die der beiden Componenten.

Das Mischungsverhältniss, von dem anfangend diese Erscheinung eintritt, findet man leicht, indem man durch F (Fig. 10), welches in diesem Falle mit F_1' identisch ist, eine Parallele zu F_0F_1 (eine Leitlinie) legt und deren Durchschnitt mit F_1F_2 sucht. Die Abscisse dieses Punktes ist alsdann die Temperatur t_3, welche die Mischung nach diesem Verhältnisse noch vor erfolgter Auflösung liefert.

Fig. 10.



Aus diesem Werthe t_3 lässt sich eben auch dieses Verhältniss selbst bestimmen.

Man findet nämlich nach ganz einfacher Überlegung, dass für diesen speciellen Werth von t_3 die Gleichung gilt:

$$\frac{F_1\overline{F_1}}{F_3\overline{F_3}} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_3}.$$

Da jedoch $F_3\overline{F_3} = \frac{t_3 - t_1}{K}$ und $F_1\overline{F_1} = y_1 - \overline{y}_1$, so ist auch

$$\frac{y_1 - \overline{y}_1}{t_3 - t_1} K = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_3}$$

und mithin auch

$$\frac{y_1 - \overline{y}_1}{t_2 - t_1} K = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} = \frac{m_2}{m_1} = \mu.$$

Sowie nun $\mu < \mu_s$, d. h. sowie die kühlere, zugleich mechanisch übersättigte oder wenigstens gesättigte Componente mit grösserem Gewichte in die Mischung eintritt, wird $t < t_1$ und damit selbstverständlich auch $t < t_2$, d. h. die schliesslich resultirende Temperatur wird tiefer als jene der beiden Componenten.

Diese Betrachtungen führen zu dem anscheinend ganz paradox klingenden Ergebniss:

»Wird zu mechanisch gesättigter oder mechanisch übersättigter »Luft wärmere Luft beigemischt, so kann ein Theil des suspendirten »Wassers zur Verdunstung kommen und dadurch Abkühlung hervor»gerufen werden.«

»Ist die gegebene mechanisch gesättigte Luft hygroskopisch un»gesättigt, d. h. ist der Dampf ungesättigt, so tritt diese Temperatur»erniedrigung selbst bei Beimischung gesättigter wärmerer Luft — »natürlich in richtigem Verhältniss — ein, ist sie dampfgesättigt »und die mechanische Beimengung dementsprechend als reine Über»sättigung vorhanden, dann muss die wärmere Luft einen bestimmten »Grad von Trockenheit besitzen, der unschwer zu ermitteln ist.«

Der letztere dieser beiden Sätze ergiebt sich von selbst, sowie man in Fig. 10 $\overline{F_1}$ mit F zusammenfallen lässt und dann mit F_2 auf der Ordinate T_2F_2' so weit nach abwärts rückt, dass F_0F_2 unterhalb FF_2 zu liegen kommt, eine Bedingung, die jedoch nur erfüllbar ist, so lange T_2 keine zu hohen Werthe besitzt.

Die eben aufgestellten, höchst paradox klingenden Sätze verlieren ihren fremdartigen Anstrich sofort, wie man sich klar macht, dass ein Gemisch aus ungesättigter feuchter Luft und Wasser sich nicht im Gleichgewichtszustand befindet, sondern dass in einem solchen Gemisch stets Verdunstung stattfinden muss, es sei denn, dass der Zustand durch besondere Vorgänge stationär erhalten bleibt.

Solche Gemische hat man in den Wolken, in Nebeln und in der Regenluft vor sich.

Das Verhalten solcher Gemische ist implicite schon im Vorhergehenden untersucht worden und sollen hierüber jetzt noch einige Worte gesprochen werden.

Man könnte es vielleicht für einen theoretischen Fehler erklären, dass eben dieses Verhalten nicht gleich von vornherein zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wurde, sondern die Mischung solcher Gemenge mit anderer Luft zum Ausgangspunkte gewählt wurde.

Aber einerseits war dies der Weg, auf dem ich thatsächlich selbst zu den ganzen Betrachtungen geführt wurde und andererseits sind dadurch Abkürzungen und Vereinfachungen ermöglicht worden, die mir wichtig genug schienen, um diese Anordnung des Stoffes beizubehalten.

Um das Verhalten solcher sich selbst überlassener Gemische zu studiren, hat man nämlich nur den in Fig. 8 als Übergangszustand betrachteten, auf Ordinate T_3F_3 versinnlichten Zustand als Ausgangspunkt zu wählen, und gelangt alsdann nach denselben Regeln wie oben zu dem Endzustande TF und damit auch zu der Endtemperatur T.

Hieraus erkennt man sofort, »dass sich Gemische von Wasser »und ungesättigter Luft, sobald sie sich selbst überlassen werden, »abkühlen müssen, und zwar um so stärker, je weiter der Dampf »vom Sättigungspunkte entfernt ist, und je mehr tropfbares Wasser »— oder Eis — beigemengt ist«.

Diese Betrachtungen erklären eine Erscheinung, die ich schon vielfach beobachtet habe, von der ich aber bis vor Kurzem nicht sicher war, ob sie nicht rein subjectiver Natur sei.

Es war mir nämlich häufig aufgefallen, dass man beim Durchschreiten von Nebelschichten, wie sie an ruhigen, später heiteren Tagen am Morgen die Gebirgsthäler erfüllen, gerade dann den Eindruck empfindlicherer Kälte hat, wenn man sich beim Ansteigen der oberen Grenze des Nebels nähert.

Auch sonst fiel mir häufig auf, dass man, kurz bevor die Sonne den Morgennebel, der in der Tiefe oder über dem Flachlande liegt, verscheucht, das Gefühl besonderer Kälte empfindet.

Solche Gefühlseindrücke können jedoch sehr leicht irre führen.

Nach dem oben Gesagten ist es aber auch aus theoretischen Gründen wahrscheinlich, dass die Temperatur dicht unterhalb der oberen Grenze einer sich auflösenden Nebelschicht eine tiefere sei als die der darüber und darunter liegenden Schichten.

Wenn nämlich die Sonne beginnt, ihre Wirkung auf die obere Begrenzung des Nebels zu äussern, dann tritt zuerst dicht darüber relative Trockenheit ein, und diese relative Trockenheit wird sich je nach der Geschwindigkeit mit welcher die Verdunstung der Nebelkörperchen erfolgt, theils durch Diffusion, theils durch directen Strahlungseinfluss auch noch bis zu einer gewissen, wenn auch nur sehr mässigen Tiefe in der Nebelschicht selbst fortpflanzen.

Dadurch muss aber — wenigstens in vielen Fällen — die Verdunstung mehr beschleunigt werden als es der Wärmezufuhr durch directe Strahlung entspricht, d. h. die Temperatur muss sinken.

Diese theils auf Gefühlseindrücke theils auf theoretische Betrachtungen gegründete Vermuthung hat nun noch während des Niederschreibens dieser Abhandlung eine Bestätigung durch wirkliche Messungen erfahren.

Die Mittheilung derselben verdanke ich Hrn. Bartsch von Sigsfeld, der in einem auf eigene Rechnung gebauten Ballon schon mehrmals Luftfahrten zu wissenschaftlichen Zwecken unternommen und auch bei Bergbesteigungen meteorologische Beobachtungen ausgeführt hat.

Ich will hier zunächst die Resultate anführen, welche Hr. von Sigsfeld bei einer am 26. October 1889 von Augsburg aus unternommenen Ballonfahrt erhalten hat, bei welcher das ausserordentlich

vervollkommnete Assmann'sche Aspirationspsychrometer neuester Construction[1] zur Bestimmung der Temperaturen und der Feuchtigkeit gedient hat.

Die Auffahrt erfolgte, wie eben bemerkt am 26. October um 10 Uhr 45 Vormittag, die Landung um 3 Uhr Nachmittag unweit Plochingen an der Eisenbahnlinie Ulm-Stuttgart.

Die Witterungslage dieses Tages lässt sich charakterisiren wie folgt:

Während ein ausgedehntes barometrisches Maximum mit einem der skandinavischen Halbinsel sich anschmiegenden Kerne ganz Nord- und Mittel-Europa beherrschte, lagerte über dem Südwesten und Süden des Erdtheils ein Depressionsgebiet, das vom Südwesten ausgehend sich über die ganzen Mittelmeerländer erstreckte und einzelne Ausläufer bis nach Süddeutschland entsandte. Das Wetter war fast allenthalben trübe bei mässiger östlicher Luftzufuhr.

Über Süddeutschland selbst schwebte eine Schicht »trockenen« Hochnebels, dessen untere nur ungenau angebbare Begrenzung in etwa 600^m Meereshöhe lag, während die obere sehr scharfe und ebene Grenzfläche in 1200^m Höhe gefunden wurde.

Bis zu dieser Höhe blies der Wind mit mässiger Stärke aus ENE, oberhalb derselben kräftig aus SSE.

Leider konnten nur wenige Beobachtungen gemacht werden, da Hr. von Sigsfeld durch die Navigirung des Ballons in hohem Grade in Anspruch genommen war, doch wurden immerhin einige wichtige Zahlen gewonnen, die ich hier folgen lasse:

Zeit	Meeres-höhe	Luft-druck	Thermometer trocken	Thermometer feucht	Relat. Feuchtigkeit	Bemerkungen
9^h47	471	723.3	7.5	6.2	83	Abfahrtsstelle.[2]
10^h45	"	—	—	—		Abfahrt, Temperatur bis dahin wenig verändert.
?	?	—	3.0	2.9	98	Dicht unter der oberen Nebelgrenze.
?	1202	660.0	—	—		Obere Nebelgrenze.
11^h15	1615	630.0	5.3	2.0	55	
12^h20	1358	647.3	5.5	3.5	73	Von da ab neues weiteres Steigen des Ballons bis auf etwa 2900^m Höhe und stetiges Sinken der Temperatur bis auf 3°.

Diese Zahlen, so spärlich sie sind, zeigen doch, dass die Nebelschichte dicht unter der oberen Grenze derselben die kühlste Stelle

[1] Ztschft. f. Luftschiffahrt. IX. Jahrgang. S. 1—9 u. 30—38. 1890.

[2] Das Barometer der meteorologischen Station Augsburg befindet sich in $499^m.6$ Meereshöhe.

des ganzen durchfahrenen Weges bildete, und dass dicht darüber die Temperatur rasches Ansteigen, die relative Feuchtigkeit hingegen starke Abnahme aufwies.

Ähnliche Ergebnisse hatte Hr. von Sigsfeld schon früher erzielt, nämlich bei einer am 5. October 1887 zum Zwecke photogrammatischer Aufnahmen unternommenen Besteigung des Fellhorns im Allgäu.

Ich lasse auch die hierauf bezüglichen Zahlen folgen:

Zeit	Meeres-höhe	Baro-meter	Thermometer trocken	Thermometer feucht	Relat. Feuchtigkeit	Bemerkungen
8h 0a	808	692.0	4.6	—		Oberstdorf.[1]
8h 0	1058	671.5	2.1	1.9	96	Ausgangspunkt: Riezlern, Nebel.
8h30	1203	659.1	0.7	0.7	100	Obere Nebelgrenze.
9h10	1487	636.7	6.2	3.5	64	
10h 5		609.1	12.0	8.0		
10h40	2029	596.0	8.5	4.0	48	Fellhorn.
2h15p	2031	595.1	4.6	4.4	97	» » Nebel steigen, obere Grenze erreicht und überragt die Spitze.
2h30	2029	594.8	3.6	2.8	89	Fellhorn, Nebel sinken.
2h35		"	5.2	4.2	86	
3h40	—	"	3.2	3.2	100	
3h12	—	"	2.5	2.5	100	Nebel steigen, obere Grenze erreicht die Spitze.
3h50	1950	600.0	2.0	2.0	100	Abstieg. Nebel.
4h10	1785	612.3	2.0	2.0	100	Nebel.
4h20	1668	621.0	2.8	2.8	100	Nebel.
4h25	1615	625.0	3.5	3.4	98	Oberhalb der unteren Nebelgrenze.
		"	4.5	4.0	93	Unterhalb » » » »
5h10	1078?	668?	6.7	6.2	93	Riezlern.[2]

[1] Nach Trautwein, Südbayern u. s. w. 7. Aufl. Augsb. 1884, ist die Meereshöhe von Oberstdorf, die hier zu Grunde gelegt ist, 808m. Jene der Fellhornspitze 2033, so dass der hier gefundene Werth von 2031 einen guten Belag für die Zuverlässigkeit der Angaben bildet.

[2] Die Morgenbeobachtung hatte für Riezlern die Meereshöhe 1058 ergeben, während um 5h10p 1078 erhalten wurde, freilich unter Benutzung des am Morgen in Oberstdorf notirten Barometerstandes. Nimmt man aber, wie es die Beobachtungen von Augsburg und München fordern, an, dass dieser Stand bis um die angegebene Zeit um 1mm zurückgegangen sei und macht man ferner die sehr wahrscheinliche Annahme, dass das Aneroid den raschen Druckänderungen beim Abstiege nicht vollkommen folgen konnte und deshalb um 2mm zu niedrig zeigte, so erhält man für Riezlern die Meereshöhe 1062, also eine Zahl, die mit der am Morgen gefundenen beinahe vollkommen übereinstimmt.

Die angeführten Zahlen wurden einerseits mit einem verglichenen ziemlich zuverlässigen Aneroid, und sofern es sich um Temperaturen handelt, mit einem Assmann'schen Aspirationspsychrometer älterer Construction gewonnen.

Aus der obigen Tabelle ersieht man recht deutlich, dass die obere Grenze der Nebelschicht jederzeit tiefere Temperaturen aufweist als die benachbarten, ober- und unterhalb gelegenen.

Ob es sich dabei wirklich, wie oben vorausgesetzt, wesentlich um Verdunstungskälte handelt, dies lässt sich freilich noch nicht entscheiden.

Besonders erregt die hohe relative Feuchtigkeit, wie sie sich auch noch in der obersten Nebelschicht ergeben hat, in dieser Richtung Bedenken.

Deutlicher scheinen in diesem Sinne Beobachtungen zu sprechen, welche von Hrn. Premierlieutenant Moedebeck und Hrn. Lieutenant Gross bei einer am 19. Juni 1889 unternommenen Ballonfahrt angestellt wurden und die kürzlich Hr. Gross in einem sehr interessanten Aufsatz veröffentlicht hat,[1] der jedenfalls noch eine eingehende wissenschaftliche Bearbeitung verdient.[2]

Auch hier zeigte sich beim Durchfahren mächtiger Wolken, dass die Temperatur gerade an der oberen Grenze derselben sehr tief war, um dicht darüber mit einem Male gewaltig zu steigen.

Dabei schliessen sich auch die Feuchtigkeitsbeobachtungen besser an die oben entwickelten theoretischen Anschauungen an. Hr. Gross sagt hierüber unter Bezugnahme auf eine beigegebene graphische Darstellung, welche sich auf den Gang des trockenen und feuchten Thermometers bezieht: »Wir sehen aus dem Vergleich (der Curven des trockenen und feuchten Thermometers) dass die Feuchtigkeit der Luft bei Annäherung an die Wolken schnell zunimmt, dass in der Wolke selbst, wo beide Curven in einander laufen, die Luft mit Wasserdampf vollkommen gesättigt ist. Jedoch im unteren Theile der Wolke ist dies nur der Fall, nach oben zu nimmt der Feuchtigkeitsgehalt wieder ab, eine Beobachtung, welche ich schon häufig gemacht habe. Es ist dies wohl auch erklärlich. Im oberen Theile der Wolke wirkt die Sonne bereits wieder auf erstere ein. Kurz über der Wolke macht auch das feuchte Thermometer den jähen Sprung mit, die Luft wird plötzlich sehr trocken, was sich ohne Weiteres aus der rückgestrahlten Wärme der Wolke ergiebt.«

Dass trotz der Einwirkung der Sonne auf die alleroberste Wolkengrenze gerade dicht darunter die tiefsten Temperaturen beobachtet werden, scheint mir nur durch die Verdunstungskälte, d. h. auf die oben theoretisch vorhergesagte Weise erklärbar.

---

[1] Ztschft. f. Luftschifffahr. Jahrg. VIII. S. 249 ff. 1889.

[2] Indem ich auf diesen Aufsatz hinweise, möchte ich zugleich erwähnen, dass Hr. Gross auch die in meiner zweiten Mittheilung auf S. 11 [1199] ausgesprochene Vermuthung, wonach die Temperaturumkehrung im Gebiete der winterlichen Anticyklone nicht nur eine Eigenthümlichkeit der Gebirgsgegenden sei, inzwischen bestätigt hat. Bei einem unter der Herrschaft einer solchen Anticyklone am 19. December 1888 von Berlin aus unternommenen Ballonfahrt ergab das Schleuderthermometer zwischen 1 und 4 Uhr Nm. eine Temperaturzunahme um 8° für 1000 Meter Erhebung.

In aller Schärfe dürften sich die auf das Verhalten der obersten Nebelschicht bezüglichen Fragen am Eiffelthurme beobachten lassen, da es dort häufig vorkommen muss, dass die Grenzschicht gerade über die meterologischen Instrumente hinweggeht.

Vielleicht wäre es dort auch möglich, in verschiedenen Höhen registrirende Thermometer und Psychrometer oder Hygrometer aufzustellen, um wirklich simultane Beobachtungen dicht oberhalb und unterhalb der oberen Nebelgrenze zu erhalten.

d. Bildung und Auflösung von Nebeln und Wolken.

Die oben durchgeführten Untersuchungen über die Niederschlagsbildung durch Mischung ungleich warmer feuchter Luftmengen haben gelehrt, dass solche Mischungen zwar keine reichlichen Regen- oder Schneemengen liefern, wohl aber für die Bildung von Nebeln und Wolken eine grosse Bedeutung erlangen können.

Es giebt demnach dreierlei Vorgänge, die entweder für sich allein oder im Zusammenwirken eine Condensation des Wasserdampfes in der Atmosphaere zur Folge haben können:

a) Directe Abkühlung, sei es durch Berührung mit kalten Körpern oder durch Strahlung.

b) Adiabatische Expansion oder wenigstens Expansion bei ungenügender Wärmezufuhr.

c) Mischung feuchter Luftmengen von verschiedener Temperatur.

In entsprechender Weise erfolgt die Auflösung bereits vorhandener Nebel und Wolken durch die folgenden Vorgänge:

a) Directe Erwärmung, sei es durch Strahlung oder durch Berührung mit wärmeren Körpern.

b) Compression, sei es adiabatisch oder wenigstens bei ungenügender Wärmeentziehung.

c) Mischung mit anderen Luftmengen von genügender Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt.

Von diesen dreierlei Vorgängen ist der jedesmal an erster Stelle genannte der wirksamste.

Um eine gegebene Wassermenge zu condensiren oder aufzulösen, bedarf es nur einer verhältnissmässig geringen directen Abkühlung oder Erwärmung.

Die letztere muss beträchtlicher sein, d. h. ein grösseres Temperaturintervall umfassen, wenn die Condensation oder Auflösung der gleichen Menge durch adiabatische Expansion oder Compression erfolgen soll.

Noch viel bedeutendere Temperaturdifferenzen müssen aber dann in's Spiel kommen, wenn durch Mischung die nämliche Menge zur Condensation oder zur Verdampfung gebracht werden soll, sofern dies überhaupt möglich ist.

Das erste Paar dieser Vorgänge: die directe Abkühlung oder Erwärmung kommt vorzugsweise in Betracht bei der Bildung der eigentlichen Nebel, die sich vom Erdboden anfangend bis in grössere oder geringere Höhen erstrecken.

In Zeiten überwiegender Ausstrahlung kühlt sich zunächst der Erdboden ab. Sowie die Abkühlung bis zum Thaupunkte vorgeschritten ist, tritt in der alleruntersten Schicht Condensation ein. Hierdurch vermehrt sich das Emissionsvermögen dieser Schicht selbst, sie erkaltet demnach in ihren obersten Lagen selbst durch Strahlung und so wächst die Nebelschicht mehr und mehr von unten nach oben, um später in Zeiten vermehrter Einstrahlung sich genau in der umgekehrten Weise wieder aufzulösen.

Abgesehen von dem sogenannten Nebelreissen kommt es bei dieser Art der Condensation zu keinen beträchtlichen Niederschlägen. Der Grund liegt wohl darin, dass eben durch das Anwachsen der Nebelschicht nach oben den unteren Schichten die Möglichkeit weiterer intensiver Ausstrahlung genommen wird. In den höheren Schichten der Atmosphaere wird solche Condensation durch directe Ausstrahlung wohl nur eintreten, wenn bereits auf eine andere Weise, sei es durch Mischung oder auch durch Expansion, vielleicht auch durch Rauch, Trübung erzeugt worden war. An der oberen Wolkengrenze, besonders bei Stratuswolken, dürften sich die Vorgänge des Anwachsens und Auflösens der Wolke durch directe Aus- oder Einstrahlung ebenso vollziehen, wie die Bildung und Auflösung des Nebels in der untersten Luftschicht.

Die Wolkenbildung durch adiabatische Expansion sowie die Auflösung durch Compression tritt überall ein, wo man es mit auf- oder absteigenden Luftströmen zu thun hat. Sie ist in neuerer Zeit so vielfach behandelt worden, dass hier in Kürze darüber hinweg gegangen werden kann. Die sommerliche Haufwolke mit horizontaler Basis, die Gewitterwolke und die eigentliche Regenwolke verdanken ihr die Entstehung. In wiefern nächtliche Ausstrahlung die obersten Schichten solcher Wolken beeinflusst, dies können erst weitere Forschungen klar legen.

Wesentlich verwickelter als bei den beiden bisher betrachteten Arten der Bildung und Auflösung von Wolken und Nebeln gestalten sich die Vorgänge, wenn Mischung in's Spiel kommt.

Bei den oben erwähnten Gruppen ist ein stetiges Fortschreiten

der Abkühlung oder Erwärmung mit stetig weiter schreitender Condensation oder Auflösung begleitet.

Ganz anders bei der Mischung. Ein Mischungsprocess kann in demselben Sinne weiterschreiten und doch zuerst Condensation und in seinen späteren Stadien wieder Auflösung zur Folge haben.

Der Athem, den wir in kühle Luft hinausstossen verlässt die Mundhöhle zwar gesättigt, aber noch nicht im Nebelstadium, erst wie die Mischung mit der kälteren Luft eintritt, beginnt die Bildung der Dampfwolke, die sich alsdann durch weitere Beimischung kalter trockener Luft wieder auflöst.

Streng mathematisch übersieht man diesen Vorgang an der Hand der Figur 2.[1]

Nimmt man z. B. an, dass eine kleinere Luftmenge von der Temperatur t_1 mit einer grösseren von der höheren Temperatur t_2 gemischt werde, so werden alle möglichen Mischungsverhältnisse von $\frac{m_2}{m_1} = 0$ bis zu dem schliesslich sich ergebenden durchlaufen, welches wir sehr gross, jedenfalls grösser annehmen wollen, als es dem Werthe y_2 entspricht. In diesem Falle durchläuft der Wassergehalts y alle Werthe der zu $F_1 F_2$ gehörigen Ordinate bis zu einem Endwerthe $y > y_2^*$.

Hierbei muss Condensation eintreten sowie das Mischungsverhältniss den Werth übersteigt, welcher der Ordinate y_1^* entspricht, wächst es noch weiter, so tritt von einer bestimmten Stelle bei Annäherung an die Ordinate y_2^* wieder theilweise Auflösung ein, die bei dem der Ordinate y_2^* entsprechenden Verhältniss eine vollständige wird und dann wieder ungesättigte Mischungen giebt.

Mischt sich eine kleinere Menge nahezu gesättigter wärmerer Luft mit einer grossen Menge kälterer, so werden die Zustände im entgegengesetzten Sinne durchlaufen und tritt unter den in der Figur angenommenen Bedingungen auch wieder anfänglich Condensation und dann Wiederauflösung ein.

Obwohl nun in beiden Fällen zuerst Condensation und dann Wiederauflösung erfolgt, so besteht doch ein wesentlicher Unterschied zwischen ihnen.

Denkt man sich nämlich das Mischungsverhältniss zwischen dem Condensations- und Auflösungspunkte, d. h. zwischen den Ordinaten y_1^* und y_2^* stetiger Veränderung unterworfen, so wird doch die resultirende Mitteltemperatur $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ rascher erreicht, wenn man von

[1] S. o. S. 360.

y_1^* nach y_2^*, als wenn man von y_2^* nach y_1^* weiterschreitet. Da nämlich $t > t_3$, so ist für $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ das Mischungsverhältniss $m_1 : m_2 > 1$, d. h. das Gemisch zeigt bereits die Mitteltemperatur, während der Masse nach die kältere Componente noch das Übergewicht hat.

Mischt man demnach gesättigte kühlere Luft mit immer grösseren Mengen gesättigter warmer Luft, so erfolgt zuerst die Erwärmung des Gemisches rascher als später, während bei dem umgekehrten Process anfänglich langsamere und dann immer raschere Abkühlung eintritt. Auch die condensirten Mengen verhalten sich ähnlich, auch sie erreichen ihr Maximum bei Überwiegen der kühleren Componente:

»Es tritt demnach die Condensation rascher ein, wenn ein Strahl kühler feuchter Luft in eine grosse Masse wärmerer eintritt, als wenn ein Strahl warmer feuchter Luft in kühlere hineingeblasen wird.«

Es muss sich demnach im Aussehen solcher sich bildender und wieder auflösender Wolken verrathen, ob wärmere oder kältere Luft schliesslich die Oberhand behält.

Nach alledem darf man die nachstehenden Nebel und Wolken als durch Mischung entstanden ansehen:

1. Die Nebel über warmen feuchten Flächen unter Einwirkung kälterer Luft, also insbesondere die Nebel auf dem Meere zur kalten Jahreszeit oder beim Einfallen kalter Winde.

2. Die reihenweise auftretenden Wolken an der Grenze zweier verschieden rasch übereinander hinfliessenden Luftschichten, welche Hr. von Helmholtz zuerst als eine Folge von Wellenbewegung erkannt und mit dem Namen der Luftwogen bezeichnet hat, wobei jedoch adiabatische Condensation an den Stellen, wo die Luft nach Art der Brandung in die Höhe geschleudert wird, auch noch in Betracht kommt.[1]

3. Die Stratusschichten, die sich an solchen Trennungsflächen bilden, und die häufig zuerst als Luftwogen auftreten und sich später erst mehr verdichten.

4. Wolkenfahnen, die sich an Berggipfeln oder an Passeinschnitten bilden und wieder auflösen, wenn die Gestaltung des Gebirges es wärmeren oder kälteren Luftmassen ermöglicht, dass Strahlen in solche von anderer Temperatur hineingeführt werden.[2]

5. Die Wolkenfetzen oder das ganz lose Gewölke, wie man es bei stärkerer Luftbewegung unter fortgesetzter Gestaltänderung und unter stetem Entstehen und Vergehen häufig beobachtet, wie sie aber auch neben der Wolkenbildung durch adiabatische Expansion insbesondere bei Gewittern auftreten.

[1] Sitzungsber. f. 1888. S. 661 und f. 1889. S. 503 ff.

[2] v. Bezold. Himmel und Erde Bd. II. S. 7. 188[illegible]

Diese verschiedenen Arten der Wolkenbildung durch directe Abkühlung, durch adiabatische Expansion und durch Mischung können selbstverständlich auch nebeneinander in den verschiedensten Combinationen auftreten, wie sich dies schon äusserlich in der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit der Wolkenformen zu erkennen giebt.

Es scheint mir jedoch sehr wichtig bei der Betrachtung dieser Formen stets diese verschiedenen Vorgänge im Auge zu behalten, da man nur dann hoffen kann, schliesslich ein wirkliches Verständniss dieser Formen zu gewinnen.

Es wird sich, wie Hr. Hellmann treffend äusserte, vor Allem darum handeln, den Grund zu einer »Physiologie der Wolken« zu legen, ehe man hoffen darf, zu einer wirklich befriedigenden Systematik und Nomenclatur derselben zu gelangen.[1]

Zur Lösung dieser Aufgabe wird freilich noch ein weiter Weg zu durchlaufen sein, da sich einerseits die Frage um so verwickelter zeigt, je näher man an sie herantritt, und da es andererseits so ausserordentlich schwer scheint, im Experiment auch nur einigermaassen jene Bedingungen herzustellen, unter welchen sich in der Atmosphaere die Bildung und Auflösung der Wolken vollzieht.

So schön und verdienstvoll z. B. die Versuche sind, welche Hr. Vettin mit Rauchwolken angestellt hat, so muss man doch mit den Schlüssen, die man daraus auf die wirkliche Wolkenbildung zieht, sehr vorsichtig sein.

Im Grunde genommen geben nämlich alle Versuche mit Rauch doch nur ein Bild von Bewegungen in trockener Luft, da die Condensation und Verdampfung sowie die Vorgänge der Compression und Expansion dabei ausgeschlossen sind und man deshalb unter Bedingungen arbeitet, unter welchen in der Atmosphaere eben keine Wolkenbildung eintreten würde.

Darf man doch gerade wegen dieser Vorgänge die Bewegungen der Wolken nicht einmal schlechtweg als Maass der Luftbewegung betrachten, da es nicht nur vorkommt, dass Wolken scheinbar bewegungslos an Bergen hängen, während sie in Wahrheit von lebhaftem Winde durchströmt werden — Föhnmauer, Tafeltuch des Tafelberges, Wolkenhüte — sondern begegnet es sogar den Luftschiffern nicht selten, dass sie Wolken in horizontalem Sinne durchsetzen. Das letztere ist aber nur möglich, wenn die Wolke eine andere Geschwindigkeit besitzt als die Luft, in welcher sie schwebt, da der Luftballon selbst nur Träger vertical wirkender Kräfte ist.

Die Wolke ist eben kein Körper, der als solcher unverändert von der Luft weiter getragen wird, sondern ein Gebilde, das in fort-

[1] Vergl. übrigens auch O. Volger in Gaea f. 1890. II. S. 65—75.

gesetztem Entstehen und Vergehen begriffen, als Ganzes wesentlich andere Bewegungen zeigen kann, wie die Theilchen, aus denen es besteht.

Bei dem gesteigerten Interesse, welches man gegenwärtig den Formen und Bewegungen der Wolken entgegenbringt, schien es mir wichtig, auf all' diese Punkte aufmerksam zu machen, da man sie sämmtlich vor Augen haben muss, wenn man aus dem äusseren Ansehen der Wolke auf die Vorgänge schliessen will, welche in dem einzelnen Falle die Bildung oder Auflösung derselben und damit auch ihre Form bedingen.

Anhang.

Tabelle über die Wassermengen in Grammen, welche im Kilogramm gesättigter Luft in Dampfform enthalten sind.[1]

t	$b = 760^{mm}$		700^{mm}		600^{mm}		500^{mm}		400^{mm}		300^{mm}		200^{mm}		t
— 30	0.31		0.34		0.39		0.48		0.60		0.80		1.20		— 30
		0.03		0.03		0.04		0.04		0.05		0.07		0.11	
— 29	34		37		43		52		65		87		31		— 29
		4		4		4		5		6		8		12	
— 28	38		41		48		57		71		95		43		— 28
		3		4		4		6		7		9		13	
— 27	41		45		52		63		78		1.04		56		— 27
		4		4		5		6		8		10		15	
— 26	45		49		57		69		86		14		71		— 26
		4		5		6		6		8		11		17	
— 25	49		54		63		75		94		25		88		— 25
		0.05		0.05		0.06		0.07		0.09		0.12		0.18	
— 24	0.54		0.59		0.69		0.82		1.03		1.37		2.06		— 24
		5		6		6		8		10		13		19	
— 23	59		65		75		90		13		50		25		— 23
		6		6		7		9		10		13		21	
— 22	65		71		82		99		23		63		46		— 22
		6		6		8		9		11		15		23	
— 21	71		77		90		1.08		34		78		69		— 21
		6		7		8		10		12		16		25	
— 20	77		84		98		18		46		94		94		— 20
		0.07		0.08		0.09		0.10		0.14		0.18		0.27	
— 19	0.84		0.92		1.07		1.28		1.60		2.12		3.21		— 19
		8		8		9		11		14		20		29	
— 18	92		1.00		16		39		74		32		50		— 18
		8		9		10		13		16		21		31	
— 17	1.00		09		26		52		90		53		81		— 17
		9		9		11		13		17		22		33	
— 16	09		18		37		65		2.07		75		4.14		— 16
		10		10		12		14		17		24		35	
— 15	19		28		49		79		24		99		49		— 15
		0.09		0.11		0.13		0.15		0.19		0.25		0.38	
— 14	1.28		1.39		1.62		1.94		2.43		3.24		4.87		— 14
		11		12		14		17		21		28		41	
— 13	39		51		76		2.11		64		52		5.28		— 13
		11		13		14		18		22		30		45	
— 12	50		64		90		29		86		82		73		— 12
		13		13		16		19		24		31		47	
— 11	63		77		2.06		48		3.10		4.13		6.20		— 11
		13		14		17		20		25		34		52	
— 10	76		91		23		68		35		47		72		— 10
		0.15		0.16		0.18		0.22		0.27		0.37		0.54	
— 9	1.91		2.07		2.41		2.90		3.62		4.84		7.26		— 9
		15		17		20		23		30		39		59	
— 8	2.06		24		61		3.13		92		5.23		85		— 8
		17		18		21		25		32		42		64	
— 7	23		42		82		38		4.24		65		8.49		— 7
		17		19		22		27		34		45		67	
— 6	40		61		3.04		65		58		6.10		9.16		— 6
		19		20		24		29		36		48		72	
— 5	59		81		28		94		94		58		88		— 5
		0.20		0.22		0.26		0.31		0.38		0.51		0.78	

[1] Für die Spannkraft des Wasserdampfes sind hierbei die Zahlen von Broch zu Grunde gelegt. S. Trav. et Mém. du Bur. internat. des Poids et Mes. I. A. 33. 1881.

t	$b = 760^{mm}$		700^{mm}		600^{mm}		500^{mm}		400^{mm}		300^{mm}		200^{mm}		t
— 4	2.79	0.20	3.03	0.22	3.54	0.26	4.25	0.31	5.32	0.38	7.09	0.51	10.66	0.78	— 4
— 3	3.01	22	27	24	81	27	58	33	72	40	64	55	11.49	83	— 3
— 2	24	23	52	25	4.10	29	93	35	6.16	44	8.23	59	12.37	88	— 2
— 1	48	24	78	26	42	32	5.30	37	63	47	85	62	13.32	95	— 1
0	3.75	0.27	4.07	0.29	4.75	0.33	5.71	0.41	7.13	0.50	9.52	0.67	14.33	1.01	0
+ 1	4.03	0.28	4.37	0.30	5.10	0.35	6.13	0.42	7.67	0.54	10.24	0.72	—		+ 1
+ 2	32	29	70	33	48	38	58	45	8.24	57	11.00	76	—		+ 2
+ 3	64	32	5.04	34	88	40	7.07	49	85	61	81	81	—		+ 3
+ 4	98	34	41	37	6.31	43	58	51	9.49	64	12.68	87	—		+ 4
+ 5	5.34	36	80	39	77	46	8.13	55	10.18	69	13.60	92	—		+ 5
+ 6	5.71	0.37	6.22	0.42	7.26	0.49	8.72	0.59	10.91	0.73	—		—		+ 6
+ 7	6.13	42	66	44	77	51	9.34	62	11.69	78	—		—		+ 7
+ 8	56	43	7.13	47	8.32	55	99	65	12.52	83	—		—		+ 8
+ 9	7.02	46	63	50	91	59	10.70	71	13.40	88	—		—		+ 9
+ 10	51	49	8.16	53	9.53	62	11.44	74	14.33	93	—		—		+ 10
+ 11	8.03	0.52	8.72	0.56	10.18	0.65	12.24	0.80	15.32	0.99	—		—		+ 11
+ 12	58	55	9.32	60	88	70	13.08	84	16.38	1.06	—		—		+ 12
+ 13	9.16	58	95	63	11.62	74	97	89	17.50	12	—		—		+ 13
+ 14	78	62	10.62	67	12.41	79	14.91	94	18.69	19	—		—		+ 14
+ 15	10.43	65	11.34	72	13.24	83	15.91	1.00	19.94	25	—		—		+ 15
+ 16	11.13	0.70	12.09	0.75	14.12	0.88	16.97	1.06	—		—		—		+ 16
+ 17	86	73	89	80	15.05	93	18.10	13	—		—		—		+ 17
+ 18	12.64	78	13.73	84	16.04	99	19.29	19	—		—		—		+ 18
+ 19	13.46	82	14.62	89	17.09	1.05	20.55	26	—		—		—		+ 19
+ 20	14.33	87	15.57	95	18.20	11	21.88	33	—		—		—		+ 20
+ 21	15.25	0.92	16.57	1.00	19.37	1.17	—		—		—		—		+ 21
+ 22	16.22	97	17.63	6	20.59	24	—		—		—		—		+ 22
+ 23	17.24	1.02	18.75	12	21.90	31	—		—		—		—		+ 23
+ 24	18.32	8	19.93	18	23.28	38	—		—		—		—		+ 24
+ 25	19.47	15	21.17	24	24.73	45	—		—		—		—		+ 25
+ 26	20.68	1.21	22.48	1.31	—		—		—		—		—		+ 26
+ 27	21.95	27	23.86	38	—		—		—		—		—		+ 27
+ 28	23.29	34	25.31	45	—		—		—		—		—		+ 28
+ 29	24.70	41	26.84	53	—		—		—		—		—		+ 29
+ 30	26.18	48	28.47	63	—		—		—		—		—		+ 30

Ausgegeben am 17. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1890.

XX.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

17. April. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

Der Vorsitzende legte eine dritte Mittheilung des Hrn. Prof. I. Rosenthal in Erlangen vor über calorimetrische Untersuchungen an Säugethieren.

Die Mittheilung folgt umstehend.



Calorimetrische Untersuchungen an Säugethieren.

Von Prof. I. Rosenthal
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond.)

Dritte Mittheilung.

I.

In meiner zweiten Mittheilung[1] habe ich angeführt, dass die Wärmeproduction der Säugethiere von der Umgebungstemperatur abhängig ist, indem dieselbe bei einer mittleren Temperatur (von etwa 15° C.) ein Minimum zeigt, während sie bei niederen wie bei höheren Temperaturen einen höheren Werth erreicht.

Ich habe seitdem die Wärmeproduction noch in einer anderen Beziehung zur Umgebungstemperatur der Untersuchung unterworfen, indem ich dieselbe stets bei der gleichen Temperatur der Umgebung bestimmte, das untersuchte Thier aber vor der Bestimmung entweder in der gleichen, oder in einer höher, oder in einer niedriger temperirten Umgebung aufbewahrte. Ich wollte auf diese Weise feststellen, ob der Wechsel der Temperatur beim Einbringen in den Apparat einen unmittelbaren Einfluss auf die Wärmeproduction ausübt.

Ein ähnlicher Wechsel der Umgebungstemperatur hatte zwar schon bei einem Theil der in der früheren Mittheilung erwähnten Versuche stattgefunden. Diese letzteren zerfielen, wie dort[2] angegeben wurde, in drei Reihen. Bei der dritten wurde der Versuch entweder im kalten Zimmer begonnen und dann der Apparat mitsammt dem Thier in ein geheiztes Zimmer gebracht, oder umgekehrt im geheizten Zimmer begonnen und dann in einem kalten fortgesetzt. Dabei wurde die höhere Temperatur stets so gewählt, dass sie derjenigen nahe lag, bei welcher das Minimum der Wärmeproduction beobachtet wird. Dementsprechend ergab sich denn auch, dass die Wärmeproduction beim Übergang in die niedere Temperatur zu- und beim Übergang in die höhere Temperatur abnahm.

[1] Diese Berichte 1889. S. 245.
[2] A. a. O. S. 253.

Von dieser Versuchsanordnung unterschied sich die neue insofern, als ein für alle mal die calorimetrische Untersuchung nur bei Temperaturen vorgenommen wurde, bei denen eine mittlere Wärmeproduction zu erwarten war, d. h. bei solchen Temperaturen, welche unter 15°, aber mehr oder weniger über 5° lagen, dass die Thiere aber vor dem in der Regel morgens 8 Uhr beginnenden Versuch während der ganzen Nacht in der gleichen oder in einer anderen (niederen oder höheren) Temperatur gehalten worden waren.

Das Ergebniss dieser Versuche war, dass die Thiere, wenn sie vor dem Versuch in einer niedereren Temperatur gehalten worden waren, weniger, wenn sie aber vorher in einer höheren Temperatur gewesen waren, mehr Wärme an das Calorimeter abgaben, als wenn sie in der gleichen Temperatur gewesen waren, bei der auch die Messung vorgenommen wurde. Die Unterschiede waren in einzelnen Fällen grösser als die von mir in den früheren Versuchen für die gleichen Temperaturunterschiede gefundenen Schwankungen. Worauf ich aber vorzugsweise die Aufmerksamkeit lenken möchte, das ist der Umstand, dass diese Unterschiede deutlich immer nur in der ersten oder in den beiden ersten Stunden der Versuche auftraten, bei längerer Fortsetzung derselben sich aber mehr und mehr verwischten.

In der Regel lasse ich die Thiere stets zehn Stunden hintereinander in dem Calorimeter. Berechnet man nun aus den Ablesungen eines solchen zehnstündigen Versuchs den Mittelwerth, so zeigen diese Mittelwerthe untereinander keine grösseren Unterschiede, als sie auch sonst bei calorimetrischen Versuchen vorzukommen pflegen, jedenfalls ist keine feste Gesetzmässigkeit zwischen den beobachteten Werthen und den veränderlichen Umständen unserer Versuchsreihe zu erkennen. Ich komme daher auf Grund der neuen Versuche zu dem rein negativen Ergebniss, dass der Aufenthalt des Thieres in kälterer oder wärmerer Luft vor Beginn des Versuchs auf die Wärmeproduction während des Versuchs, innerhalb der von mir untersuchten Temperaturgrenzen wenigstens (— 5 bis + 20°) keinen merklichen Einfluss ausübt.

II.

Es bleibt aber noch die Frage zu erörtern, wie wir die im Anfang jedes Versuchs hervortretenden, wenngleich geringen, so doch sehr ausgesprochenen Unterschiede zu deuten haben.

In dieser Beziehung muss ich nochmals darauf hinweisen, dass die an meinem Calorimeter (wie an jedem anderen) abgelesenen Werthe nur dann als unmittelbares Maass der Wärmeproduction des Thieres

anzusehen sind, wenn die Temperatur des Thieres beim Schluss des Versuchs genau dieselbe ist wie beim Beginn. Ich sehe gerade darin einen grossen Vorzug des Luftcalorimeters, dass in demselben die Thiere in normalen Verhältnissen sich befinden, dass sich ihre Eigenwärme fast gar nicht ändert. Überdies wird dieselbe stets bei Beginn und beim Schluss eines jeden Versuchs gemessen und die, meistens sehr geringe, Änderung bei Berechnung des Mittelwerthes berücksichtigt. Ihr Einfluss ist um so geringer, da sie sich über den langen Zeitraum von zehn Stunden vertheilt.

Das alles gilt aber nicht mehr, wenn wir Versuchsbedingungen einführen, welche als solche zu Änderungen in der Eigenwärme des Thieres Anlass geben. Mögen dieselben auch gering und kurzdauernd sein, so können sie doch vorübergehend die Angaben des Calorimeters beeinflussen in einer Weise, dass dieselben grösser oder geringer ausfallen als die in der gleichen Zeit producirte Wärme, je nachdem das Thier sich etwas abgekühlt oder sich etwas erwärmt hat.

Aus diesem Grunde habe ich auch oben bei Mittheilung des Versuchsergebnisses mit gutem Bedacht nicht von der Wärmeproduction gesprochen, sondern nur von der Wärmeabgabe an das Calorimeter. Wir können ja von der ersteren gar nichts bestimmtes aussagen, ehe wir nicht die etwa gleichzeitig vorgekommenen Änderungen der Eigenwärme festgestellt haben.

Es wurde deshalb in einer besonderen Versuchsreihe dieselbe Untersuchung nochmals durchgeführt mit Beschränkung auf die Anfangszeit von 1—1½ Stunden und mit Berücksichtigung der Änderungen in der Eigenwärme. Um möglichst deutliche Ergebnisse zu erzielen, wurden die Versuche nur an Kaninchen angestellt, da diese gegen Schwankungen der Umgebungstemperatur empfindlicher sind als grössere Thiere, und um diese Empfindlichkeit noch zu steigern, wurden die Thiere am ganzen Körper geschoren. Um den Einfluss dieses Eingriffs beurtheilen zu können, wurde bei jedem Thiere eine Anzahl von Calorimeterbestimmungen dem Scheeren vorausgeschickt. Ich erhielt aber auch bei diesen Versuchen (selbstverständlich nach Berücksichtigung der Änderungen in der Eigenwärme bei jedem einzelnen Versuch) im wesentlichen das gleiche Ergebniss wie bei den Versuchen an den grösseren Thieren (Hunden und Katzen). Die Unterschiede waren, wie ich erwartete, noch deutlicher ausgeprägt als bei den grossen Thieren und stets in demselben Sinne vorhanden. Ich will hier nur, des Beispiels wegen, die Mittelzahlen einiger Versuche angeben:

Kan. *A.*	ungeschoren	2.033	sec.	ca.
»	geschoren, warm aufbewahrt	2.489	»	»
»	kalt aufbewahrt	2.074	»	»

Kan. *B.*	ungeschoren	1.859	sec. ca.
»	geschoren, kalt aufbewahrt	1.823	» »
»	» warm aufbewahrt	1.947	» »
Kan. *C.*	ungeschoren	1.062	» »
»	geschoren, warm aufbewahrt	1.388	» »
»	» kalt aufbewahrt	1.248	» »
Kan. *D.*	ungeschoren	1.359	» »
»	geschoren, warm aufbewahrt	1.569	» »
»	» kalt aufbewahrt	1.384	» »

Dabei zeigte sich durchgehends, dass die vor dem Versuch in der Wärme, d. h. bei Temperaturen von 18 bis 22° C. aufbewahrten Thiere, wenn sie bei den mässigen Temperaturen von 7—11° in dem Calorimeter verweilt hatten, etwas, zuweilen sogar bis zu 1° und mehr an ihrer Eigenwärme verloren hatten, während die aus kalter Umgebung (— 5 bis + 5°) in das Calorimeter gebrachten Thiere gar keine oder nur ganz geringfügige Schwankungen derselben zeigten. Wie aus obigen Zahlen hervorgeht, ist aber trotzdem stets in dem ersteren Fall die Wärmeproduction etwas höher als in dem letzteren.

Man wird wohl nicht fehlgreifen, wenn man unsere geschorenen Kaninchen in ihrer Wärmeregulirung einigermaassen mit einem unbekleideten Menschen vergleicht. Wie wir aus den Versuchen der HH. Senator, Winternitz u. A. wissen, sinkt auch bei letzteren unter ganz ähnlichen Umständen als die in unseren Versuchen hergestellten die Eigenwärme um ein Geringes. Ob dabei zugleich eine Steigerung der Wärmeproduction erfolgt, ist bisher unbekannt, denn die Versuche, aus welchen Hr. Liebermeister auf eine solche schloss, sind nicht ausreichend, diesen Schluss zu rechtfertigen. Immerhin liegt es nahe anzunehmen, dass der beim Frösteln auftretende Schauder, die Gänsehaut und andere, unwillkürlich auftretende Contractionen glatter und quergestreifter Muskeln eine vermehrte Wärmeproduction bedingen, ohne dass man deshalb die Lehre des Hrn. Pflüger von dem »chemischen Muskeltonus« schon für erwiesen anzusehen hätte. In ähnlicher Weise mag auch die vermehrte Wärmeproduction der Kaninchen bei der Abkühlung zu Stande kommen. Da dieselbe aber, bei dauernder Erhaltung der niederen Temperatur bald wieder verschwindet, so dürfen wir es keineswegs so auffassen, als wenn ein für alle Mal durch einen regulatorischen Eingriff des Nervensystems der niederen Umgebungstemperatur stets eine höhere Wärmeproduction entspräche und umgekehrt. Das kann um so weniger der Fall sein, als nach unseren früheren Versuchen bei Umgebungstemperaturen über 15° wiederum eine Steigerung der Wärmeproduction auftritt.

III.

Der Widerspruch zwischen Wärmeproduction und Wärmeausgabe, welcher nothwendig zu Änderungen der Eigenwärme führen muss, kann in noch viel stärker ausgeprägter Weise auftreten bei Eingriffen in die normalen Verhältnisse des Thierlebens, welche Schwankungen der Eigenwärme veranlassen, sei es durch Änderungen in der Blutcirculation, sei es auf anderem Wege. Ich habe auch diese in den Bereich meiner Untersuchungen gezogen und will von den hierbei gewonnenen Erfahrungen zunächst nur eine besprechen, weil sie leicht verständlich und übersichtlich ist.

Injicirt man einem Kaninchen eine passende Dosis Chloralhydrat, durch welche es in einen tiefen Schlaf versetzt wird, so sinkt seine Eigenwärme erheblich. Die Abnahme erfolgt während des Schlafes stetig; sie kann z. B. im Verlauf einer Stunde mehr als 2^{C} betragen. Erwacht das Thier aus der Narkose, was je nach der Grösse der Dosis 1, 2 oder mehr Stunden nach der Injection meistens schnell erfolgt, so steigt die Eigenwärme wieder ziemlich schnell bis zur Norm an.

Untersucht man ein Thier unter den gleichen Verhältnissen im Calorimeter, so findet man unmittelbar nach der Injection ein erhebliches Ansteigen der Wärmeausgabe, welche im Verlauf der ersten Stunde etwa um 30—40 Procent grösser wird, als sie vor derselben war. Es ist aber ohne weiteres klar, dass diese vermehrte Wärmeausgabe nicht als eine vermehrte Wärmeproduction gedeutet werden darf, weil ja das Thier innerhalb dieser Zeit sich abgekühlt, also einen Theil seines Wärmevorraths an das Calorimeter abgegeben hat. In einem derartigen Falle z. B. producirte ein Thier in der letzten Stunde vor der Injection $8^{Ca}.6$; in der auf die Injection folgenden Stunde gab es an das Calorimeter ab $11^{Ca}.4$. Es hatte aber in derselben Zeit an Eigenwärme verloren $4^{Ca}.3$. Also war seine Wärmeproduction in Wirklichkeit gewesen $7^{Ca}.1$, d. h. um $1^{Ca}.5$ weniger als vor der Injection.

Dass ein schlafendes Thier weniger Wärme producirt als ein wachendes, kann als selbstverständlich gelten. Es fallen ja, abgesehen von anderen Muskelbewegungen die zur aufrechten Haltung erforderlichen Muskelcontractionen fort, welche an sich schon mit der Erzeugung einer gewissen Wärmemenge verbunden sein müssen. Dazu kommen dann noch die Abnahme der Herzthätigkeit und der Athembewegungen, welche letzteren flacher und seltener werden. Ist so die Wärmeproduction verringert, während die Wärmeausgabe vermehrt ist, so muss natürlich die Eigenwärme sinken. Um sie zu erklären,

braucht man nicht auf eine besondere regulatorische Thätigkeit des Nervensystems zurückzugreifen.

Die verminderte Wärmeproduction im Chloralschlaf ist auch von einer verminderten CO_2-Production begleitet, wie ich durch besondere Versuche habe feststellen lassen, auf welche ich hier nicht weiter eingehen will. Ob beide Vorgänge genau in gleichem Verhältniss abnehmen, habe ich bis jetzt noch nicht untersucht. Nothwendig ist das nach den von mir früher festgestellten Thatsachen durchaus nicht. Die messbare Wärmeproduction sowohl wie die CO_2-Ausgabe eines Säugethiers sind jede für sich die Summen so vieler einzelnen im Körper vorsichgehenden Processe, dass eine strenge Proportionalität zwischen beiden überhaupt nicht, eine ungefähre nur für längere Perioden stattfinden kann.

Während in unserem Falle die Wärmeproduction ab- und die Wärmeabgabe zunimmt, kann in anderen Fällen das gerade Gegentheil stattfinden. Bei allen reflectorischen Krampfzuständen z. B., insbesondere also auch bei der Strychninvergiftung und der Infection mit dem Tetanusbacillus, ebenso aber auch bei dem durch unmittelbare Reizung des Rückenmarks erzeugten allgemeinen Tetanus haben wir eine Verbindung von vermehrter Wärmeproduction und verminderter Wärmeausgabe. In diesen Fällen muss also die Eigenwärme beträchtlich steigen, was bekanntlich auch geschieht. Ein Gleiches gilt, wie es scheint, für gewisse Fälle von Fieber. Ob für alle, das halte ich für zweifelhaft. Da aber meine Untersuchungen über das Fieber noch nicht abgeschlossen sind, so behalte ich die Besprechung desselben einer späteren Mittheilung vor.

Ausgegeben am 24. April.

1890.

XXI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

---

17. April. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Mommsen.

Hr. Sachau las: Die Altaramaeische Inschrift auf dem Standbilde des Königs Panammû von Sam'al aus dem 8. Jahrhundert vor Chr. Geburt.

Ausgegeben am 24. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei



1890.

XXII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

24. April. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. E. du Bois-Reymond.

1. Hr. Schmoller las über das deutsche städtische Fremdenrecht von 1200—1500.

Die Mittheilung wird an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

2. Hr. Auwers theilte nach einem Schreiben des Directors des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam Hrn. Prof. H. C. Vogel vom 23. d. M. mit, dass die auf dem Observatorium gemachten spectrographischen Aufnahmen des Sterns α Virginis eine Bahnbewegung desselben von kurzer Periode nachgewiesen haben.

Das Spectrum des Sterns gehört zur Classe Ia und zeigt breite verwaschene Wasserstofflinien. Zwei Aufnahmen desselben im April 1889 hatten in guter Übereinstimmung eine ungewöhnlich starke Verschiebung der Sternlinie nach Violet ergeben, eine dritte, nur zwei Tage nach der zweiten gemachte dagegen gab eine beträchtliche Verschiebung nach Roth. Zur Aufklärung des Falles wurde im gegenwärtigen Monat bei jeder günstigen Gelegenheit eine Aufnahme von α Virginis gemacht, und haben sich bis jetzt folgende Werthe für die Bewegung des Sterns in der Richtung zur Sonne (—) bez. von der Sonne (+) ergeben:

M. Zt. Potsdam			beob. Bew.	Red. auf ☉	✻ − ☉
1889 April	21	9ʰ 15ᵐ	− 11.6 Meil.	− 0.7 M.	− 12.3 M.
»	29	11 10	− 12.0	− 1.2	− 13.2
Mai	1	10 58	+ 7.5	− 1.3	+ 6.2
1890 April	4	11 30	− 3.4	+ 0.5	− 2.9
»	9	10 30	− 14.2	+ 0.2	− 14.0
»	10	11 30	− 0.3	+ 0.1	− 0.2
»	11	10 50	+ 7.6	0.0	+ 7.6
»	13	10 50	− 14.7	− 0.1	− 14.8
»	15	11 0	+ 11.3	− 0.3	+ 11.0

Diese Beobachtungen werden für eine erste Annäherung befriedigend durch eine Formel $v = v_0 \sin\left(\frac{t-t_0}{p} \cdot 360^\circ\right)$ dargestellt, wenn man für die Epoche 1890 April 2 $10^h_.0$ m. Zt. Potsdam, für die Periode p $4^d\ 0^h_.3$ und für die grösste im Visionsradius zu beobachtende Geschwindigkeit (v_0) 12 Meilen annimmt. Befreit man die Beobachtungen noch von der einstweilen = − 3 Meilen anzunehmenden Translationsbewegung des Systems, so ergibt sich folgende Darstellung (B. − R.):

1889 Apr.	21	+ 2.7 M.	1890 Apr.	4	+ 1.2 M.	1890 Apr.	11	− 1.4 M.
»	29	+ 1.8 »	»	9	+ 1.0 »	»	13	+ 0.2 »
Mai	1	− 2.8 »	»	10	+ 2.1 »	»	15	+ 2.0 »

Die Umlaufszeit ist nach Vergleichung der vorjährigen mit den diessjährigen Beobachtungen angenommen; die Zahl der auf ein Jahr fallenden Umläufe scheint bereits nicht mehr als um ± 2 Umläufe unsicher zu bleiben.

Wenn die Bahnebene nicht stark gegen die Gesichtslinie geneigt ist und die Geschwindigkeit von 12 Meilen daher näherungsweise als die Bahngeschwindigkeit angesehen werden kann, würde der Abstand des beobachteten Sterns vom Schwerpunct des Systems etwa 660000 Meilen betragen. Befindet sich der Begleiter in gleicher Entfernung vom Schwerpunct, so folgt für die Masse jedes der beiden Körper etwas mehr als die Sonnenmasse (1.2 ☉). Bei einer Parallaxe von 0ʺ2 würde dann das Maximum der scheinbaren Entfernung der beiden Componenten nur 0ʺ13 betragen, so dass der Begleiter auch für die mächtigsten Instrumente nicht sichtbar sein wird. Auf den Potsdamer Platten macht derselbe sich selbst nicht merklich, woraus aber nur folgt, dass seine Helligkeit die dritte Grösse nicht übersteigt. —

Hr. Prof. Vogel bemerkt anschliessend an diese Angaben, dass die zahlreichen in Potsdam an δ Orionis angestellten Beobachtungen ebenfalls eine periodische Bewegungserscheinung als wahrscheinlich ergeben haben, dass aber der Betrag dieser Änderung nur klein ist und aus den vorliegenden Beobachtungen nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann.

3. Hr. Mommsen übergab im Auftrag der Frau Studemund in Breslau als deren Geschenk die von ihrem verstorbenen Gatten, correspondirendem Mitglied der Akademie, hinterlassenen Collectaneen für die Institutionen des Gaius, welche zu der im Auftrage der Akademie von Hrn. Studemund ausgeführten Ausgabe benutzt worden sind, und für die Schriften des Fronto, welche insbesondere ein genaues Facsimile der vaticanischen Palimpsestblätter enthalten. Die Akademie beschloss für dieses Geschenk ihren Dank auszusprechen und, um diese Papiere dem Wunsch der Geberin entsprechend der allgemeinen Benutzung möglichst zugänglich zu machen, sie der Handschriftenabtheilung der hiesigen Königlichen Bibliothek zum Eigenthum zu übergeben.

4. Hr. Conze legte im Auftrage des Kaiserlichen archaeologischen Instituts die folgenden Publicationen vor: Antike Denkmäler I, 4, 1889, herausgegeben im Zusammenwirken des ganzen Instituts, zumal der Secretariate in Rom und Athen, sowie der Centraldirection in Berlin. — Die antiken Sarkophagreliefs Band II, mythologische Cyklen, bearbeitet und herausgegeben mit Benutzung der Vorarbeiten von Fr. Matz von Hrn. Carl Robert. — I rilievi delle Urne Etrusche Vol. II, parte 1, herausgegeben, auch der äussern Gestalt nach im Anschlusse an den ersten von Hrn. Heinrich von Brunn herrührenden Band, von Hrn. Gustav Körte. — Die antiken Bauwerke der Insel Lesbos, untersucht und aufgenommen von Hrn. Richard Koldewey, mit Beiträgen der HH. Kiepert und Lolling.



Die Mestomscheiden der Gramineenblätter.

Von S. Schwendener.

(Vorgetragen am 10. April [s. oben S. 353].)

(Hierzu Taf. IV.)

Dass die Mestombündel der Cyperaceen und Juncaceen durchgehends von einer typischen Schutzscheide umschlossen und dadurch von den Bastbelegen und ebenso von dem anstossenden Grundparenchym scharf getrennt sind, habe ich bereits früher hervorgehoben.[1] An derselben Stelle findet sich ferner die Bemerkung, dass solche Mestomscheiden auch bei den Gramineen häufig vorkommen, und zur Veranschaulichung derselben ist auf Taf. III, 5 ein Gefässbündel aus der Blattscheide von *Bromus*, auf Taf. 10, 1 ein I-Träger aus dem Blatte von *Gynerium* dargestellt; ich vermied es aber absichtlich, aus dem Vorhandensein oder Fehlen dieser Scheide irgend welche Schlussfolgerungen zu ziehen. Auch Duval-Jouve[2] erwähnt in seiner »Histotaxie des feuilles de Graminées« die in Rede stehende Scheide, schreibt dieselbe aber sämmtlichen Gramineen ohne Ausnahme zu, was jedenfalls unrichtig ist.

Meine späteren Untersuchungen über die Schutzscheiden im Allgemeinen[3] führten mich sodann zu der Ansicht, dass die verschiedenartige Ausbildung derselben, insbesondere die Abstufung der mechanischen Verstärkungen, mit der durch Klima und Standort bedingten Inanspruchnahme im Zusammenhang stehe. Aber allerdings zeigte sich dieser Zusammenhang — wie übrigens in allen ähnlichen Fragen — nur bei Pflanzen, welche unter extremen Verhältnissen leben, klar ausgesprochen, während zahlreiche Vertreter unserer Flora in diesem Punkte nur ungenügende oder sogar scheinbar widersprechende Daten lieferten. Die Unterschiede in den Standortsverhältnissen sind hier offenbar zu klein, um einen unzweideutigen Ausschlag zu geben, und

[1] Das mechanische Princip u. s. w. 1874, S. 17.

[2] Ann. sc. nat. 6e série t. I (1875). Die Angaben Duval-Jouve's bezüglich der Schutzscheide finden sich dem wesentlichen Inhalte nach wiedergegeben bei H. E. M. Güntz: Unters. über die anat. Structur der Gramineenblätter. Leipzig 1886. (Diss.)

[3] Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen. Abhandl. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1882.

was die scheinbaren Widersprüche anbetrifft, so kommt noch ein besonderer Umstand in Betracht, auf den ich erst in neuester Zeit aufmerksam wurde, die Thatsache nämlich, dass die meisten einheimischen Pflanzen nicht endemisch, sondern eingewandert sind und daher zum Theil Merkmale aufweisen, welche in einer früheren Periode, unter dem klimatischen Einfluss der Urheimath, ausgebildet wurden.[1] Mit Rücksicht hierauf kann ich die Einwände, welche auf Grund anatomischer Studien an einheimischen Gewächsen gegen meine Auffassung erhoben worden sind, nicht für begründet erachten. Nur räume ich gerne ein, dass hier und da Wandverstärkungen vorkommen mögen, welche überhaupt nicht zu dieser Gruppe von Erscheinungen gehören.[2]

Für die verschiedenartige Ausbildung der Scheide und ihrer Verstärkungen erscheint mir demnach die Annahme einer durch äussere Factoren bedingten Anpassung unvermeidlich, wobei aber natürlich dahingestellt bleibt, ob die in Rede stehenden Anpassungsmerkmale durch natürliche Zuchtwahl oder durch directe Bewirkung im Sinne Nägeli's ausgeprägt wurden.

Andererseits habe ich mich in den letzten Jahren wiederholt überzeugt, dass das blosse Vorkommen oder Fehlen einer Schutzscheide, zumal in oberirdischen Stamm- und Blattorganen, sich in vielen Fällen schlechterdings nicht auf Einflüsse des umgebenden Mediums zurückführen lässt, vielmehr von unbekannten inneren Ursachen abhängig ist. In dieser Hinsicht liefern nun gerade die Gramineenblätter sehr instructive Belege, welche diese eine, noch wenig besprochene Seite der Frage aufzuklären geeignet sind. Dieselben darzulegen und mit einigen Vorkommnissen bei anderen Angiospermen zu vergleichen, ist der Zweck der folgenden Mittheilung.

1. Morphologie der Mestomscheide.

Betrachtet man eines der grösseren Mestombündel im Blatte von *Poa, Festuca, Avena, Stipa, Hordeum* u. s. w. auf Querschnitten, so kann man sich leicht überzeugen, dass dasselbe ausser der grünen (zuweilen auch farblosen) Parenchymscheide, welche niemals fehlt, noch eine

[1] Vergl. hierüber meine Mittheilung über »die Spaltöffnungen der Gramineen und Cyperaceen«, diese Sitzungsber. 1889, S. 65.

[2] Die Wandverdickungen in der Schutzscheide und im Centralcylinder der älteren Wurzeln von *Potamogeton*, auf welche Sauvageau hingewiesen hat (Journal de Botanique, 1889), fallen z. B. nicht unter den von mir betonten Gesichtspunkt, und soweit die daselbst genannten Arten in ruhigem Wasser leben, ist auch jede andere Beanspruchung auf Zug, als die vom Luftgehalt herrührende, so gut wie ausgeschlossen. Eine schwache Verstärkung würde indess der Auftrieb der Luft bei grösseren Exemplaren immerhin rechtfertigen.

innere Scheide besitzt, deren Eigenschaften mit denen der echten Schutzscheiden übereinstimmen (Fig. 4 u. 10). Ihre Zellen sind gestreckt-parenchymatisch, jedoch häufig mit mehr oder weniger spitz zugeschärften Endigungen (Fig. 5 u. 12), die Wände zuweilen stark porös, aber zum Unterschiede von specifisch mechanischen Zellen mit rundlichen oder ovalen Poren.[1] Wo eine nennenswerthe Wandverdickung vorhanden, ist dieselbe meist innenseitig vorwiegend und in der Regel auf der Leptomseite erheblich stärker als über dem Hadrom. Ausnahmen von dieser Regel scheinen indess nicht gerade selten vorzukommen; als solche wären z. B. die Gattungen *Bambusa, Gynerium, Phragmites* und verschiedene Festucaceen zu bezeichnen, die drei erstgenannten mit ringsum gleichmässiger Verdickung der Zellwände, die übrigen mit zwar innenseitiger, aber auf Hadrom- wie Leptomseite gleich starker Verdickung.

Die Querschnittsform der Wandverdickungen stimmt nicht immer mit derjenigen überein, welche die Wurzelscheide der nämlichen Pflanze kennzeichnet. Letztere kann z. B. innenseitig verdickt sein, während der Mestomscheide in den Blättern eine allseitig gleichmässige Verdickung der Zellwände zukommt, oder umgekehrt.

Weiter auf die wenig bedeutsamen Unterschiede im Querschnittsbilde der Mestomscheiden einzugehen, hätte für unsere Betrachtung keinen Werth. Dagegen verdient das Verhalten der kleineren und kleinsten Bündel, welche keineswegs immer mit den grossen übereinstimmen, noch besondere Erwähnung. Es kommt hier nämlich gar nicht selten vor, dass die Scheide nur das Leptom vollständig umschliesst, auf der Hadromseite dagegen hufeisenartig geöffnet erscheint, indem sie sich direct an die primordialen Gefässe anschliesst. Die letzteren ersetzen also gewissermaassen die fehlenden Scheidenzellen und vervollständigen das Hufeisen zum geschlossenen Kranze. Ein solches Bündel ist in Fig. 2 abgebildet. Die Zahl der in die Lücke eingeschobenen Gefässe ist variabel und geht selten über 2 bis 3 hinaus.

Als Beispiele von Gräsern, bei welchen diese Unterbrechungen der Mestomscheide an kleinen und namentlich an den allerkleinsten Bündeln constatirt wurden, führe ich in alphabetischer Reihenfolge an:

Bambusa vulgaris, Bromus mollis, Briza media, Cynosurus echinatus, Glyceria distans, Koeleria alpicola, Lolium temulentum, Oplismenus imbecillis, Phleum Boehmeri, Poa pratensis und *nemoralis, Secale cereale.*

---

[1] H. E. M. GÜNTZ bezeichnet in der oben citirten Schrift diese Scheiden einfach als »Bastscheiden«, was durchaus ungerechtfertigt ist. Ebenso sind auch die dickwandigen Zellen zwischen Leptom und Hadrom keine Bastzellen.

Dagegen habe ich bei den nachstehend verzeichneten Gräsern vergeblich nach solchen Unterbrechungen gesucht, was immerhin zu der Annahme berechtigt, dass sie hier seltener, vielleicht gar nicht vorkommen.

Alopecurus nigricans, Brachypodium pinnatum, Calamagrostis Epigeios, Elymus giganteus, Festuca ovina, Hordeum vulgare, Phragmites communis, Stipa pennata.

Als ein besonderer, nach der entgegengesetzten Richtung abweichender Fall sei noch erwähnt, dass bei *Panicum miliaceum* eine Mestomscheide nur den grösseren Bündeln zukommt, bei den kleineren dagegen vollständig fehlt (Fig. 14). Diese Abweichung bildet hier in gewissem Sinne den Übergang zu denjenigen Paniceen, bei welchen überhaupt keine Mestomscheiden zur Entwickelung kommen, weder an grossen, noch an kleinen Bündeln.

Das Vorkommen von Mestomscheiden, welche auf der Hadromseite durch kleinlumige Ringgefässe, statt durch normale Scheidenelemente geschlossen sind, ist bis dahin meines Wissens noch nicht constatirt worden. Zwar findet man unvollständige Scheiden, welche nur das Phloem umschliessen sollen, hin und wieder erwähnt, so z. B. bei W. Laux[1], welcher sie im Stengel verschiedener *Juncus*-Arten gefunden haben will. Mit dieser Angabe stehen indess meine eigenen Beobachtungen aus früherer Zeit, wonach bei Juncaceen und Cyperaceen entweder keine (Rhizome) oder aber ganz geschlossene Mestomscheiden (Stengel und Blätter) vorkommen, im Widerspruch; überdies ist die Lücke in diesen angeblich unvollständigen Scheiden der Beschreibung zufolge nicht, wie bei den Gramineenblättern, durch Gefässe ausgefüllt. Dasselbe gilt von den markständigen Bündeln der Piperaceen, welche nach J. E. Weiss[2] zum Theil ebenfalls unvollständige Scheiden besitzen sollen.

Ich glaube nun aber gerade auf die Thatsache, dass bei den Gräsern kleine Gefässe an Stelle der Scheidenzellen auftreten, besonderes Gewicht legen zu sollen, weil ich darin gewissermaassen die erste Übergangsstufe zur vollständigen Unterdrückung der Scheide und zum Ersatz derselben durch einen Kranz von Gefässen (mit oder ohne Bastbelege) erblicke, wie dies bekanntlich bei den concentrischen Bündeln der Monocotylen-Rhizome (*Carex, Juncus* u. s. w.) zu beobachten ist. Der Hadromtheil umschliesst hier das Leptom ringförmig und ist selbst wieder von einer ein- bis mehrschichtigen Stereomhülle umgeben; eine eigentliche Mestomscheide fehlt.

---

[1] W. Laux, ein Beitrag zur Kenntniss der Leitbündel im Rhizom monocotyler Pflanzen. Dissert. Berlin 1887, S. 31.

[2] Flora 1876, S. 327.

Dass die Mestomscheiden bezüglich ihrer Wandstärke ähnliche Verschiedenheiten zeigen wie die Schutzscheiden der Wurzeln, lässt sich erwarten; doch sind die beobachteten Gegensätze nicht gerade sehr auffallend und darum weniger instructiv. Beispielsweise sei erwähnt, dass die wasserliebenden *Glyceria-* und *Alopecurus*-Arten, ebenso manche Getreide- und Futtergräser nur schwache, dagegen *Festuca ovina, Agrostis stolonifera, Poa pratensis* (Fig. 10), *Sesleria coerulea* u. a., welche an mehr trockenen Standorten vorkommen, stärkere Wandverdickungen aufweisen. Aber im Ganzen genommen fällt von den Anpassungsmerkmalen des Blattes offenbar nur ein kleiner Theil auf die Scheide. Sonst wäre es ja auch nicht erklärlich, dass dieselbe bei einem ansehnlichen Theil der Gräser vollständig fehlt und durch die Parenchymscheide ersetzt ist.

Im Übrigen kann sich die Anpassung unter Umständen auch auf den Grad der Verkorkung, nicht blos auf den des local-mechanischen Schutzes beziehen. Aber allerdings kommt der letztere meist vorwiegend, zuweilen fast ausschliesslich zur Geltung. Bei den Arundineen, deren Blattbündel trotz der vorhandenen Unterschiede in mancher Hinsicht an diejenigen der Andropogoneen erinnern, steht z. B. die mechanische Wirksamkeit der Mestomscheide, verglichen mit ihrem geringen Widerstande in concentrirter Schwefelsäure, so sehr im Vordergrund, dass ich namentlich bei *Arundo Donax* wiederholt auf die Frage zurückkam, ob hier die Annahme einer echten Mestomscheide noch gerechtfertigt sei. Es schien mir indess, hauptsächlich mit Rücksicht auf die gemeinsamen Züge der grösseren Bündel, welche stets von einem derbwandigen Kranz von Zellen umschlossen sind, durchaus unstatthaft, die beiden Gattungen *Phragmites* und *Arundo* von einander zu trennen. Viel eher dürfte, um den vorkommenden Abweichungen gerecht zu werden, die Auffassung am Platze sein, dass hier Übergangsformen vorliegen, welche die Gräser mit und ohne Mestomscheide unter einander verbinden. Es wird sich weiterhin, bei Besprechung der Parenchymscheiden, Gelegenheit bieten, auf diesen Punkt zurückzukommen.

2. Die Parenchymscheide.

Über die Parenchymscheide, welche jedes einzelne Bündel der Gramineenblätter, gleichviel ob es eine Mestomscheide besitze oder nicht, umhüllt und mit dem Assimilationsgewebe in Verbindung setzt, könnte ich hier mit Stillschweigen hinweggehen, wenn dieselbe nicht zuweilen Merkmale darböte, welche sonst nur den Schutzscheiden zu-

kommen, nämlich partielle Unlöslichkeit in concentrirter Schwefelsäure und bei grösseren Bündeln Verdickung der Zellhaut an den Anschlussstellen der Bastrippen, zumal über dem Leptom. Diese Eigenschaften sind namentlich bei den Gräsern, denen eine Mestomscheide mangelt, deutlich ausgeprägt, so dass man den Eindruck gewinnt, die Pflanze habe hier die Merkmale und damit auch die Verrichtungen der beiden Scheiden einer einzigen zugewiesen, welche dann allerdings noch vorwiegend den Charakter einer Parenchymscheide beibehält und in der Regel schon durch ihren Chlorophyllgehalt sich sofort als solche zu erkennen gibt.

Als Beispiele für die angedeutete Widerstandsfähigkeit in concentrirter Schwefelsäure erwähne ich die Parenchymscheiden in den Blättern von *Zea*, *Coix*, *Saccharum*, *Andropogon*, *Setaria*, *Pennisetum*. Es sind dies sämmtlich Gattungen, bei welchen eine Mestomscheide nicht vorhanden ist; als Ersatz dafür bilden hier aber die unlöslichen Streifen der Parenchymscheide, insbesondere ihrer Radial- und Transversalwände, ein zusammenhängendes Netz, welches durchaus an das Verhalten echter Schutzscheiden erinnert.

Bezüglich der Wandverdickungen verweise ich auf Fig. 3, in welcher eines der grössten Blattbündel von *Zea Mays* dargestellt ist. Man sieht, wie die grüne Parenchymscheide auf der Leptom- und Hadromseite in mässig verdickte, chlorophyllfreie Zellen übergeht, die man auf den ersten Blick für Bastzellen halten möchte. Sie sind aber etwas weniger dickwandig als diese und überdies durch zahlreiche rundliche Poren ausgezeichnet. In diesem Falle ist also die Parenchymscheide zwar ringsum geschlossen, jedoch an den Ansatzstellen der Bastrippen zu Gunsten der Festigkeit abweichend ausgebildet.

Die Verdickung der Parenchymscheidenzellen ist übrigens keineswegs immer eine allseitig gleichmässige, wie bei *Zea*; es kommt im Gegentheil öfter vor, dass die über dem Leptom liegenden Elemente eine ausgeprägt innenseitige Wandverstärkung besitzen und dann von echten Schutzscheidenzellen schwer zu unterscheiden sind. So z. B. bei *Panicum plicatum* (Fig. 9). Allein schon in der Nähe der grossen Gefässe schliesst sich alsdann dieser Theil der Scheide an den weniger verdickten chlorophyllführenden an, wodurch eine Verwechselung ausgeschlossen ist.

Zuweilen kann es fraglich erscheinen, ob die modificirte Parenchymscheide grösserer Bündel über dem Leptom, sofern hier Bastrippen sich anschliessen, unterbrochen sei oder nicht, weil Bast- und Scheidenzellen bei gleicher Wandstärke sich ähnlich sehen. Als ein Fall dieser Art verdient namentlich *Andropogon Schoenanthus* genannt zu werden,

wo das Leptom der grossen Bündel einen zwei- bis dreischichtigen Beleg aus derbwandigem Mestomparenchym besitzt, so dass die Parenchymscheide, wenn sie continuirlich ist, zwischen diesem Beleg und den Bastzellen der Rippe sich hindurch ziehen muss. Nach Befunden an Längsschnitten bin ich geneigt anzunehmen, dass hier eine Unterbrechung in der That nicht stattfindet und dass wohl auch anderwärts bei fehlender Mestomscheide die sie ersetzende Parenchymscheide immer geschlossen ist. Vollgültige Belege für die Richtigkeit dieser Annahme liegen mir allerdings nicht vor; doch habe ich sie an Bündeln, welche jedenfalls zu den grösseren gehörten, wiederholt bestätigt gefunden.

Eine eigenthümliche Beziehung zwischen Parenchym- und Mestomscheide ist mir zuweilen bei kleineren Bündeln von *Phleum Boehmeri* aufgestossen. Die Parenchymscheide besteht hier über dem Hadrom aus farblosen, über dem Leptom aus grünen Zellen. Erstere gehen nun ausnahmsweise, d. h. an einzelnen Bündeln, direct in die Mestomscheide über, so dass diese als innere Windung einer Spirale erscheint (Fig. 11), deren Anfang in der citirten Figur auf die linke Seite der grünen Scheide fällt.

Die oben erwähnte Widerstandsfähigkeit der Parenchymscheiden in concentrirter Schwefelsäure und das Auftreten von Wandverdickungen in den einzelnen Zellen sind übrigens nicht die einzigen Kennzeichen, welche die stattgefundene partielle Metamorphose — im Sinne einer Annäherung an die typischen Mestomscheiden — verrathen. Auch das interstitienlose Zusammenschliessen der Zellen, wie es sonst nur die echte Endodermis charakterisirt, ist bei diesen modificirten Parenchymscheiden zu beobachten. Die luftführenden Zwischenzellräume, welche in der Regel nicht bloss bei den Gramineen, sondern überhaupt bei den Gefässpflanzen die normale Parenchymscheide der Blattbündel stellenweise durchbrechen und oft sogar eine ansehnliche Grösse erreichen, gehen den modificirten Scheiden vollständig ab; ihr Zellverband erscheint durchweg lückenlos. Hierauf scheint es also der Pflanze, sobald sie einen Ersatz für die Mestomscheiden bedarf, in erster Linie anzukommen.

Wo die morphologische Natur der vorhandenen Scheide auf den ersten Blick Zweifel erregt, wie dies namentlich bei den Paniceen vorkommen kann, bieten die Stellen mit deutlichem Palissadengewebe das beste Kriterium. Die palissadenartigen Zellen schliessen sich nämlich stets an die Parenchymscheide an, auch wenn die letztere die vorhin erwähnte Metamorphose erfahren hat. Ist also die zu untersuchende Scheide eine Mestomscheide, so wird sie von der Parenchymscheide umschlossen, und auf diese folgen nach aussen die Palissaden.

Liegt dagegen eine modificirte Parenchymscheide vor, so grenzt dieselbe direct an die Palissaden.[1]

Handelt es sich aber um die Alternative, ob ein etwas derbwandiger Kranz von Zellen, der von innen an die Parenchymscheide grenzt, als typische Mestomscheide oder aber als mässig verdicktes Holzparenchym, beziehungsweise Leptomparenchym aufzufassen sei, so gibt in der Regel eine sorgfältige Vergleichung der grösseren und kleineren Bündel, zuweilen auch das Verhalten in concentrirter Schwefelsäure die erforderlichen Anhaltspunkte. Betrachtet man z. B. eines der grössten Bündel von *Erianthus Ravennae* oder *Saccharum officinarum* im Querschnitt, so glaubt man auf den ersten Blick eine innere Scheide zu sehen, welche durch ihre Derbwandigkeit sogar recht deutlich sich abzuheben scheint. Aber schon bei mittelgrossen Bündeln zeigt diese Scheide Unterbrechungen, in Folge deren die beiden grossen Tüpfelgefässe direct an die Parenchymscheide zu liegen kommen, und die nächstkleineren Bündel besitzen oft nur noch Fragmente der vermeintlichen Scheide, die endlich bei den allerkleinsten auch noch verschwinden. In concentrirter Schwefelsäure verhalten sich die in Rede stehenden Zellen nicht anders als das benachbarte Mestomparenchym, zu dem sie deshalb naturgemäss auch gerechnet werden müssen.

Übrigens sehe ich in solchen Abstufungen unverkennbare Bindeglieder zwischen den Bündeln mit und ohne Mestomscheide. So lange nämlich die erwähnten dickwandigen Zellen innerhalb der Parenchymscheide in grossen und mittelgrossen, vielleicht sogar in kleineren Bündeln einen geschlossenen Kranz bilden, wie z. B. bei *Phragmites*, wird man sie naturgemäss als Mestomscheide bezeichnen. Findet man dagegen diese nämlichen Zellen, wenn auch in doppelter bis dreifacher Lage, nur als Beleg über dem Leptom und daneben vielleicht noch vereinzelt auf der Hadromseite, wie bei *Saccharum officinarum* und *Andropogon Schoenanthus*, so kann füglich nicht von einer Mestomscheide gesprochen werden, und doch sind diese Dinge, wenn man über die Grenzmarke zwischen Scheide und Nichtscheide hinaussieht, keineswegs so sehr verschieden. Dazu kommt, dass in solchen Fällen die Widerstandsfähigkeit gegen Schwefelsäure nur wenig hervortritt und kaum noch ein Kriterium bildet.

[1] Vergl. Volkens, Flora d. aegyptisch-arabischen Wüste, Taf. XVI—XVIII.

3. Vorkommen und Fehlen der Mestomscheide bei den Gramineen.

Wenn ich die bis dahin untersuchten Gräser auf die einzelnen Tribus der Familie vertheile und aus diesen je nach dem Vorkommen oder Fehlen der Mestomscheide in den Blattbündeln zwei Reihen bilde, so ergiebt sich folgende Gruppirung, in welcher jedoch die Abgrenzung der Tribus nicht nach einem bestimmten Autor festgehalten, sondern aus den bekannteren Eintheilungen jedesmal frei gewählt wurde. Die Gattungsnamen sind alphabetisch geordnet.

I. Blattbündel mit Mestomscheide.

Festucaceae: *Brachypodium pinnatum*, *Briza media*, *Bromus mollis* und *secalinus*, *Cynosurus echinatus*, *Eragrostis cynosuroides*, *Festuca rubra* und *ovina*, *Glyceria distans* und *fluitans*, *Koeleria alpicola*, *Melica Magnolii*, *Molinia coerulea*, *Poa pratensis*, *trivialis*, *nemoralis* und *compressa*.

Bambuseae: *Arundinaria falcata*, *glaucescens* und *Khasyana*, *Bambusa vulgaris*, *arundinacea*, *verticillata*, *nigra*, *reticulata* und *Simonii*, *Dendrocalamus strictus*, *Triglossum bambusinum*.

Avenaceae: *Aira flexuosa*, *Avena sativa* und *flavescens*, *Arrhenaterum elatius*, *Corynephorus canescens*, *Danthonia Forskalii*, *Triodia decumbens*.

Sesleriaceae: *Sesleria coerulea*.

Hordeaceae: *Aegilops sicula*, *Elymus giganteus*, *Hordeum vulgare* und *distichum*, *Lolium temulentum*, *Triticum repens* und *turgidum*.

Nardoideae: *Nardus stricta*.

Rottboelliaceae: *Rottboellia erecta* und *sabina*.

Phalarideae: *Anthoxanthum odoratum*, *Hierochloa odorata*, *Phalaris arundinacea*.

Alopecuroideae: *Alopecurus nigricans* und *fulvus*, *Crypsis schoenoides*, *Phleum Boehmeri*.

Agrostideae: *Agrostis vulgaris* und *stolonifera*, *Apera Spica venti*, *Calamagrostis Epigeios*, *Lagurus ovatus*, *Polypogon monspeliensis*, *Psamma arenaria*, *Sporobolus spicatus*.

Stipaceae: *Milium effusum*, *Stipa pennata* und *tortilis*.

Chlorideae: *Beckmannia erucaeformis*, *Chloris compressa*, *Cynodon Dactylon*, *Eleusine Coracana*.

Arundineae: *Arundo Donax*, *Gynerium argenteum*, *Phragmites communis*.

Oryzeae: *Leersia oryzoides*, *Oryza sativa*, *Zizania aquatica*.

Paniceae: (z. Th.) *Oplismenus imbecillis*, *Panicum miliaceum*, *capillare*, *proliferum* und *turgidum*, *Tragus praemorsus*, *Tricholaena rosea*.

II. Blattbündel ohne Mestomscheide.

Andropogoneae: *Andropogon Ischaemum, Schoenanthus foveolatus* und *hirtus, Elionurus hirsutus, Erianthus Ravennae, Heteropogon Allionii, Saccharum officinarum, Sorghum vulgare.*

Maydeae: *Coix Lacryma, Tripsacum monostachyum, Zea Mays.*

Paniceae: (z. Theil) *Panicum sanguinale, falcatum, plicatum, colonum, echinatum* und *Crus-galli, Paspalum virgatum, Pennisetum distylum* und *dichotomum, Setaria viridis.*

Aus dieser Übersicht glaube ich mit aller Bestimmtheit folgern zu dürfen, dass das Vorkommen oder Fehlen der Mestomscheide mit Klima und Standort in keinem Zusammenhange steht. Schon die Tribus der Festucaceen, in welcher die Feuchtigkeit liebenden *Glyceria*-Arten neben den an trockene Standorte gewöhnten *Festuca ovina, Poa compressa* u. s. w. aufgeführt sind, spricht ziemlich entschieden gegen eine solche Beeinflussung durch äussere Factoren. Dazu kommt, dass auch andere Gruppen, wie die Avenaceen, Phalarideen, Alopecuroideen, deren Vertreter ähnliche Gegensätze bezüglich der Standortsverhältnisse aufweisen, ebenfalls durch das constante Vorkommen einer Mestomscheide ausgezeichnet sind, während andererseits die Andropogoneen trotz der Ähnlichkeit der äusseren Umstände ebenso constant diese Scheiden entbehren. Nur die Paniceen, die aber auch sonst mancherlei Verschiedenheiten darbieten, zeigen hinsichtlich der Mestomscheide ein schwankendes Verhalten. Dieselbe fehlt bei der Mehrzahl der untersuchten Paniceen, zumal bei den Untergattungen *Echinochloa* und *Digitaria*, findet sich aber bei *Oplismenus imbecillis, Tricholaena rosea, Panicum miliaceum, capillare* u. s. w.; aber auch diese Schwankungen lassen sich nicht auf äussere Factoren zurückführen.

Von exotischen Gräsern habe ich allerdings nur wenige untersucht, aber es verdient doch hervorgehoben zu werden, dass nach den bisherigen Beobachtungen die zu den Bambuseen, Oryzeen und Rottboelliaceen gehörigen Arten unter sich übereinstimmen; sie besitzen durchgehends eine typische Mestomscheide.

Unter den genannten Tribus befinden sich zweifellos mehrere, deren Natürlichkeit nicht zu bestreiten ist. Ich rechne dazu in erster Linie diejenigen, welche seitens der neueren Systematik im Wesentlichen stets dieselbe Umgrenzung erfahren haben, wie z. B. die Hordeaceen, Andropogoneen und Oryzeen, dann aber mit gutem Grunde auch die Bambuseen, welche nicht blos durch morphologische, sondern auch durch wichtige anatomische Merkmale charakterisirt sind. Hauptsächlich mit Rücksicht auf diese letzteren Merkmale erscheint es mir durchaus unstatthaft, die Bambuseen mit den Festucaceen oder die

Maydeen mit den Phalarideen zu vereinigen. Viel eher lässt sich *Zea* und wie es scheint auch *Coix* bei den Andropogoneen unterbringen, welche den genannten Culturpflanzen auch in unserer Aufzählung nahe stehen.[1]

Wie man dagegen die Festucaceen im engeren Sinn, ferner die Avenaceen, Agrostideen u. s. w. möglichst naturgemäss kennzeichnen und gegen einander abgrenzen soll, lasse ich dahingestellt; es ist dies für unsere Betrachtung ziemlich gleichgültig, da das Vorhandensein einer Mestomscheide — für die grösseren Blattbündel nämlich — in all' diesen Gruppen durchgreifendes Merkmal ist.

Es bleibt hiernach nichts anderes übrig, als das Vorkommen oder Fehlen der Mestomscheide in den Blättern der Gramineen als ein von den äusseren Lebensbedingungen unabhängiges oder, um mit VESQUE[2] zu sprechen, als ein taxinomisches Merkmal zu betrachten und nur den besonderen Verstärkungen derselben die Bedeutung von epharmonischen oder Anpassungsmerkmalen zuzuschreiben.

Mit dieser Deutung, die ich für wohlbegründet halte, stehe ich nun freilich im Widerspruch zu der Auffassung von DUVAL-JOUVE,[3] dem wir die ersten genaueren Untersuchungen über den Bau der Gramineenblätter zu verdanken haben. Wir dürfen aber nicht übersehen, dass dieser Autor die Mestomscheide (assise-limite), obwohl er dieselbe besonderer Aufmerksamkeit würdigte, von der modificirten Parenchymscheide nicht unterschied; nach seiner Darstellung sind die Gefässbündel der Gramineenblätter durchgehends mit einer »assise limite« ausgestattet. Dagegen konnte ihm allerdings der grosse und gerade hier so augenfällige Einfluss, welchen Klima und Standort auf die Ausbildung der Gewebe üben, bei seinen umfassenden Beobachtungen nicht entgehen; ihm schrieb er thatsächlich alle beobachteten Verschiedenheiten der inneren Structur zu, und so gelangte er denn zu dem irrthümlichen Schluss, dass der ganze anatomische Bau der Gramineenblätter nur die Anpassung an das umgebende Medium wiederspiegele. Er äussert sich auf S. 362 der citirten Abhandlung, wo von den Vegetationsorganen die Rede ist, wörtlich folgendermaassen: »Ils sont ce que les font devenir les influences extérieures, et, comme ces influences multiples ont pu se combiner à l'infini, elles ont déterminé toutes sortes de différences: aussi, pas une racine, pas un rhizome, pas un chaûme, pas une feuille d'une espèce donnée n'est identique dans ses détails histotaxiques à la même partie d'une

---

[1] Man vergleiche die Charakteristik der betreffenden Typen in meinem »mechan. Princip« und die daselbst citirten Abbildungen.

[2] Ann. sc. nat. 6e série, t. XIII (1882).

[3] Histotaxie des feuilles de Graminées, Ann. sc. nat. 6e série, t. I (1875).

autre espèce. Et si, dans quelques espèces voisines, ou dans une section de genre .... un caractère commun se présente, on peut remarquer que ces espèces vivent dans le même milieu, sont soumises aux mêmes influences, et que les mêmes besoins ont dû amener une même adaptation.«

Eine genauere Vergleichung der Gewebesysteme führt nun aber nicht bloss bezüglich der Mestomscheide, sondern ebenso mit Rücksicht auf das Hautgewebe, die Spaltöffnungen, das mechanische System u. s. w. zu dem Ergebniss, dass gewisse anatomische Grundzüge von Klima und Standort durchaus unabhängig sind. Aber natürlich erfordert es immer eine sorgfältige Untersuchung, um die Frage zu entscheiden, ob ein bestimmter Grundzug für eine Sippe, oder für die ganze Familie, oder vielleicht über die Grenzen der Familie hinaus constant sei. Und wie für die Gramineen, so muss auch für die übrigen Pflanzenfamilien die noch in weiten Kreisen herrschende Lehre, dass die anatomischen Merkmale der vegetativen Organe durch äussere Umstände bedingt und daher zur Feststellung der Stammesverwandtschaft untauglich seien, als unhaltbar zurückgewiesen werden.

4. Bemerkungen zur Systematik der Gramineen.

Um Missverständnissen vorzubeugen, glaube ich hier einige Bemerkungen einschalten zu sollen. Wenn die zu den Paniceen gehörigen Sippen, wie im Vorhergehenden dargelegt wurde, sich in Bezug auf Vorkommen oder Fehlen der Mestomscheide ungleich verhalten, so darf daraus nicht etwa gefolgert werden, dass diese Tribus, vom anatomischen Gesichtspunkte aus betrachtet, unnatürlich abgegrenzt sei. Mir wenigstens liegt diese Folgerung ferne, weil ich weiss, dass andere Merkmale, von denen namentlich diejenigen des mechanischen Systems in Stammorganen und der Parenchymscheide in den Blättern hervorzuheben sind, über die Zusammengehörigkeit der Paniceen unter sich, soweit ich dieselben kennen gelernt habe, keinen Zweifel gestatten. Die grosszellige Parenchymscheide, insbesondere der kleineren Bündel, ist allein schon für die Gruppe so charakteristisch, dass ihr Fehlen bei *Beckmannia erucaeformis* mir Veranlassung gab, diese Pflanze nicht, wie Bentham und Hooker, den Paniceen, sondern mit Hackel den Chlorideen beizuzählen, wobei ich indess nur die Nichtübereinstimmung mit den Paniceen betonen möchte.

Desgleichen fehlt es auch den Arundineen, trotz der vorkommenden Übergangsformen, nicht an gemeinsamen Zügen. Schon die scharfe Abgrenzung des grünen Parenchyms und das starke Hervortreten des farblosen Wasser- und Scheidengewebes, in welchem die

Mestombündel verlaufen, kennzeichnen den anatomischen Bau des Blattes (namentlich bei *Gynerium* und *Arundo*, weniger bei *Phragmites*) in auffallender Weise. Dazu kommt dann noch die in der Regel allseitig gleichmässige Verdickung der Mestomscheiden- oder Mestombelegzellen. Nur dürfen natürlich *Molinia* und *Calamagrostis* nicht zu dieser Gruppe gerechnet werden.

Für die Bambuseen ist die Querschnittsform des mechanischen Systems, wie ich sie früher beschrieben habe[1], charakteristisch genug, um jede nähere Verwandtschaft mit den Festucaceen oder irgend einer andern Tribus auszuschliessen. Ein Bastring ist nicht vorhanden; an seiner Stelle finden sich Gefässbündel mit aussergewöhnlich starken Bastbelegen auf der Leptom- wie auf der Hadromseite, und zwischen den äussersten Bündeln, welche an die Rinde grenzen, liegen ausserdem isolirte (oder mit den Belegen hier und da verschmolzene) Baststränge von dreieckiger oder rundlich-dreieckiger Gestalt.[2] Das Fehlen der subepidermalen Rippen kann dagegen nur für die stärkeren blattlosen Stammorgane, nicht aber für die feineren beblätterten Zweige als durchgreifend bezeichnet werden; hier kommen solche Rippen zum mindesten bei gewissen Arten (*Arundinaria falcata, Bambusa verticillata, vulgaris* Wendl.), vielleicht bei allen vor, was ich früher übersehen hatte.

Auch die Andropogoneen und Maydeen bilden zusammen eine Gruppe, welche sich durch die Beschaffenheit des mechanischen Systems von den übrigen unterscheidet. Ob sie auch unter sich histologische Verschiedenheiten taxinomischer Natur aufweisen, welche die Zerlegung in zwei Untergruppen rechtfertigen, habe ich nicht untersucht.

Ebenso lag es ausserhalb meiner Aufgabe, die zahlreichen einheimischen Gräser mit typischem Bastring nach anatomischen Merkmalen zu gruppiren. Die angenommene Abgrenzung der betreffenden Tribus stützt sich also nicht auf eigene Untersuchungen.

5. Vorkommen vergleichbarer Scheiden bei anderen Gefässpflanzen.

Die oben erwähnte Neigung der Mestomscheidenzellen, sich in der Form der Zuspitzung den specifisch mechanischen Zellen zu nähern, steht innerhalb der Angiospermen keineswegs vereinzelt da.

[1] Das mechanische Princip, S. 65.

[2] Die Verschmelzung dieser Stränge mit den Bastbelegen der benachbarten Bündel findet zuweilen so häufig statt, dass streckenweise das Bild eines Bastringes zu Stande kommt.

Wir begegnen ähnlichen Vorkommnissen noch hin und wieder, häufiger aber noch einem unzweifelhaften Ersatze der Scheiden durch mechanische Belege, welche bald durch parenchymatische Zugänge unterbrochen sind, bald aber ebenfalls eine geschlossene hohlcylindrische Hülle bilden. Genau genommen sind schon die Stereomscheiden in den Rhizomen der Gramineen, ebenso der Cyperaceen, Juncaceen u. s. w. als solche Ersatzbildungen zu betrachten, welche gewöhnlich durch ihre Mehrschichtigkeit sofort auffallen, nicht selten aber auch durch mancherlei Übergangsformen mit normalen Mestomscheiden verknüpft sein mögen. Es ist oft schwer zu sagen, welche der beiden Bezeichnungen die zutreffendere sei; wo aber solche Scheiden, wie bei *Scirpus Holoschoenus*, *Juncus sylvaticus* u. s. w., aus drei bis fünf Lagen echter Stereiden bestehen, ist jeder Zweifel ausgeschlossen.

Freilich findet in diesem Falle der Ersatz nicht in gleichwerthigen Organen verwandter Pflanzen, sondern nur beim Übergang von oberirdischen zu unterirdischen Organen derselben Pflanze statt. Dagegen kommt es bei den Dicotylen hin und wieder vor, dass Gattungen oder Sippen der nämlichen Familie — und zwar im aufrechten Stamm — die in Rede stehende Vertretung der Schutzscheide durch Bastbelege oder Bastringe zur Anschauung bringen. So fand z. B. A. Born[1], dass bei den Labiaten im Allgemeinen »die Schutzscheide immer da vorhanden ist, wo Bastbelege vollkommen fehlen oder wo sie relativ schwach entwickelt sind; sind dagegen die Bastbündel stark entwickelt, dann fehlt meistens eine Schutzscheide.«

Im Übrigen führten die Untersuchungen von A. Born in Bezug auf das Vorkommen oder Fehlen der Schutzscheide zu denselben Ergebnissen, wie meine eigenen Beobachtungen an Gramineenblättern. Die Scheide tritt auch bei den Labiaten in einzelnen Sippen, z. B. den Stachydeen, constant auf, fehlt dagegen bei anderen (Ocimoideen), so dass sie auch hier als taxinomisches, nicht als epharmonisches oder Anpassungsmerkmal zu betrachten sein dürfte. Dass Feuchtigkeit oder Trockenheit des Standortes jedenfalls nicht den Ausschlag gibt, das lehrt schon eine flüchtige Vergleichung der Stachysarten, deren Laubstamm durchgehends eine Schutzscheide ausserhalb der Bastbelege besitzt, obschon z. B. *St. palustris* an feuchten, *St. germanica* und *spinosa* an trockenen Standorten vorkommen.

Ähnliche Beispiele zu Gunsten der taxinomischen Bedeutung der Scheide liefern auch die Stengel der Compositen, welche bei einer ganzen Reihe von Gattungen, vorwiegend Angehörigen der Liguliforen,

[1] Vergleichend-systematische Anatomie des Stengels der Labiaten und Scrophulariaceen. Dissertation, Berlin 1886.

eine Schutzscheide ausserhalb der Bastbelege zeigen, während eine solche bei zahlreichen anderen, worunter die sämmtlichen bis dahin untersuchten Vertreter der Tubulifloren, vollständig fehlt. Nähere Angaben hierüber findet man in dem bekannten Buche von VUILLEMIN[1] über den Compositenstengel, wo gerade das Vorkommen oder Fehlen der Schutzscheide mit besonderer Ausführlichkeit besprochen ist. Der genannte Autor macht hierbei allerdings den Versuch, über die systematische Gruppirung der Thatsachen hinaus zu gehen und die beobachteten Gegensätze mit Verschiedenheiten im Wachsthum des »péricycle« in Zusammenhang zu bringen, worauf ich weiter unten zurückkommen werde. Hier bemerke ich nur, dass ich diesen Versuch für missglückt erachte.

Weitere Vorkommnisse, welche sich ebenfalls nach der systematischen Verwandtschaft und nicht nach äusseren Einflüssen zu richten scheinen, bieten die oberirdischen Stengel der *Lysimachia*-Arten. Es wurden untersucht: *L. thyrsiflora, vulgaris, ciliata, punctata* und *L. Linum stellatum*. Alle besitzen einen Bastring und ausserhalb desselben eine continuirliche Schutzscheide, obschon die Standortsverhältnisse sehr verschiedene sind. Ebenso verhalten sich die Laubstämme von Angehörigen der Primulaceen, wie z. B. von *Trientalis europaea* und *Anagallis arvensis*, wohingegen die Blüthenschäfte der Gattungen *Primula* und *Androsace* der Schutzscheide ermangeln.

Den Laubsprossen der Primulaceen schliessen sich die beblätterten Stengel der Campanulaceen an. Es wurden hiervon einige Arten der Gattungen *Campanula (Rapunculus, persicifolia, glomerata, Medium)* und *Phyteuma (spicatum, orbiculare, comosum)*, sowie ferner *Jasione purpurea* und *Specularia Speculum* untersucht. Alle besitzen entweder eine continuirliche Schutzscheide, welche sich zwischen primärer und secundärer Rinde hindurchzieht, oder doch Belege aus Schutzscheidenzellen über dem Leptom der grösseren Gefässbündel. Diese Belege sind bei *Phyteuma comosum* stellenweise zwei- bis dreischichtig, zeigen aber nach Behandlung mit concentrirter Schwefelsäure hin und wieder Unterbrechungen, welche wahrscheinlich als Durchgangsstellen für Flüssigkeiten zu betrachten sind. Jedenfalls beweisen solche Vorkommnisse zur Genüge, dass die mondsichelförmigen Belege aus Schutzscheidenzellen, ähnlich wie die localen Bastbelege, in erster Linie mechanisch wirksam sind und nicht etwa zur Abhaltung oder Eindämmung von Lösungen dienen. Dasselbe gilt auch von der häufiger vorkommenden continuirlichen Schutzscheide, deren Tangentialwände hier zwar vorwiegend, aber doch nicht durchweg verkorkt sind: man

[1] Tige des Composées. Paris 1884.

beobachtet da und dort Durchlasszellen, welche der Schwefelsäure nicht widerstehen.

Noch wären verschiedene andere Gruppen, die im System weit auseinander liegen, namhaft zu machen, bei denen die Schutzscheide in Stengeln oder Blättern constant aufzutreten pflegt, ohne dass hierin irgend eine Abhängigkeit von äusseren Verhältnissen gefunden werden könnte. So die Stengel der Piperaceen und Stellaten, die Laubblätter vieler Bromeliaceen u. s. w. Die bereits erwähnten Beispiele dürften jedoch vollständig genügen, um die Bedeutung der Stammesverwandtschaft in dieser Frage klar zu legen.

Andererseits ist es eine längst bekannte Thatsache, dass unterirdische Stammorgane fast ausnahmslos eine Schutzscheide besitzen. auch wenn diese den zugehörigen oberirdischen vollständig fehlt. Ich erinnere namentlich an die Rhizome zahlreicher Monocotylen, deren Querschnittsbild in Bezug auf Rinde und Schutzscheide meist geradezu demjenigen der Wurzel, oft selbst in nebensächlichen Einzelheiten der Wandverdickungen, nachgeformt zu sein scheint. Aber auch die Dicotylen liefern zum Theil recht instructive hierher gehörige Beispiele; nur tritt die Schutzscheide, weil sie dünnwandig bleibt, in der Regel weniger deutlich hervor. Man vergleiche z. B. die unterirdischen Stengel von *Solanum tuberosum*, *Faba vulgaris*, *Ricinus communis* u. s. w. mit den aufrechten oberirdischen; erstere haben eine Scheide, letztere nicht.

Ja selbst das Kriechen der Ausläufer auf dem Boden, wie überhaupt alle die verschiedenen Beziehungen wurzelbildender Stämme zu demselben, scheinen der Ausbildung einer Schutzscheide günstig zu sein. Mangin[1] stellt z. B. auf Grund seiner Untersuchungen über die Adventivwurzeln der Monocotylen wurzellose und wurzelbildende Stengel einander gegenüber und charakterisirt die letzteren »par l'existence de la couche dictyogène, et par la présence de l'endoderme formé par l'assise corticale interne«. Es unterliegt in der That keinem Zweifel, dass die äusseren Bedingungen, welche ein Stammorgan zur Wurzelbildung veranlassen, im Allgemeinen auch das Auftreten einer Schutzscheide zur Folge haben. Die letztere erscheint hiernach als ein Gewebe, das ohne die specielle Einwirkung des Mediums, in welchem der Stamm wächst, gar nicht zur Ausbildung gelangen würde. und daher in gewissem Sinne als ein Product der Anpassung an dieses Medium. Die Wurzeln, so könnte man noch beifügen, sind zweifellos vollkommener angepasst und dementsprechend ist das Auftreten der Schutzscheide hier constant geworden.

[1] Ann. sc. nat. 6e sér. t. XIV. p. 352 (1882). Bezüglich der Dicotylen vergl. Lemaire. Ann. sc. nat. 7e sér. t. III.

Bei diesem Ergebniss dürfen wir indessen nicht stehen bleiben. Es gibt bekanntlich auch Luftwurzeln, Haftwurzeln u. s. w. und innerhalb bestimmter Formenkreise, wie wir gesehen haben, auch aufrechte Stengel, welche dem angedeuteten Einfluss des Bodens vollständig entzogen sind, ohne dass die Schutzscheide sich deshalb weniger constant erwiese. Entweder sind also die maassgebenden Factoren von solcher Art, dass sie auch ausserhalb des Bodens gegeben und für empfängliche Objecte wirksam sein können, oder die genannten Objecte sind phylogenetisch jünger und haben die Schutzscheide als unveräusserliches Merkmal von ihren Vorfahren ererbt, in welchem Falle dann selbstverständlich die Annahme einer Beziehung zu den heutigen Lebensbedingungen überflüssig wäre. In meinen Augen hat diese letztere Voraussetzung die grössere Wahrscheinlichkeit für sich, da es ja auch sonst nicht an Beispielen fehlt, dass anatomische Merkmale sich vererben, auch wenn sie für die gegenwärtigen Standortsverhältnisse keine nachweisbaren Vortheile gewähren. Mit der ersten Voraussetzung, wonach unbekannte äussere Factoren den Ausschlag geben würden, ist schon deshalb wenig gewonnen, weil es nicht möglich ist, auf dieser Grundlage auch nur für einen bestimmten Fall, z. B. für die Campanulaceen, eine befriedigende Erklärung zu geben.

Wie dem übrigens auch sein mag, jedenfalls gehört die Schutzscheide bei Wurzeln und Stammorganen zu den Merkmalen, welche selbst unter Verhältnissen, die von den normalen durchaus verschieden sind, unverändert erhalten bleiben. Möglich, dass sie ursprünglich durch Anpassung entstanden ist; dann aber hat ihr Auftreten im Verlaufe der Generationsreihen allmählich eine solche Constanz erlangt, dass demselben gegenwärtig eine taxinomische Bedeutung nicht wohl abgesprochen werden kann. Für die Blätter der Juncaceen, Cyperaceen und vor allem auch der oben bezeichneten Gramineen ist vollends jede andere Annahme ausgeschlossen.

Es erübrigt jetzt noch, den bereits erwähnten Erklärungsversuch Vuillemin's, wonach die Bildung der Schutzscheide durch Wachsthumsvorgänge im »péricycle« veranlasst sein soll, etwas näher in's Auge zu fassen. Um den Autor richtig zu verstehen, erscheint es nothwendig, einige Stellen seiner Schrift wörtlich anzuführen. Er sagt von der Schutzscheide, die er abwechselnd als *endoderme, assise à plissements, assise contentive, système contentif* bezeichnet: »Nous le trouverons développé là seulement où les formations issues du péricycle ont de la tendance à empiéter sur les domaines de l'écorce, et en raison directe de l'énergie de cette tendance« (S. 85). Und auf der folgenden Seite: »L'assise contentive ne se développe pas lorsque le péricycle s'est de bonne heure sclérosé, sans avoir beaucoup multi-

plié ses éléments. Au contraire, elle est constante dans les cas où le péricycle est doué d'une puissante activité formatrice, à moins que les assises contiguës de l'écorce ne participent à cette suractivité«.

In Wirklichkeit haben nun aber die Gewebebildungen im »péricycle« immer die Tendenz, in das Gebiet der Rinde überzugreifen. Denn die letztere wächst in der Richtung des Umfanges, soweit dieser durch die active Bildungsthätigkeit der Gefässbündel oder des Verdickungsringes vergrössert wird, stets nur passiv, d. h. sie wird durch die Dehnung, der sie in Folge jener Bildungsthätigkeit ausgesetzt ist, zum Wachsthum angeregt. Die Schutzscheide müsste daher im Stamme allgemein auftreten oder doch jedenfalls da, wo die active Bildungsthätigkeit eine quantitativ ausgiebige, die passive Dehnung der Rinde also eine relativ starke ist. Die Beobachtung lehrt aber, dass ein solches Verhältniss nicht besteht. Bei *Salvia officinalis* ist z. B. das Leptom ziemlich stark entwickelt, bei *Mentha sylvestris* und *Teucrium Chamaedrys* dagegen schwach, und doch besitzen gerade die beiden letzteren eine Schutzscheide, *Salvia* dagegen nicht. Ähnlichen Widersprüchen begegnet man auch bei den Scrophulariaceen und anderwärts — von Stämmen mit Dickenwachsthum gar nicht zu reden — und was speziell die Compositen betrifft, so habe ich auch hier vergeblich nach Thatsachen gesucht, welche entschieden im Sinne Vuillemin's gedeutet werden müssten. Was ich sehen konnte, spricht einfach zu Gunsten der Übereinstimmung zwischen systematisch nächstverwandten Gruppen, ohne über den causalen Hintergrund dieser Thatsache irgend welche Auskunft zu geben.

Zum Schlusse sei noch in aller Kürze daran erinnert, dass einige Autoren versucht haben, über Anpassungsfragen, wie die im Vorhergehenden besprochene, durch Cultur der betreffenden Pflanzen unter verschiedenen Bedingungen (in trockenem oder feuchtem Medium, beleuchtet oder verdunkelt u. s. w.) Licht zu verbreiten. Costantin[1] gibt z. B. bezüglich der Schutzscheide (endoderme à plissements, end. offrant des ponctuations) an, dass sie an Sprossen, welche im Dunkeln cultivirt wurden, deutlich hervorgetreten sei, während sie den am Licht gezogenen fehlte[2], und dergleichen mehr. Allein die auf solchem Wege erzielten Structuränderungen vererben sich bekanntlich nicht auf die Nachkommen; es ist überhaupt eine noch unerledigte

[1] Ann. sc. nat. 6e série, t. XVI.

[2] Costantin meint allerdings, dass die »plissements de l'endoderme« im oberirdischen Stamm auch unter normalen Verhältnissen vorübergehend auftreten, jedoch früher verschwinden als im unterirdischen, eine Auffassung, die meines Erachtens unhaltbar ist.

Frage, ob erworbene Eigenschaften erblich werden können. Deshalb erscheint mir die Methode der Culturen, sofern die letzteren sich nur über eine oder zwei Generationen erstrecken, in phylogenetischen Fragen von zweifelhafter Berechtigung.

6. Schlussbemerkungen.

Das Studium der Mestomscheiden in den Blättern der Gramineen hat uns zu einer Grenzlinie geführt, welche mitten durch die artenreiche Gruppe der Paniceen hindurch geht. Ein Theil der letzteren hebt sich mit den Andropogoneen und Maydeen durch das Fehlen der Mestomscheide von der Hauptmasse der Gräser deutlich ab.

Die Andropogoneen und Maydeen unterscheiden sich ausserdem durch die Form des mechanischen Systems von den übrigen Gräsern, und auch innerhalb der Paniceen zeigt dieses System mancherlei Abweichungen, die man im Allgemeinen als Annäherung an den Lilientypus (mit einfachem Bastring) bezeichnen kann. Es zieht sich also wiederum eine Grenzlinie durch die Paniceen hindurch, welche im Wesentlichen fast dieselbe Zweitheilung ergibt, wie die vorhin bezeichnete, obschon sie mit dieser keineswegs genau zusammenfällt.

Andererseits nehmen, wie bekannt, die Bambuseen vermöge der Beschaffenheit ihres mechanischen Systems eine gänzlich isolirte Stellung ein, während sie bezüglich der Mestomscheiden mit der Mehrzahl der Gräser übereinstimmen.

Die Spaltöffnungen endlich zeigen, wie ich früher dargelegt habe,[1] dieselbe eigenartige Form nicht bloss innerhalb der Gramineen, sondern auch bei einem grossen Theil der Cyperaceen.

Es ergibt sich hieraus die schon in meiner soeben citirten Veröffentlichung betonte, nunmehr noch fester begründete Schlussfolgerung, »dass jedes Gewebesystem und jeder Apparat seine eigene Geschichte hat, deren Wendepunkte in der Reihe der Generationen mit denjenigen anderer Entwickelungsvorgänge meist nicht zusammenfallen«.

Zur näheren Veranschaulichung dieses Verhaltens seien die hier in Betracht kommenden Familien und Sippschaften in nachstehende Reihe gebracht: 1. *Luzula* und verwandte *Juncus*-Arten; 2. *Juncus*-Arten mit subepidermalen Rippen; 3. Scirpeen, meist mit Spaltöffnungen von normaler Querschnittsform; 4. Cypereen und Cariceen; 5. Gramineen mit geripptem Bastring; 6. Bambuseen; 7. Paniceen I; 8. Pani-

[1] Diese Berichte, Jahrg. 1889, S. 65. Wenn daselbst auf S. 77 angegeben ist, dass die Mestomscheiden »den Gramineen fehlen«, so sind hierbei zunächst die oberirdischen Stammorgane gemeint. Für die Blätter ist natürlich diese Angabe nicht zutreffend.

ceen II; 9. Andropogoneen und Maydeen. Die Zugehörigkeit zum gleichen Grundtypus des mechanischen Systems kann jetzt einfach durch aufrechte Klammern, welche die betreffenden Ziffern umfassen, und das Vorkommen oder Fehlen der Mestomscheiden, desgleichen die Form der Spaltöffnungen, durch Horizontalklammern angedeutet werden. Wir erhalten auf diese Weise folgendes Schema.

Mit Mestomscheiden. — Ohne Mestomscheiden.

(1.): (2. 3. 4.): (5.): (6.): (7. 8.): (9.)

Stomata von normaler Querschnittsform. — Stomata des Gramineentypus.

Das mechanische System erscheint hiernach innerhalb der Reihe in sechs verschiedenen Hauptformen. Da jedoch die Paniceen sich theilweise den Liliifloren (mit einfachem Bastring) zuneigen, so könnte man sich die Reihe in der Art zum Kreis geschlossen denken, dass (1.) und (9.) zusammenfallen oder doch unmittelbar neben einander zu liegen kommen. Bezüglich der Spaltöffnungen und Mestomscheiden tritt die ungleiche Lage der Wendepunkte im Schema sofort deutlich hervor, so dass jede weitere Bemerkung überflüssig erscheint.

Ausserhalb der in unserer Reihe genannten Formenkreise kommen Mestomscheiden in den Blättern oder Stengeln der terrestrischen Monocotylen fast gar nicht vor. Auch die xerophilen Restiaceen, Flagellariaceen, Haemodoraceen u. s. w. entbehren dieselbe. Nur bei den Bromeliaceen und den exotischen Orchideen finden sich scheidenartige Hüllen, die man wohl als gleichwerthig bezeichnen darf.

Zum Schlusse noch eine ganz allgemeine Nutzanwendung. Will man die verschiedenen anatomischen Merkmale, soweit sie taxinomische Bedeutung haben, für irgend welche Abtheilung im System zur Begrenzung natürlicher Gruppen verwerthen, so darf man nach dem Vorhergehenden nicht erwarten, dass die auf diesem Wege erhaltene Eintheilung mit der auf Blüthe und Frucht basirten übereinstimme; denn jede Formenreihe hat ihre besonderen, bald mehr genäherten, bald weit auseinander liegenden Wendepunkte. Wenn daher einige neuere Autoren aus der Nichtübereinstimmung der Grenzlinien sofort den Schluss ziehen, dass die anatomische Methode für den Ausbau des natürlichen Systems überhaupt unbrauchbar sei oder höchstens zur Controle innerhalb enger Grenzen dienen könne, so liegt hierin nicht blos eine einseitige Beurtheilung der Thatsachen, sondern mehr als das: es ist ein Fehlschluss.

Ebenso unhaltbar ist die Ansicht, dass der anatomische Bau der Vegetationsorgane im Allgemeinen nur die Anpassung an die ge-

gebenen Lebensbedingungen zum Ausdruck bringe. Denn wie es bei den Gramineen möglich war, taxinomische und epharmonische Merkmale zu trennen, so ist die Ausscheidung alles dessen, was von Klima und Standortsverhältnissen abhängt, auch für die Gewebe anderer Pflanzen durchführbar.

Erklärung der Abbildungen.

Die chlorophyllführenden Zellen sind gleichmässig grün gehalten, die Bastzellen, sowie die mechanisch wirksamen Scheiden- und Mestomzellen dagegen gelb. Das Leptom ist mit L, die Parenchymscheide, soweit nöthig, mit p, die Mestomscheide mit m bezeichnet.

Fig. 1. Querschnitt durch ein grösseres Blattbündel von *Panicum sanguinale*. Die grüne Parenchymscheide berührt auf der einen Seite die grossen Gefässe, während auf der anderen Holzparenchymzellen eingeschoben sind. Vergr. 740.

Fig. 2. Querschnitt durch ein kleines Bündel von *Poa pratensis*. Auf der Hadromseite vervollständigen drei oder vier kleine Gefässe die Mestomscheide zur geschlossenen Hülle. Vergr. 740.

Fig. 3. Querschnitt durch ein grösseres Blattbündel von *Zea Mays* (auf der rechten Seite ein Theil weggelassen). Die Parenchymscheide legt sich unmittelbar an die grossen Gefässe an und ist auf der Leptom- wie Hadromseite chlorophyllfrei und mechanisch verstärkt. Die von aussen angrenzenden Zellen sind Bastzellen. Vergr. 400.

Fig. 4. Querschnitt durch ein Blattbündel von *Bambusa vulgaris*. Die Mestomscheidenzellen sind ziemlich gleichmässig verdickt. Vergr. 740.

Fig. 5. Längsschnitt durch die Parenchym- und Mestomscheide eines Blattbündels von *Bambusa vulgaris*. Beide Scheiden bestehen aus gestreckten Parenchymzellen.

Fig. 6. Querschnitt durch ein kleines Bündel von *Saccharum officinarum*. Keine Mestomscheide, aber eine grosszellige, der concentrirten Schwefelsäure widerstehende Parenchymscheide. Vergr. 740.

Fig. 7. Querschnitt durch ein kleineres Blattbündel von *Phleum Boehmeri*. Die Mestomscheide ist über dem Hadrom dünnwandig, geht aber um die kleinen Gefässe herum. Vergr. 740.

Fig. 8. Querschnitt durch ein mittelgrosses Blattbündel von *Erianthus Ravennae*. Keine Mestomscheide, aber auf der Leptomseite ein hufeisenförmiger Beleg von dickwandigen Parenchymzellen. Die Parenchymscheide legt sich unmittelbar an die Gefässe an. Vergr. 740.

Fig. 9. Querschnitt durch ein Blattbündel von *Panicum plicatum*. Die Parenchymscheidenzellen sind über dem Leptom stark verdickt. Rechts und links Palissaden. Vergr. 740.

Fig. 10. Querschnitt durch ein grösseres Blattbündel nebst Bastbelegen von *Poa pratensis.* Die Mestomscheide ist ziemlich stark verdickt und zwar vorwiegend auf der Innenseite. Ausserdem einige dickwandige Parenchymzellen zwischen Leptom und Hadrom. Vergr. 740.

Fig. 11. Kleines Bündel von *Phleum Boehmeri.* Die Mestomscheide erscheint hier ausnahmsweise als innere Windung einer Spirale. Vergr. 740.

Fig. 12. Längsschnitt durch die Mestomscheide von *Poa pratensis.* Zwei mit den Enden zusammenstossende Zellen von parenchymatischer Natur.

Fig. 13. Kleines Blattbündel von *Zea Mays.* Das einzige Gefäss grenzt unmittelbar an die grüne Parenchymscheide. Vergr. 740.

Fig. 14. Querschnitt durch ein kleineres Blattbündel von *Panicum miliaceum.* Die zwei Gefässe sind durch zartwandige Parenchymzellen von der grünen Scheide getrennt. Vergr. 740.

Fig. 15. Kleines Bündel von *Oplismenus imbecillis.* Mit dünnwandiger Mestomscheide. Vergr. 740.

Fig. 16. Querschnitt durch ein mittelgrosses Blattbündel von *Saccharum officinarum.* Keine Mestomscheide, aber ein halbkreisförmiger Beleg aus dickwandigen Parenchymzellen auf der Leptomseite. Vergr. 740.

Ausgegeben am 1. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

Sitz





Schwendener: Mestomscheiden der Gramineen.



1890.
XXIII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

1. Mai. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Dilthey las Beiträge zur Lösung der Frage vom Ursprung unseres Glaubens an die Realität der Aussenwelt.

Die Mittheilung wird in einem späteren Hefte der Sitzungsberichte erfolgen.

Ausgegeben am 8. Mai.



1890.
XXIV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

1. Mai. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. Landolt las über die Prout'sche Hypothese.

2. Hr. Lipschitz, correspondirendes Mitglied der Akademie, übersendet eine Mittheilung: Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen.

Beide Mittheilungen erscheinen später in diesen Berichten.

Ausgegeben am 8. Mai.



1890.

XXV.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

8. Mai. Gesammtsitzung.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

1. Hr. Waldeyer las über die Rückbildung der Thymus.

2. Hr. Klein legte vor die Abhandlung des Hrn. Dr. H. Baumhauer in Lüdinghausen über die Abhängigkeit der Ätzfiguren des Apatit von der Natur und Concentration des Ätzmittels. (Zweite Mittheilung).

Beide Mittheilungen erfolgen in diesem Heft.

3. Hr. Auwers überreichte im Auftrage des Hrn. Joseph A. Donohoe in San Francisco, Cal., ein Exemplar der von demselben für die 'Astronomical Society of the Pacific' gestifteten Cometen-Medaille.



Die Rückbildung der Thymus.

Von W. Waldeyer.

Seit den in meinem Strassburger Laboratorium ausgeführten Untersuchungen von Dr. B. Afanassiew[1] habe ich die Thymus nicht aus dem Auge verloren. Das reiche mir in meinem gegenwärtigen Wirkungskreise zu Gebote stehende Material hat es mir ermöglicht, diese Untersuchungen namentlich am Menschen weiter auszudehnen und bin ich heute in den Stand gesetzt, einen abermaligen Beitrag zur Kenntniss des in seiner Bedeutung noch völlig räthselhaften Organes vorzulegen. Ich handle von der Rückbildung der Thymus beim Menschen, insbesondere im höheren Alter, einem Punkte, auf welchen sich die Aufmerksamkeit der Anatomen und Physiologen bis jetzt nicht in genügendem Maasse erstreckt zu haben scheint.

Es ist mir nicht möglich gewesen, die gesammte Litteratur aufzutreiben; indessen waren auch die Erfahrungen nicht sehr ermuthigend, um anzuspornen bis zur äussersten Grenze darin zu gehen. Man begegnet fast überall den Spuren A. Cooper's, Simon's, A. Ecker's und Friedleben's, und was diese zu der in Rede stehenden Frage bringen, erschöpft dieselbe keineswegs. Ich hatte bei öfterer genauer Praeparation des vorderen Mediastinalraumes und an Durchschnitten gefrorener Leichen bemerkt, dass in der Thymusgegend auch bei alten Leuten (60—80 Lebensjahr) nicht eine beliebig gestaltete Fettmasse als Lückenbüsser zwischen Brustbeinhandgriff und grossen Gefässstämmen auftrete, sondern dass dieser »retrosternale« oder »thymische Fettkörper«, wie ich ihn zu benennen vorschlagen möchte, stets eine bestimmte Form hat, in dieser Form sich auspraepariren lässt und auch in der Farbe und Consistenz sich häufig schon dem freien Auge als etwas Besonderes verräth. Dies brachte mich auf den Gedanken, eine mikroskopische Untersuchung dieses Fettkörpers vorzunehmen und nach etwaigen Resten der Thymus darin zu forschen.

Mag immerhin Einiges aus den vorhandenen Angaben voraufgeschickt werden, um den jetzigen Stand unseres Wissens von diesen

[1] B. Afanassiew, Über Bau und Entwickelung der Thymus und der Winterschlafdrüse der Säugethiere. Arch. f. mikroskopische Anatomie. Bd. XIV S. 371.

Dingen zu kennzeichnen, wobei ich bemerke, dass es sich für diesmal besonders um folgende zwei Fragen handelt:

1. Erhält sich auch nach der Rückbildung der Thymus an deren Stelle ein Formgebilde, welches auf die Thymus bezogen werden kann und deren Gestalt und topographische Lagerungsverhältnisse dauernd beibehält?

2. Enthält dieses Formgebilde, da wo es vorkommt, stets bis zur gewöhnlichen Altersgrenze des Menschen (70—80 Jahre) noch Reste unveränderten Thymusgewebes und kommen diese auch dann vor, wenn ein solches besonderes Formgebilde nicht nachgewiesen werden kann?

Halten wir zunächst Umschau unter den Lehrbüchern der beschreibenden und topographischen Anatomie. Ich verglich die Werke von Aeby[1], Beaunis et Bouchard[2], den von Brass in siebenter Auflage herausgegebenen Atlas von Bock[3], die Handbücher von Calleja y Sanchez[4], Cunningham[5], Gegenbaur[6], Hartmann[7], Henke[8], Henle[9, 10], Huschke[11], Hyrtl[12, 13], L. Hollstein[14], Joessel[15], K. und W. Krause[16, 17], Langer[18], Lauth[19], von Luschka[20], H. von Meyer[21], Pansch[22], Paulet[23],

[1] Der Bau des menschlichen Körpers. Leipzig 1871. S. 801.

[2] Nouveaux éléments d'anatomie descriptive. III édit. 1880. p. 1045.

[3] Handatlas der Anatomie des Menschen. 7. Aufl. 1889. S. 380.

[4] Nuevo compendio de anatomia descriptiva. Zaragoza 1887. II. Bd. p. 406.

[5] A manual of practical anatomy. II edit. 1889. p. 209.

[6] Lehrbuch der Anatomie des Menschen. 3. Aufl. 1888. S. 552.

[7] Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Strassburg, Els. 1881.

[8] Topographische Anatomie des Menschen. Berlin 1884. S. 339.

[9] Handbuch der systematischen Anatomie des Menschen. Eingeweidelehre. 2. Aufl. 1873. S. 565.

[10] Grundriss der Anatomie des Menschen. 3. Aufl. Besorgt von Fr. Merkel. Braunschweig 1888. S. 212.

[11] Huschke in Samuel Th. von Sömmerring's Werke: »Vom Bau des menschl. Körpers«. — Lehre von den Eingeweiden und Sinnesorganen. Leipzig 1844. S. 305.

[12] Handbuch der topographischen Anatomie I. S. 623/24. 6. Aufl. Wien 1871.

[13] Lehrbuch der Anatomie des Menschen. 19. Aufl. Wien 1887.

[14] Lehrbuch der Anatomie des Menschen. 5. Aufl. 1871. S. 561.

[15] Lehrbuch der topographisch-chirurgischen Anatomie II. 1. Die Brust. Bonn 1889. S. 74/75.

[16] Handbuch der menschlichen Anatomie. 2. Aufl. 1833. S. 481.

[17] Dasselbe. 3. Aufl. Herausgegeben von W. Krause. S. 473. Allgemeiner Theil. S. 359.

[18] Lehrbuch der systematischen und topographischen Anatomie. 3. Aufl. Wien 1885.

[19] Neues Handbuch der praktischen Anatomie. Bd. II. S. 368.

[20] Die Anatomie des Menschen mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der praktischen Heilkunde. I. Bd. 2. Abth. »Die Brust«. S. 323.

[21] Lehrbuch der Anatomie des Menschen. 3. Aufl. 1873. S. 520.

[22] Grundriss der Anatomie des Menschen. 2. Aufl. 1886.

[23] Traité d'anatomie topographique. Paris 1867—70.

Quain-Sharpey[1], Richet[2], Rüdinger[3], Sappey[4], Tillaux[5], Vesal[6], Weisse[7], Winslow[8].

Aus der Durchsicht der angegebenen Handbücher — und ich glaube nicht fehl zu gehen in der Annahme, dass auch die übrigen hier nicht aufgeführten nichts Anderes bieten — lassen sich folgende Lehrmeinungen entnehmen:

a) Die Thymus schwindet nach dem Ablaufe des kindlichen Alters gänzlich (Henke, Richet, Paulet, Gegenbaur, Henle, Langer, Hollstein, Hartmann, Beaunis et Bouchard, Calleja y Sanchez, Lauth, Huschke, Quain-Sharpey, Rüdinger). Die Zeit, mit der der gänzliche Schwund eintritt, wird dabei allerdings verschieden angegeben. Einige verlegen sie schon in das Kindesalter (Lauth), Andere, wie Henle, in die späteren Jahre, oder lassen sie erst »im höheren Alter in der Regel« gänzlich fehlen, wie Huschke; wieder Andere geben keinen bestimmten Zeitpunkt an.

2. Die Thymus schwindet mit dem Ablaufe des jugendlichen Alters in der Regel, doch wird das mehr oder minder häufige Vorkommen von Resten im höheren Alter betont (Jössel, Hyrtl, Bock (Brass), K. und W. Krause, H. von Meyer, Pansch, Aeby).

3. Es finden sich fast ausnahmslos auch im höheren Alter Reste. Für diese Meinung ist einzig, so viel ich sehe, Sappey, dessen Genauigkeit ja rühmlichst bekannt ist, zu erwähnen. Ich führe daher seinen betreffenden Text hier wörtlich an:

»Son volume varie selon les individus et selon l'époque à laquelle on le considère. Il s'accroît depuis le moment de son apparition, c'est-à-dire depuis le troisième mois de la vie intra-utérine jusqu'à la fin de la première ou de la deuxième année qui suit la naissance; puis commence alors à décroître et diminue de plus en plus à mésure qu'approche le terme de la puberté. A quinze ou seize ans il se trouve considérablement réduit: à vingt ou vingt-cinq ans il n'éxiste plus qu'à l'état de vestige; a trente ou quarante ans, et surtout chez

[1] Elements of anatomy edit. by Allen Thomson, E. A. Schäfer and G. Dancer Thane. 9 edit. London 1882. Vol. II. p. 561.

[2] Traité pratique d'anatomie médico-chirurgicale. II P. p. 335.

[3] Topographisch-chirurgische Anatomie des Menschen, Brust. Stuttgart 1876. S. 66.

[4] Traité d'anatomie descriptive. T. IV. 2 édit. p. 493. In der neuesten Auflage, welche mir in der italiänischen Übersetzung vorlag, ist der Text gleichlautend.

[5] Traité d'anatomie topographique. 5 édit. Paris 1887 (bespricht überhaupt die Thymus nicht).

[6] De humani corporis fabrica libri septem. Basileae 1545. Per Joannem Oporinum. p. 464.

[7] Practical human anatomy. New York 1886. p. 241.

[8] Exposition anatomique de la structure du corps humain. Amsterdam 1752. T. IV. p. 91.

le vieillard, il disparaitrait complètement, suivant la plupart des auteurs. Mais un examen attentif permet presque toujours d'en retrouver quelques traces, même dans la vieillesse la plus avancée« (2 edit. T. IV. p. 494).

Von einigen anderen Autoren führe ich noch die Meinungen wörtlich an, da sie entweder wegen ihrer wenig bestimmten Fassung nicht gut in einer oder der anderen Abtheilung unterzubringen waren, oder aber sich durch genauere Angaben hervorheben. Zu diesen letzteren rechne ich zunächst Luschka, obwohl er, wie ich zu zeigen gedenke, nicht das Wahre trifft. Aber in seiner Fassung bringt er wohl alles, auf dessen genauere Feststellung es mir hier ankommt.

Es heisst bei ihm S. 323: »In dieser Hinsicht muss aber zuerst daran erinnert werden, dass die noch ziemlich allgemein verbreitete Annahme gänzlich irrthümlich ist, nach welcher sich die Thymus nur während des Fötuszustandes und der ersten Lebensjahre in vollkommener Ausbildung befinden soll. Durch die sehr genauen Untersuchungen von A. Friedleben ist es ausser Zweifel gesetzt worden, dass die Involution des Organs erst mit dem 15. Lebensjahre beginnt und sich durch grössere Derbheit des Gewebes, durch Verminderung des Secretes, durch Vorwalten nackter Kerne und fetterfüllter Bläschen ankündigt. Der vollkommene Schwund des specifischen Gewebes der Thymus erfolgt gewöhnlich im ersten Mannesalter, d. h. zwischen dem 25. und 35. Lebensjahre, wobei die ehemaligen Drüsenfollikel in einem massigen, von zahlreichen Faserzügen und Fettsträngen durchsetzten Bindegewebe untergegangen sind, das noch einige Zeit die frühere Läppchenform der Thymus behält, bald aber auch diese verlierend in das Binde- und Fettgewebe des vorderen Mittelfellraumes aufgeht. In Ausnahmefällen wird aber auch noch nach dem 35. Lebensjahre, selbst im Greisenalter ein Gewebe angetroffen, das ganz die frühere Gestalt der Thymus darbietet.«

In dieser Fassung Luschka's scheint mir klar und bestimmt das wiedergegeben, was nach den eingehenden Forschungen Friedleben's, auf welche ich später zurückkomme, als der Ausdruck unserer gegenwärtigen besten Kenntnisse vom Verhalten der Thymus beim Erwachsenen und im höheren Alter betrachtet werden darf. — Weniger bestimmt bezüglich der Frage, ob man ein vollständiges Schwinden der Thymus überhaupt annehmen soll oder nicht, lauten die Angaben von Arnold,[1] Cunningham, Weisse, Winslow und Vesal, und theile ich

[1] Fr. Arnold, Handbuch der Anatomie des Menschen. II. Bd. 1. Abth. Freiburg i. B. 1847.

sie deshalb, um nicht einer unrichtigen Auffassung geziehen werden zu können, hier mit: Arnold berichtet kurz ohne jede Einschränkung: »Beim Erwachsenen findet sie sich in der Regel im rudimentären Zustande vor.« Bei Cunningham heisst es S. 209: »In the adult the thymus gland is only represented by some condensed tissue of a brownnish colour placed above the level of the aortic arch and in front of the innominate and left common carotid arteries as the spring from the arch. A few thymic branches from the internal mammary artery enter the wasted remains of the gland, and some small veins pass from it and joins the subjacent left innominate venous trunk.« — Faneuil D. Weisse spricht zwar nur sehr kurz von der Thymus, indem er sagt: »In the young it is larger than in the adult. In the adult its longest Diameter is from right to left«, doch muss man, da er keine Ausnahmen erwähnt, annehmen, er lasse ein ausnahmsloses Bestehen von Thymusmassen im erwachsenen Alter bis zur Grenze des Lebens zu. Noch kürzer ist Winslow: »Il est très diminué dans la vieillesse« ist Alles, was wir über diesen Punkt bei ihm finden, jedoch sehen wir, dass auch er keiner Ausnahme gedenkt. Vesal scheint überhaupt keine Altersabnahme der Drüse zu kennen, wenigstens spricht er nicht davon; immerhin mögen seine Worte mitgetheilt werden, da sie uns auf eine physiologische Bedeutung des vollausgebildeten sowohl, wie des reducirten Thymusgewebes hinweisen, die ich für wohlberechtigt anerkennen möchte. »Vena igitur cava, sagt der Altmeister, postquam sine pari venam a se diduxit ad jugulum recta sub pectoris osse conscendit, membranis thoracem intersepientibus eleganter suffulta, mollemque et glandosum corpus hic in jugulo passim adstratum obtinens, quod Graeci θυμὸν, Latini vero communi glandularum nomine glandium vocant. Est autem glandium id in elatissima thoracis sede extructum, ut ab omni noxa frequentissimas vasorum distributiones hic suspensas immunes servaret.« Hier sei gleich angeschlossen, dass wir ähnlichen Meinungen über die physiologische Bedeutung der Thymus bei Galen, Bidloo und Th. Bartholinus begegnen.[1]

Wenn die eben genannten Autoren nun auch ohne Einschränkung von der Thymus selbst (Vesal) oder von Thymusresten bei Erwachsenen sprechen, so bieten sie doch nur so kurze und unbestimmte Angaben, dass dadurch, gegenüber den zahlreichen Aussprüchen betreffend den der Regel nach erfolgenden Schwund, keine Bestimmtheit und Klarheit gewonnen wird. Sicherlich ist durch diese Angaben

[1] Vergl. bei F. G. Becker: De glandulis thoracis lymphaticis atque Thymo. Diss. inaug., Berolini 1826. p. 37.

die Frage nach dem Verhalten der Thymus im höheren Lebensalter nicht als erledigt anzusehen. Wir dürfen also wohl als die durch die gangbarsten Lehrbücher der beschreibenden und topographischen Anatomie älterer und neuerer Zeit vertretene Meinung diejenige betrachten, dass die Thymus im höheren Alter — etwa vom 40.—50. Lebensjahre an — in der Regel schwinde, und dass das an ihre Stelle tretende Gewebe auch nur ausnahmsweise die Form der von ihm ersetzten Drüse bewahre. Ich verweise hier besonders auf Luschka's Ausspruch, der diesen Punkt besonders berührt, während die meisten der genannten Autoren überhaupt nicht auf diese »Formfrage« eingehen.

Auch die Lehrbücher der Gewebelehre boten keine weitere Auskunft. Eingesehen habe ich: Kölliker's Gewebelehre und mikroskopische Anatomie, die Werke von Toldt, Brass, Stöhr, Schenk, Schäfer, Klein, Pouchet et Tourneux, Ranvier, Marchessaux[1] und Leydig, ferner das Lehrbuch der vergleichenden Histologie der Haussäugethiere, herausgegeben von Ellenberger. Der Artikel: »Thymus« ist dort von Sussdorf bearbeitet und gibt S. 488 die folgende kurze Auskunft: »An Stelle der Thymus tritt dann ein Fettpolster im vorderen Mediastinum auf, in dem häufig auch noch bei älteren Thieren Überbleibsel der Drüse sich erhalten«.

Die eingehendsten Nachrichten finden wir noch in Kölliker's mikroskopischer Anatomie; ich erlaube mir die betreffende Stelle gleichfalls herzusetzen: »Von da an (2 Jahr) steht sie (die Thymus) stille, bleibt aber meist noch längere Zeit unverändert bestehen, bis sie schliesslich atrophirt und endlich vergeht. Der Zeitpunkt, in dem diese letzteren Veränderungen vor sich gehen, ist ein sehr verschiedener. Simon setzt den Anfang der Atrophie in's 8. bis 12. Jahr, was ich meinen Erfahrungen zu Folge mit Ecker nicht für allgemein gültig ansehen kann, indem man häufig bis in die 20ger Jahre die Thymus wohlgenährt, strotzend von Flüssigkeit, ohne Fettmetamorphose und mit demselben Bau wie bei den Kindern findet.

Die Zeit des gänzlichen Verschwindens ist noch schwerer anzugeben und kann für dasselbe kein bestimmtes Alter bezeichnet werden, obschon allerdings nach dem 40. Jahre die Thymus in der Regel nicht mehr gefunden wird.

Das Schwinden kommt durch allmähliche Resorption unter gleichzeitiger Entwickelung von Fett in den Drüsenkörnern und von Fettzellen im interlobulären Bindegewebe zu Stande. Zugleich mehren sich auch die concentrischen Körper immer mehr und schliesslich

[1] Nouveau manuel d'anatomie générale. Paris, 1844.

entwickelt sich nach ECKER selbst Bindegewebe in den Läppchen, womit dann der Drüsenbau gänzlich verloren geht«.

Ich habe absichtlich die Angaben der bekannteren und auch einiger weniger oft genannten Lehrbücher nachgesehen und zuvörderst hier zusammengestellt, weil damit der gegenwärtige Meinungsstand über die in Frage kommenden Dinge am einfachsten ersichtlich wird. Dieser ist, wie vorhin schon mitgetheilt, in der Fassung von LUSCHKA wohl am richtigsten wiedergegeben. Selbstverständlich habe ich es jedoch nicht daran fehlen lassen die selbständigen grösseren und kleineren Abhandlungen über die Thymus einzusehen. Meist wird jedoch auch hierin das, worauf es mir ankommt, nur sehr kurz zur Sprache gebracht. Die Sonderlitteratur der Thymus ist — wohl ganz vollständig — aus den Werken von SIMON, FRIEDLEBEN und WATNEY zu ersehen, weshalb ich auf eine Wiedergabe derselben verzichte. A. COOPERS bekanntes Werk stand mir leider nicht zur Verfügung; HANDFIELD JONES' Artikel »Thymus« in Todds Cyclopaedia Bd. IV S. 1087 ff. fusst fast ganz auf SIMON's Angaben. JENDRASSIK's sonst sehr ausführliche Arbeit geht auf die hier verhandelte Frage kaum ein, ebenso wenig die meisten älteren Dissertationen, so weit sie mir zugängig waren; ich nenne z. B. die in A. v. HALLER's Disputt. anatomic. aufgeführten von HUGO und VERHEYEN.

Etwas genauere Angaben liefern MORAND le fils, S. A. LUCAE, FR. MECKEL, ECKER, J. SIMON, A. FRIEDLEBEN, HIS, WATNEY, ZOJA, MONGUIDI und AMANN.

MORAND fils[1] äussert sich kurz: »On remarque que dans l'adulte et dans les vieillards en retrouve rarement des vestiges«. S. A. LUCAE[2] spricht im 1. Hefte seiner Untersuchungen von Überbleibseln der Thymus bei erwachsenen Menschen, gibt aber nicht an, ob dies immer vorkomme, S. 44/45. Im 2. Heft, S. 50/52, berichtet er aber von einem vollständigen Schwinden im höheren Alter. Ein bräunliches Fett nehme dann die Stelle der Thymus ein. Wir erfahren jedoch nichts Genaueres darüber, ob dieses Fett die Form der Thymus bewahre.

FR. MECKEL[3] ist wohl der Erste, der eingehend den Spuren der Drüse auch bei Thieren nachgeht. Die Thymus schwindet ihm zufolge »bestimmt ganz bei den meisten Thieren«; die Ausnahmen werden

[1] Recherches anatomiques sur la structure et l'usage du Thymus. Mémoires de l'Académie royale des Sciences; année 1749; Paris 1750.

[2] Anatomische Untersuchungen der Thymus im Menschen und Thieren. Frankfurt a. M. 1. Heft 1811, 2. Heft 1812.

[3] Abhandlungen aus der menschlichen und vergleichenden Anatomie und Physiologie, Halle 1806. 8, I. Abhandlung: »Über die Schilddrüse, Nebennieren und einige ihnen verwandte Organe«.

von Meckel angeführt und dabei auch ein Fall von bleibender Thymus bei einem 63jährigen Manne erwähnt. Ausführlich und bestimmt äussert sich A. Ecker[1]. S. 120 sagt er, nachdem er berichtet, wie man bei erwachsenen Personen bis zum 24. Jahre die Drüse oft noch vollkommen finde, »Noch ungewisser ist die Dauer des Schwindens und die Epoche des völligen Verschwindens. In dem später noch zu beschreibenden Zustande der Fettmetamorphose habe ich die Thymus noch im 30., 40. und 45. Jahre ohne Grössenabnahme gefunden. Reste davon auf dem Pericardium findet man bei sorgfältiger Untersuchung noch viel später«. S. 121 heisst es, worauf ich hier Gewicht legen möchte: »Allmählich lagert sich in dem (die Acini begrenzenden) Bindegewebe auch Fett ab und damit geht selbst die äussere Form der früheren Drüse verloren«.

J. Simon[2] erwähnt S. 31 nur kurz: »Distinct remnants of the gland may generally be exhibited in subjects of from twenty to twenty-five years of age; but beyond the latter time it is unusual to distinguish any positive traces of its existence amid the areolar tissue of the mediastinum« und später: There are exceptions to this rule«.

Friedleben's[3] sehr gründliche Arbeit hat dem vorhin mitgetheilten Ausspruche von Luschka zu Grunde gelegen. S. 23 sagt Friedleben, dass im ersten Mannesalter, d. h. vom 25—35 Lebensjahre in der Regel der vollkommene Schwund der Thymus geschehe. Dann fährt er aber, S. 24, fort: »Findet sich auch nach dem Vorgehenden in dem reiferen Mannes- und Greisenalter in der Regel keine Andeutung mehr der früheren Drüse, so gehören doch die Fälle nicht gerade zu den Seltenheiten, in welchen noch nach dem 35. Lebensjahre ein Gewebe angetroffen wird, das ganz die frühere Gestalt der Thymus bewahrt hat«. — Friedleben beruft sich hier auch auf K. Krause und A. Ecker, wie er denn auch noch Schlemm, Bischoff, Günther und Wrigth, deren Abhandlungen ich nicht eingesehen habe, heranzieht. — Er fügt aber weiter bei: »Allein von einem Organ kann hier nicht mehr die Rede sein, es ist nur ein ganz verfettetes massiges und derbes Bindegewebe in Gestalt der ehemaligen Thymus«. Diesen Ausführungen Friedleben's schliesst sich im Wesentlichen Amann in einer unter Roth's Leitung verfassten Doctordissertation an.[4] W. His

[1] Artikel: »Blutgefässdrüsen« in Wagner, Handwörterbuch der Physiologie. Bd. IV. S. 114. 1853.

[2] A. physiological essay on the Thymus gland. London 1845. 4.

[3] Die Physiologie der Thymusdrüse in Gesundheit und Krankheit. Frankfurt a. M. 1858.

[4] Beiträge zur Anatomie der Thymusdrüse. Baseler Inauguraldissertation; Zürich 1882.

geht zwar in seiner sehr sorgfältigen Abhandlung über den feineren Bau der Thymus[1] nicht auf die Involutionsverhältnisse beim Menschen ein, doch muss hervorgehoben werden, dass er ausdrücklich von älteren Thieren das Vorkommen von Fettläppchen in der Umgebung der Thymus angiebt, die täuschend den Habitus der Thymusläppchen hätten und wohl auch in ihrem Innern noch unverkennbares Drüsengewebe zeigten. S. 349.

Der neueste Gewährsmann, Watney,[2] welcher in eingehender Weise namentlich den feineren Bau und die Histogenese der Thymus bei ihrem Entstehen und Vergehen erforscht hat, bringt folgendes zur Sache recht Beachtenswerthe: »In mammals it (the Thymus) deceases slowly, does not get much smaller until adult life, and does not finally disappear until some period of adult life has passed«. Hierzu sagt Watney in einer Anmerkung: »It is in consequence of the want of this knowledge that it has been described by manny observers as being permanent. I have seen a thymus in a man fifty years old«.

Ich bemerke gleich hierzu, dass mir kein Autor bekannt ist, der die Thymus beim Menschen als ein dauernd erhalten bleibendes Organ beschrieben hätte. Für Thiere freilich ist dies geschehen (vergl. das oben von Meckel Erwähnte und die Angabe für Meerschweinchen von E. Klein, s. dessen »Grundzüge der Histologie«, übersetzt von A. Kollmann, Leipzig 1886). S. 1095 finden wir bei Watney noch folgende wichtige Bemerkung: »If the Thymus of a very old animal be examined the whole of the medulla is seen to been transformed into fibrous tissue and blood vessels few granular cells remaining. The gland diminishes in size, though with enlarged blood-vessels, is transformed into connective tissue and in mammals is finally buried in fat«. (»In adipe circumfuso sepelitur« A. v. Haller, Elementa phys. Lausanne 1766.)

In den Abhandlungen von Zoja[3] und Monguidi[4] wird dargethan, dass wahrscheinlich um die Pubertätszeit eine kurze zweite Wachsthumsperiode der Thymus eintritt; auf das Verhalten im späteren Leben gehen beide Autoren nicht näher ein.

Ziehen wir nunmehr das Endergebniss aus den Aussprüchen der Lehrbücher sowohl, wie aus denen der Sonder-Abhandlungen, so

[1] Beiträge zur Kenntniss der zum Lymphsystem gehörigen Drüsen. Zeitschr. f. wissenschaft. Zoologie 10 Bd. S. 333. 1860. Speciell S. 341 ff.

[2] On the minute anatomy of the Thymus. London, Philos. Transact. Vol. 173. P. III. 1883. S. 1063.

[3] Zoja, Sulla permanenza della glandola timo nei fanciulli e negli adolescenti. Rendiconti del R. Istituto Lombardo II. Ser. 18, 1885. p. 385.

[4] Monguidi, Sulla ghiandola Timo. Dissertazione per Laurea. Parma. L. Battei. 1885, 8.

wird die erste der vorhin formulirten Fragen durchweg dahin beantwortet, dass nur in Ausnahmefällen ein Formgebilde von der Gestalt der Thymus sich dauernd bis in's höchste Alter erhalte. Die 2. Frage wird in gleicher Weise beantwortet: nur in Ausnahmefällen, welche der Eine als öfter, der Andere als seltener vorkommend ansieht, finde man noch Reste des normalen Thymusgewebes im höheren Alter, oder gar eine vollwichtig erhaltene Drüse.

Hervorzuheben sind, als der Wahrheit sehr nahekommend, Sappey, der fast in allen Fällen selbst im hohen Greisenalter Drüsenreste findet und Watney, wenn er — wenigstens bei Thieren — auch im hohen Alter noch einige körnige Zellen in dem Fettgewebe, welches an Stelle der Thymus getreten sei, antrifft. Ich habe auch ausdrücklich der Angaben von J. B. Winslow, Fr. Arnold, Faneuil J. Weisse und Cunningham gedacht, in denen zwar von einer Rückbildung der Drüse im Alter die Rede ist, indessen von einem »gänzlichen Schwunde« nichts angegeben wird. Freilich sind die betreffenden Angaben, wie bemerkt, so kurz, dass man nicht recht klar sieht, wie weit die Autoren gehen möchten, sobald die Frage scharf gestellt werden würde.

Meine eigenen Untersuchungen ergeben nun, dass ausnahmslos sich ein Gebilde im vorderen Mediastialraume erhält, welches durchschnittlich etwas grösser ist als eine Thymus vom Neugeborenen oder vom ersten Lebensjahre[1] und die Gestalt der Thymus zeigt, dass ferner in diesem Formgebilde ausnahmslos sich Reste des lymphoiden Thymusparenchyms entweder diffus vertheilt oder in Gestalt von kleineren und gösseren Heerden erhalten. Ich glaube damit die bisherigen Kenntnisse von der Thymus in einem immerhin beachtenswerthen Punkte erweitert zu haben.

Ich hebe eine Reihe von Fällen heraus, die ich ohne weitere Wahl an einem und demselben Tage untersuchte, von Personen zwischen 40 und 70 Jahren, die meisten in dem Decennium zwischen 50 und 60.

I. 70jährige Frau. Im vorderen Mediastinalraum an der Stelle der Thymus ein gut abgegrenzter lappiger Fettkörper von 11^{cm} Länge, 3^{cm} Breite oben, 2^{cm} in der Mitte, 1^{cm} unten. Thymusform erhalten.

II. Mann, dessen Alter nicht genau angegeben werden konnte, jedenfalls aber über 30 Jahre betrug. An derselben Stelle ein deutlich abgegrenzter Fettkörper von ähnlicher Beschaffenheit, wie in Fall I, leicht herauszuschälen. Länge 8^{cm}, Breite oben 2^{cm}, unten 1^{cm}.

III. 57jährige Frau. Hinter dem Sternum zeigt sich zunächst eine Schicht nicht deutlich abgegrenzten Fettes. 1^{cm} unterhalb der Vena

[1] Das Längenmaass der Thymus von 7 Kindern aus dem ersten Lebensjahre beträgt im Durchschnitt nach Friedleben's Tabelle 15 = 8^{cm}0, das der hier mitgetheilten 7 Fälle ist = 8^{cm}5 bei durchschnittlich gleichen Breitenverhältnissen.

anonyma sinistra beginnen dann 2 deutlich umschriebene lappige Fettkörper von Thymusform; der linke, grössere erstreckt sich weit abwärts auf den Herzbeutel; auf Durchschnitten zeigen sich einige grössere graue Heerde; der rechte schmalere ist fast durchweg mit dichtstehenden kleineren grauen Heerden durchsetzt; er geht nach unten in eine gut abgegrenzte, den Herzbeutel umgreifende Fettmasse über. Länge des linken Lappens 8^{cm}, des rechten 7^{cm}, Breite beider Lappen zusammen 4^{cm}.

IV. 49jährige Frau. Zwei deutlich abgegrenzte Lappen von je $8-9^{cm}$ Länge, der linke etwas länger; Breite jedes Lappens 2^{cm}. Oben im Gebiete des Halses sich anschliessend noch ein kleiner gut abgegrenzter Fettlappen von 2.5 Länge bei 1.5 Breite.

V. 43jährige Frau. An der Thymusstelle drei kleinere Lappen; zwei seitliche, oben breit, unten zugespitzt, beginnen von der Mitte der Vena anonyma sinistra, gehen 5^{cm} nach abwärts. Zwischen ihnen ein unten breiter werdender, oben spitziger Lappen von gleicher Grösse, der die Aorta ascendens und den Anfang des Aortenbogens bedeckt; er reicht eben so weit nach oben wie die beiden anderen Lappen.

VI. 59jährige Frau. Ein deutlich abgegrenzter der Thymus ähnlicher Fettkörper, unten auf dem Herzbeutel einfach beginnend, nach oben in zwei Lappen auslaufend, die auf der Vena anonyma sinistra liegen. Länge $11-12^{cm}$. Auf diesem umschriebenen, leicht ausschälbaren Körper, welcher glatt und in der Farbe reinen Fettes erscheint, liegt noch eine Schicht Fettgewebe von mehr lappigem Bau. Der Herzbeutel selbst sehr fettreich, doch lässt sich, wie bemerkt, der eben beschriebene grössere Lappen leicht abpraepariren. Zu diesem Lappen wurden auch die eintretenden nicht unansehnlichen Gefässe, Venen und Arterien praeparirt; es waren dieselben Äste, die man auch zur wohlerhaltenen Thymus verfolgen kann.

VII. 50—52jährige Frau. Zwei schmale lange Körper von grauem Aussehen und Thymusgestalt, $8-9^{cm}$ lang, 1^{cm} breit; sie reichen nach oben bis in das Gebiet des Halses hinauf, der rechte bis zur Theilungsstelle der Arteria anonyma. Sie sind leicht von dem übrigen fetthaltigen, mehr lockeren Gewebe ihrer Umgebung abzupraepariren.

Zufällig befanden sich unter diesen Leichen überwiegend Frauen. Ich sage »zufällig«, weil ich, ohne eine auszulassen, diejenigen Leichen einer beliebigen Woche wählte, die über 40 Jahre alt waren. Nur die Männerleiche ist die einer jüngeren Person. Ich habe dann auch alle Protokolle so mitgetheilt, wie ich sie einem meiner Herren Assistenten in die Feder dictirte, nachdem ich selbst die Praeparation ausgeführt hatte; dabei fand keine Auswahl der Fälle statt. Ich beabsichtigte mit diesem Verfahren zu zeigen, dass man in den Leichen

älterer Personen ohne Auswahl den thymischen Fettkörper antreffen kann.

Selbstverständlich habe ich mich mit diesen Fällen nicht begnügt, sondern mir seit mehreren Jahren, insbesondere im jüngstverflossenen Winter, noch viele Leichen älterer Personen (von 40 bis über 70 Jahren) auf dieselben Verhältnisse angesehen, darunter waren sicher eine ebenso grosse Anzahl Männer- wie Frauenleichen. In allen war ein gleicher oder ähnlicher praeparatorischer Befund, wie er hier in Kürze mitgetheilt wurde, festzustellen. Da aber die Untersuchungen ohne Auswahl der Leichen angestellt wurden und alle untersuchten Leichen die abgrenzbaren lappigen Fettkörper zeigten, die man auch in allen Fällen leicht herauszuheben vermochte, so glaube ich den Schluss rechtfertigen zu können, dass diese Körper stets auch bis zur gewöhnlichen Lebensgrenze ohne Ausnahme erhalten bleiben. Dieselben sind nun nicht ohne gewisse Verschiedenheiten in Bezug auf Grösse, Form, Consistenz und Färbung. Von den Grössenverhältnissen können die mitgetheilten Zahlen eine Vorstellung geben, wobei ich bemerke, dass die Dicke von $0^{cm}.5$—2^{cm} wechselt. In der Form machen sich mehr längliche und kürzere Fettkörper bemerklich; ferner kann man einfache, oder zwei- bis dreilappige unterscheiden. Der Consistenz nach müssen hauptsächlich zwei Arten auseinander gehalten werden: die weicheren, mehr rein fettigen und die derberen, die reichlichere Bindegewebszüge enthalten. Letztere pflegen mehr grau auszusehen, die anderen zeigen die gewöhnliche Fettfarbe. In mehreren dieser retrosternalen Fettkörper, in deren Mitte eingebettet, fand ich rundliche Lymphdrüsen von Erbsen- bis Bohnengrösse; diese Lymphdrüsen zeichneten sich durch eine tief dunkelbraunrothe Farbe und viel schwarzes Pigment, sowie viel körniges und scholliges Blutpigment in ihren Zellen aus. Manche der thymischen Fettkörper haben das lymphoide Thymusparenchym noch in deutlich mit freiem Auge wahrnehmbaren grauen Heerden, so dass die Körper reichlich grau gesprenkelt erscheinen, in anderen sind solche Sprenkel nicht deutlich zu erkennen.

Was mir für die Deutung dieser Körper von besonderer Wichtigkeit zu sein scheint, das sind ihre Gefässverhältnisse. Ich habe einige Male die hauptsächlichsten Gefässe derselben praeparirt und fand sie von denselben Quellen abstammend, wie für die unveränderte Thymus. Die Arterien hauptsächlich von den Aa. mammariae internae, einzelne auch von den Aa. thyreoideae inferiores und den pericardiacae. Regelmässig fand sich der auch für die parenchymatöse, noch nicht verfettete Thymus bekannte Hauptvenenabfluss zur Vena anonyma sinistra, daneben auch kleinere Venen zu den oder der V. mammaria interna.

Alle diese Gefässe, Arterien wie Venen, zeigten sich stets von demselben Kaliber, wie man sie bei einer parenchymatösen Thymus gleicher Ausbildung finden würde.

In 17 der von mir untersuchten Fälle — auch ohne Wahl genommen — habe ich die mikroskopische Bearbeitung nach vorheriger Erhärtung der ganzen Fettkörper in Alkohol vorgenommen. Es wurden grosse Schnitte (Flach- und Querschnitte) der Massen genommen und theils gefärbt, theils ungefärbt in Glycerin oder in Balsameinschluss durchgemustert. In jedem der Körper wurden zwischen den Fettzellen noch mehr oder weniger Rundzellen, theils diffus zerstreut, theils in grösseren, schon mit freiem Auge sichtbaren Heerden angetroffen. In den grösseren Heerden waren alle feineren Structurverhältnisse der Thymus leicht wiederzuerkennen; auch fehlten niemals darin die concentrischen Thymuskörper; in zwei Fällen fand ich letztere verkalkt; eine Verkalkung erwähnt auch Amann a. a. O.

Ich mache namentlich auf die diffus vertheilten parenchymatösen Thymusreste in den Fettkörpern aufmerksam; diese gehören vorzugsweise der weichen rein fettig aussehenden Form an. Man muss nur dünne Schnitte wählen, dieselben gut färben und aufmerksam durchmustern. Man nimmt dann wahr, dass zwischen den Fettzellen noch eine ansehnliche Menge von Rundzellen zerstreut sind, so dass man von einem »gänzlichen Schwinden« des Thymusparenchyms auch in diesen Fällen nicht sprechen kann. In den sich derber anfühlenden Lappen, die oft auch eine unebene, granulirte Oberfläche zeigen, finden sich ziemlich viel Bindegewebsstränge.

Ich habe gelegentlich dieser Untersuchungen auch eine Meinung über den Modus der Fettumbildung der Thymus zu gewinnen gesucht. Ich kann nur die Ansicht von Friedleben, His und Watney theilen, dass das Ganze auf einer Ausbildung von Fett in den bindegewebigen Hüllen und in dem bindegewebigen Stroma des Organs beruht; das Fett dringt dann von allen Seiten zwischen die parenchymatösen Bestandtheile ein, welche dann zum Theil atrophiren, zum Theil aber in kleineren oder grösseren Heerden oder in ganz diffus vertheilter Weise erhalten bleiben. Ich will sicherlich nicht behaupten, dass alle parenchymatösen Thymuszellen in dieser Weise erhalten blieben, als »disjecta membra« in dem eindringenden Fett; gewiss geht wohl ein erheblicher Theil zu Grunde; immerhin bleibt aber so viel davon übrig, dass man dies bei einer genauen Beschreibung des Organs nicht vernachlässigen darf.

Nach den vorstehend aufgeführten Befunden halte ich mich für berechtigt zu dem Schlusse, dass die Thymus das ganze Leben hindurch bis zum höchsten Alter formell — in Gestalt des stets vor-

handenen retrosternalen oder thymischen Fettkörpers — und auch geweblich — in heerdweisen oder diffus vertheilten Parenchymresten — erhalten bleibt.

Die Entwickelungsgeschichte hat uns gelehrt, dass die ersten Anlagen der Thymus epithelialer Herkunft sind (vergl. die Angaben Remak's und insbesondere Kölliker's Entwickelungsgeschichte. II. Aufl.). Dieses rein epitheliale Stadium dauert nicht lange. Bald wird die epitheliale Grundlage verdrängt und überwuchert durch eine mesenchymatöse, indem lymphoide Zellen sich in grossen Mengen entwickeln und binnen Kurzem die Hauptmasse des Organs ausmachen. Ob darin die epithelialen Reste in Form der concentrischen Thymuskörper bestehen bleiben, wie es neuerdings His,[1] Stieda[2] und Maurer[3] dargestellt haben, vermögen wir zur Zeit nicht sicher zu entscheiden. Das letzte Wort über diese sonderlichen Bildungen ist noch nicht gesprochen. Afanassiew's Ansicht hat zwar wenig Freunde sich erworben, völlig widerlegt ist sie noch nicht. Es ist nun in hohem Grade merkwürdig, dass auch der zweite Abschnitt in der Entwickelungsgeschichte der Thymus keinen Bestand hat, nicht jedoch in der Weise, dass das Organ völlig zu Grunde ginge, sondern so, dass es noch ein drittes Entwickelungsstadium der Thymus gibt, in welchem Fettgewebe sich an Stelle des lymphoiden setzt. Die Form bleibt, soweit es die gewebliche Umänderung zulässt, erhalten; auch schwindet das lymphoide Gewebe nicht ganz. Wir müssen somit eine epitheliale, lymphoide und verfettete Thymus unterscheiden.

Dass die Thymus in der dritten Stufe ihrer Entwickelung nicht functionire, möchte ich nicht behaupten; die Erhaltung ansehnlicher Reste des lymphoiden Gewebes lässt auch an eine theilweise Erhaltung der früheren Function denken.

Ich erwähnte vorhin der Meinung Vesal's, Bidloos u. A. Es liegt mir ganz fern behaupten zu wollen, dass diese rein mechanische Leistung, als Polsterung für die grossen Gefässstämme zu dienen, die Function der Thymus darstelle; dass dies eine nothwendig mit der Lage und der geweblichen Beschaffenheit des Organs verknüpfte, nicht unwichtige Nebenleistung sei, dürfte indessen kaum bezweifelt werden.

[1] His, Anatomie menschlicher Embryonen und Über den Sinus praecervicalis und die Thymus-Anlage. Arch. f. Anat. u. Physiol. Anat. Abth. 1886.

[2] Stieda, Unters. über die Entwickelung der gland. thymus, gland. thyreoidea und glandula carotica. Leipzig 1881.

[3] Maurer, Schilddrüse und Thymus der Teleostier, Morph. Jahrb. Bd. XI.

Über die Abhängigkeit der Ätzfiguren des Apatit von der Natur und Concentration des Ätzmittels.

Von Dr. Heinr. Baumhauer
in Lüdinghausen.

Zweite Mittheilung.[1]

(Vorgelegt von Hrn. Klein.)

In einer demnächst in Groth's Zeitschrift für Krystallographie (Bd. 18) erscheinenden Abhandlung »über die Winkelverhältnisse des Apatit von verschiedenen Fundorten« werde ich zeigen, dass die nach oP tafelförmigen Apatitkrystalle von folgenden Fundorten: St. Gotthard, Floitenthal, Schwarzenstein, Ala, Knappenwand und Rothenkopf (Zillerthal) auf drei verschiedene Axenverhältnisse zurückzuführen sind, und zwar die Krystalle

1. vom St. Gotthard, Floitenthal, Schwarzenstein auf das A.V. a : c = 1 : 0.73400, welches schon von A. Schmidt[2] angegeben wurde;
2. von der Knappenwand auf a : c = 1 : 0.73333;
3. vom Rothenkopf und von Ala auf a : c = 1 : 0.73131.

Ich fand z. B. den meist sehr gute Messungen gestattenden Winkel ∞P : 2P2 im Mittel bei

1. zu 44° 17′ 2″
2. » 44° 18′ 44″
3. » 44° 21′ 48″.

Der Winkel oP : P berechnet sich für

1. zu 40° 17′ 0″
2. » 40° 15′ 26″
3. » 40° 10′ 46″.

Drei von Prof. J. König in Münster (Westf.) gütigst ausgeführte Analysen ergaben für einen Krystall vom Schwarzenstein nicht wäg-

[1] Die erste Mittheilung des Verfassers über diesen Gegenstand erschien in diesen Sitzungsberichten 1887, XLII, 863.

[2] Zeitschr. f. Kryst. 7. 551.

bare Spuren von Chlor, für einen solchen von der Knappenwand 0.028 Procent, für Krystalle vom Rothenkopf 0.085 Procent Chlor. Mit diesem verschiedenen Chlorgehalte und dem mit wachsender Chlormenge abnehmenden Winkel oP:P correspondirt nun, soweit wenigstens die Differenz eine beträchtlichere ist, ein merkwürdiges abweichendes Verhalten der Krystalle vom Schwarzenstein. St. Gotthard und Floitenthal, sowie von der Knappenwand einerseits und derjenigen vom Rothenkopf andererseits beim Ätzen mit Schwefelsäure von verschiedener Concentration. Da aus diesem, im Folgenden näher darzulegenden Unterschiede die Nothwendigkeit sich ergibt, die Apatitkrystalle verschiedener Fundorte vor der Ätzung zu messen bez. zu analysiren, wenn es sich darum handelt, mit einander vergleichbare Versuchsreihen zu erhalten, so könnte vielleicht ein Zweifel an der Gültigkeit der in der citirten ersten Mittheilung von mir veröffentlichten Resultate der Ätzung von Apatitkrystallen mit Salzsäure und Salpetersäure entstehen. Denn die betreffenden Krystalle wurden vorher weder gemessen noch analysirt. Dennoch werden die Ergebnisse, welche ich in der ersten Mittheilung niederlegte, durch die nunmehr gewonnene Erkenntniss von den Beziehungen zwischen Axenverhältniss und Ätzerscheinungen nicht berührt bez. verändert. Denn es dienten zu jenen früheren Versuchen mit Salzsäure nur Krystalle vom St. Gotthard, welche zudem fast sämmtlich von einem und demselben Handstücke stammten, und zu denjenigen mit Salpetersäure nur solche vom St. Gotthard und vom Schwarzenstein, wobei ich ausserdem bei der Prüfung mit 5- und 100procentiger Säure beiderlei Krystalle verwandte. — Zu den neuerdings mit Schwefelsäure angestellten Versuchen dienten Krystalle 1. vom Schwarzenstein, Floitenthal und St. Gotthard, 2. von der Knappenwand und 3. vom Rothenkopf. Die auf der Basis erhaltenen Ätzfiguren entsprechen auch hier, wie bei der Anwendung von Salz- oder Salpetersäure, sechsseitigen Pyramiden, im Allgemeinen von der Stellung einer Tritopyramide. Zur Messung des von einer Seitenlinie der Eindrücke und einer Umgrenzungslinie der Basis bez. einer Kante oP:P eingeschlossenen ebenen Winkels (ε bez. ε') wurde wieder das grosse Fuess'sche Mikroskop benutzt, welches einzelne Minuten abzulesen gestattet. Dabei wurden die besten Praeparate zur Messung ausgewählt.

1. Zunächst mögen die an Krystallen vom Schwarzenstein, St. Gotthard und Floitenthal erhaltenen Resultate mitgetheilt werden. Die Krystalle vom Schwarzenstein stammen wahrscheinlich alle, jedenfalls zur Hälfte von demselben Handstücke; hinsichtlich einiger, schon früher hergestellter Praeparate (mit 50-, 1- und $^1/_{10}$ procentiger Säure) ist mir nämlich die Herkunft von demselben Hand-

stücke nicht mehr mit voller Sicherheit erinnerlich. Zu genauen Kantenwinkel-Messungen vor dem Ätzen waren diese Krystalle leider wenig geeignet, da die meisten Flächen leicht geknickt oder mit zarten Zeichnungen bedeckt waren. Es wurden deshalb fast stets doppelte oder wenig scharfe Reflexe erhalten, so dass von der Durchmessung der Krystalle abgesehen werden musste. An einem derselben wurde nur beiläufig $\infty P : P$ zu 49° 43½′ und $P : oP$ zu 40° 17′ bestimmt, was den oben für die Schwarzensteiner Krystalle (bez. die Krystalle erster Art) mitgetheilten (an einem anderen Exemplare desselben Fundortes von mir constatirten) Werthen entspricht. Da aber gerade diese Krystalle ausgezeichnet gute Ätzeindrücke lieferten, so fanden sie in dieser Beziehung besondere Berücksichtigung. Leider trug das betreffende Handstück nicht viele Krystalle, so dass ich nur etwa zehn Praeparate dieser Art zu beschreiben vermag. An dieselben schliessen sich noch je zwei Krystalle vom St. Gotthard und vom Floitenthal an. Einer der ersteren beiden wurde vorher gemessen; die gewonnenen Werthe, welche gleichfalls dem von A. Schmidt ermittelten A. V. 1 : 0.7340 entsprechen, sind in meiner demnächst erscheinenden Abhandlung mitgetheilt (Kr. I erster Art). Der zweite Krystall vom St. Gotthard, sowie die beiden vom Floitenthal wurden schon früher geätzt, konnten also nicht mehr gemessen werden; indess liegt kein Grund vor, anzunehmen, dass sie nicht ebenfalls dem an anderen Krystallen dieser Fundorte ermittelten A. V. entsprächen.

Zum Ätzen wurde reine Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1.836 bei gewöhnlicher Temperatur benutzt, entweder unverdünnt (100procentig) oder in derselben Weise, wie früher die beiden anderen Säuren, mit Wasser verdünnt. Es wurden auch diesmal nur die auf oP entstandenen Ätzfiguren studirt.

a) Krystall vom Schwarzenstein, 100 Procent, geätzt während 10 Minuten. Es sind zweierlei Eindrücke zu unterscheiden: grössere, dunklere, mit scharfen geraden Seitenlinien, und meist kleinere und lichtere, welche also weniger tief in die Masse des Krystalls eindringen und deren Flächen weniger steil gegen die Basis geneigt sind. Letztere sind in der Regel an den Ecken etwas gerundet. Bei den dunklen Vertiefungen wurde, wie überhaupt fast stets bei den dunkleren Eindrücken, auf die Seitenlinien eingestellt, bei den lichteren hingegen, wie in der Regel auch in der Folge geschehen ist, auf je zwei, in der Projection auf oP zu einer Geraden zusammenfallenden vertieften Kanten. An einzelnen Stellen dieses Praeparates ist es freilich schwer, zwischen dunklen und lichten Eindrücken zu unterscheiden, indem dann auch die

sogenannten lichten Eindrücke mit den anderen fast gleich dunkel aussehen. Dann hilft aber bei der Unterscheidung der Umstand, dass bei den eigentlichen dunkleren Eindrücken die Umrisslinien scharf und gerade verlaufen, demnach auch die von denselben gebildeten Winkel scharf ausgeprägt erscheinen, während bei den anderen Vertiefungen diese Winkel bez. Ecken etwas gerundet oder doch nicht ganz scharf sind. Ich fand bei der Messung für den Neigungswinkel ε (bez. ε') folgende Werthe:

dunklere Eindrücke (ε)		lichtere Eindrücke (ε')	
12° 32′	12° 59′	11° 6′	12° 32′
12° 39′	13° 8′	11° 34′	12° 37′
12° 39′	13° 42′	11° 43′	12° 47′
12° 45′	13° 48′	12° 12′	
12° 58′	14° 0′	Mittel: 12° 4′	
Mittel: 13° 7′			

Beiderlei Eindrücke besitzen die Lage positiver Tritopyramiden, d. h. sie erscheinen in einer Stellung, welche den an dem Krystall makroskopisch auftretenden Tritopyramiden[1] entspricht.

b) Kr. vom Schwarzenstein, 60 Procent, g. 15 Min. Die Eindrücke sind, obwohl zu Messungen noch wohl geeignet, dennoch nicht besonders gut ausgebildet, weshalb auch der Unterschied zwischen dunkel und licht nicht sicher festzustellen ist. Es wurde deshalb bei der Messung hierauf keine Rücksicht genommen. Vielleicht hängt die ziemlich grosse Gesammtdifferenz zwischen den erhaltenen Werthen hiermit zusammen. Ich fand:

7° 15′	8° 28′
7° 32′	9° 16′
8° 3′	9° 16′
8° 7′	10° 47′
Mittel: 8° 35½′	

Die Eindrücke entsprechen ebenfalls positiven Tritopyramiden. Wie man aber sieht, hat im Vergleich mit dem vorigen Praeparat eine Annäherung derselben an die Lage der Protopyramide stattgefunden, welche bei dem folgenden Praeparat weiter fortgesetzt wird.

Nachträglich bemerkte ich an diesem Praeparat noch einige äusserst flache Eindrücke, welche sich von den eben beschriebenen durch ihre Lage wesentlich unterscheiden, indem sie einer Protopyramide sehr nahe kommen bez. deren Lage erreichen. Sie sind an

[1] Bei den später zu besprechenden Krystallen von der Knappenwand, an welchen die Tritopyramiden zuweilen beiderseitig (positiv und negativ) auftreten, wurden die am stärksten entwickelten betreffenden Flächen als positive angenommen.

Zahl gering und nur bei aufmerksamer Beobachtung zu finden. Ich möchte dieselben im Gegensatz zu den weitaus am deutlichsten entwickelten und zuerst in die Augen fallenden als secundäre bezeichnen (vergl. unten die Krystalle vom Floitenthal).

c) Kr. vom Schwarzenstein, 50 Procent, g. 10 Min. Dieses Praeparat zeigt nur wenige kleinere und ziemlich unvollkommene dunklere Eindrücke, daneben zahlreichere, grössere und vollkommenere lichte (beide rein pyramidal, ohne abstumpfende Basis); die letzteren eignen sich besser zu Messungen. Ich fand dabei 5° 20′, 5° 20′, 5° 44′. Endlich finden sich zahlreiche sehr flache Eindrücke mit stark ausgedehnter Basis, welche einer Protopyramide sehr nahe kommen, indess nicht besonders zu Messungen geeignet sind. Ich fand 1° 5′, 3° 44′, 4° 21′. Sämmtliche Vertiefungen entsprechen positiven Tritopyramiden. Ganz ähnlich verhielt sich ein zweites Praeparat, welches mit 50 procentiger Säure geätzt war. Indess war dasselbe noch weniger gut ausgefallen. Auffallend ist die Thatsache, dass gerade bei dem Punkte, wo die Ätzfiguren sich einer Protopyramide besonders nähern bez. durch eine solche hindurch in die negative Stellung überzugehen im Begriffe sind, ihre Ausbildung am wenigsten vollkommen ist (vergl. die entsprechenden Beobachtungen an den Krystallen von der Knappenwand).

d) Kr. wahrscheinlich vom Schwarzenstein, $33\frac{1}{3}$ Procent. Dieses Praeparat zeigt sehr schlechte Eindrücke, welche nur ganz ungefähre Messungen zuliessen. Ich fand 5° 9′, 6° 48′, 7° 49′. Die Vertiefungen gehören aber schon einer negativen Tritopyramide an, so dass demnach zwischen 50 Procent und $33\frac{1}{3}$ Procent, vielleicht etwa bei 40 Procent, der Übergang aus der positiven in die negative Stellung stattfindet. Leider sind die Eindrücke gerade hier so schlecht entwickelt. Bei einem zweiten, gleichfalls mit $33\frac{1}{3}$ procentiger Säure geätzten Krystalle wurden gar keine deutlichen Ätzfiguren erhalten. Um den Übergang etwas genauer kennen zu lernen, wurde noch folgender Versuch gemacht. Ein Krystall vom Schwarzenstein wurde sechs Minuten mit einer Mischung von 1 Vol 50 procentiger und 1 Vol. $33\frac{1}{3}$ procentiger Säure geätzt. Die erhaltenen, sehr wenig scharf ausgebildeten Eindrücke schienen bestimmt noch einer positiven Tritopyramide zu entsprechen, näherten sich aber sehr einer Protopyramide.

e) Kr. vom Schwarzenstein, 20 Procent, g. 5 Min. Gutes Praeparat, besonders mit vielen vortrefflich gebildeten lichten Eindrücken. Letztere scheinen von verschiedenen Graden der Helligkeit zu sein (besonders lichte sind im Folgenden mit * bezeichnet). Ich fand:

dunkle Eindrücke (ε)		lichte Eindrücke (ε')	
17° 58'	18° 24'	*18° 26'	19° 49'
17° 58'	19° 48'	19° 18'	19° 49'
18° 13'	20° 7'	19° 18'	19° 57'
Mittel: 18° 45'		*19° 44'	20° 51'
		*19° 44'	
		Mittel: 19° 39½'	

Sämmtliche Eindrücke entsprechen negativen Tritopyramiden, und die Drehung ist, wie man sieht, in der früher eingeschlagenen Richtung in beträchtlichem Maasse fortgesetzt worden.

f) Kr. vom Schwarzenstein, 10 Procent, g. 10 Min. Die Eindrücke dieses Praeparates, namentlich die lichten, sind sehr gut. Bei den weniger zahlreichen dunklen machen sich, wie aus den gemessenen Winkeln hervorzugehen scheint, zwei Stellungen bemerklich (vergl. die drei ersten Werthe für ε im Gegensatz zu den beiden letzten). Sämmtliche Ätzfiguren entsprechen negativen Tritopyramiden.

dunkle Eindrücke (ε)		lichte Eindrücke (ε')
14° 29'	16° 21'	16° 23'
14° 31'	17° 13'	16° 44'
14° 37'		17° 5'
Mittel: 15° 26'		17° 18'
		Mittel: 16° 52½'

Höchst beachtenswerth ist die Thatsache, dass nunmehr eine Rückwärtsdrehung stattgefunden hat, indem die Eindrücke sich wieder mehr der Lage einer Protopyramide genähert haben. Diese neue Bewegung bleibt auch für die folgenden Praeparate bestehen.

g) Kr. vom Schwarzenstein, 1 Procent, g. 1 Stunde. Die Ätzfiguren, besonders die lichten, sind gut ausgebildet. Die dunklen enthalten mehr oder weniger eine körnige Masse eingelagert. Sämmtliche Eindrücke entsprechen negativen Tritopyramiden. Die mit * bezeichneten lichten erscheinen besonders hell.

dunkle Eindrücke (ε)		lichte Eindrücke (ε')	
10° 41'	11° 39'	12° 14'	13° 15'
11° 9'	11° 57'	*12° 14'	*13° 24'
11° 36'	12° 5'	*13° 15'	*14° 12'
11° 36'	12° 18'	Mittel: 13° 6'	
Mittel: 11° 38'			

h) Kr. vom Schwarzenstein, $^1/_{10}$ Procent, g. $2^3/_4$ Stunden. Neben einigen dunklen Eindrücken zeigt dieses Praeparat viele gute lichte Ätzfiguren. Letztere weisen oft eine sehr zarte, den Umrisslinien annähernd parallele Streifung ihrer Flächen auf, was höchst

wahrscheinlich auf die abwechselnde Combination eines lichten und eines dunklen Eindrucks zurückzuführen ist. Beiderlei Eindrücke gehören negativen Tritopyramiden an. Die nicht gestreiften lichten Eindrücke sind im Folgenden mit * bezeichnet.

dunkle Eindrücke (ε)	lichte Eindrücke (ε′)	
10° 53′	*6° 50′	7° 53′
11° 6′	*7° 10′	8° 6′
11° 8′	7° 47′	8° 20′
11° 22′	7° 51′	8° 20′
12° 32′	Mittel: 7° 47′	
Mittel: 11° 24′		

i) Kr. vom St. Gotthard, 100 Procent, g. 6 Min. Dieser Krystall wurde vor dem Ätzen gemessen (s. oben). Derselbe zeigt zahlreiche gute dunkle Eindrücke, aber nur wenige und sehr schlecht gebildete lichte Vertiefungen.

ε = 12° 1′	12° 25′	ε′ = 12° 1′
12° 6′	12° 55′	14° 30′
12° 20′	12° 56′	Mittel: 13° 15½′
Mittel: 12° 27′		

Sämmtliche Eindrücke entsprechen positiven Tritopyramiden.

k) Kr. vom St. Gotthard (jedoch von einem anderen Handstück), sehr verdünnte Säure, g. ¾ Stunden. Dieses vortreffliche, schon früher dargestellte Praeparat zeigt ausgezeichnete dunkle und lichte Ätzfiguren, welche letzteren einen Unterschied in der Helligkeit erkennen lassen, so dass man von lichten und sehr lichten Eindrücken sprechen kann. Alle sind jedoch hinsichtlich ihrer Lage sehr wenig oder gar nicht verschieden. Ich fand

ε = 9° 13′	9° 54′	ε′ = 9° 12′	9° 24′
9° 24′	9° 54′	9° 14′	9° 54′
9° 25′	9° 54′	9° 14′	9° 54′
9° 33′	9° 54′	9° 24′	
Mittel: 9° 41′		Mittel: 9° 28′	

Nach den angeführten Zahlen kann man wohl bestimmt die dunklen und lichten Eindrücke, welche beide einer negativen Tritopyramide entsprechen, als parallel bezeichnen. Zugleich ersieht man, dass bei einem besonders gut ausgefallenen Praeparat mehrfach derselbe Werth für verschiedene Eindrücke gewonnen wird, oder dass doch die Differenzen im Ganzen relativ gering sind (hier im Maximum 41′ bez. 42′).

l) Kr. vom Floitenthal, 100 Procent und 10 Procent. Dieses Praeparat wurde hergestellt, um die Wirkungen der unverdünnten und der stark verdünnten Säure neben einander zu zeigen. Zu diesem Zwecke wurde der ganze Krystall zuerst während 8 Minuten mit 100procentiger Säure geätzt. Dabei bedeckte sich die Basis mit sehr scharfen, dunklen Eindrücken, welche einer positiven Tritopyramide entsprechen und z. B. folgende Werthe für ε ergaben: 10° 30′, 10° 59′, 11° 2′, 11° 9′, 11° 25′, 11° 26′ — Mittel: 11° 5′. Neben denselben bemerkt man bei aufmerksamer Betrachtung im abgeblendeten Lichte einzelne, weit kleinere, flache und lichtere, dazu wenig gut gebildete Vertiefungen, welche entweder einer Protopyramide sehr nahe kommen oder gar die Lage einer negativen Tritopyramide aufweisen. Ich betrachte diese Eindrücke als secundäre, die ersteren hingegen als die normalen. Es wurde nun ein Theil der Basis mit Wachs bedeckt und der freigebliebene Theil einige Zeit der Einwirkung 10procentiger Säure ausgesetzt. Die letztere wirkte nun in der Weise verändernd (umformend) auf die normalen dunklen Eindrücke, dass dieselben unter bedeutender Vergrösserung in die Lage negativer Tritopyramiden übergingen (beobachtete Neigungswinkel: 10° 48′, 11° 2′, 11° 22′, 11° 43′, 12° 6′, 12° 9′ — Mittel: 11° 32′, also fast gleich der Neigung der mit 100 Procent erhaltenen positiven Tritopyramiden). Der betreffende Theil der Basis ist schliesslich dicht mit solchen grossen Eindrücken bedeckt.

m) Kr. vom Floitenthal, 66⅔ Procent, g. 22 Min. Dieses besonders lange der Einwirkung der Säure ausgesetzte Praeparat zeigt, vielleicht eben deshalb, gewisse Erscheinungen, welche ich als secundäre bezeichnen möchte. Die dunklen (positiven) Eindrücke (gemessene Winkel: 9° 27′, 9° 53′, 10° 10′, 11° 22′ — Mittel: 10° 13′) sind deutlich von lichten zu unterscheiden. Letztere sind aber im allgemeinen etwas kleiner als die dunklen und nähern sich, was besonders auffällt, weit mehr wie diese einer Protopyramide (ε′ z. B. = 3° 30′, 4° 46′), deren Lage sie zuweilen ausserordentlich nahe kommen. Ausser diesen Eindrücken bemerkt man bei genauer Betrachtung hier und da auch noch äusserst flache und deshalb sehr helle Eindrücke, welche sich von den dunklen Aetzfiguren durch ihre entgegengesetzte, also negative Lage unterscheiden.

Wie man sieht sind hier, ähnlich wie bei den mit concentrirter Salzsäure früher erhaltenen Ätzfiguren, mehrere Arten lichter Eindrücke zu unterscheiden, neben welchen die dunklen, als die am entschiedensten und gleichmässigsten ausgebildeten, zunächst in die Augen fallen.

2. Die zweite Gruppe der geätzten Apatite bilden die Krystalle von der Knappenwand. Eine Reihe derselben wurde vorher ge-

messen und hierauf geätzt, doch lieferten sie dabei nicht alle gute, brauchbare Praeparate. Von den im Folgenden beschriebenen Krystallen wurden nur l und m vorher gemessen; indess stellen b und i Bruchstücke eines grossen Krystalles dar, von welchem andere Stücke genau durchgemessen wurden.

a) 100 Procent, 4 Min. Dieses Praeparat zeigte zum Theil schön ausgebildete, dunkle Vertiefungen mit scharfem Umriss. Die lichten Eindrücke zeigen weniger scharfen bis rundlichen Umriss; die Einstellung auf die vertieften Kanten derselben war ziemlich schwierig.

ε	9° 48′	10° 11′	10° 37′	ε′ = 8° 0′
	9° 53′	10° 11′	10° 46′	9° 26′
	9° 53′	10° 26′	10° 46′	9° 40′
	9° 57′	10° 29′	11° 3′	9° 51′
			11° 11′	Mittel: 9° 14′
		Mittel: 10° 24′		

Sämmtliche Eindrücke entsprechen einer positiven Tritopyramide.

b) 80 Procent, 8 Min. Hier überwiegen die dunklen Eindrücke an Zahl sehr. Lichte und dunkle entsprechen positiven Tritopyramiden.

ε =	10° 34′	11° 4′	ε′ = 12° 0′
	10° 34′	11° 17′	12° 0′
	10° 38′	11° 22′	12° 1′
	10° 40′		Mittel: 12° 0 1/3′
	Mittel: 10° 53′		

c) 60 Procent, 11 Min. Die Eindrücke sind wenig vollkommen; auch ist es schwer, dunkle und lichte Ätzfiguren zu unterscheiden. Ich fand den Neigungswinkel im Allgemeinen zu:

9° 39′	10° 40′
10° 12′	11° 25′
10° 37′	11° 28′
Mittel: 10° 40′	

Die Eindrücke stellen positive Tritopyramiden dar.

Wie man sieht, hat wenigstens für die dunklen Eindrücke der Übergang von 100 Procent zu 80 resp. 60 Procent keine wesentliche Veränderung in der Lage zu Folge. Die Krystalle vom Schwarzenstein zeigten in dieser Hinsicht ein anderes Verhalten.

d) Der hier zu besprechende Krystall wurde kurze Zeit mit einer Mischung von 1 Vol. 50 procentiger und 1 Vol. 33 1/3 procentiger Säure geätzt. Die freilich schon recht unvollkommenen, sonst gewiss nicht zu Messungen benutzten Eindrücke entsprechen noch einer

positiven Tritopyramide. Die Neigung konnte nur eben angenähert bestimmt werden.

Ich fand im Allgemeinen:

5° 19′	6° 59′
5° 41′	7° 7′
6° 51′	7° 15′

Mittel: 6° 32′

Hier ist also im Vergleich mit den vorigen Praeparaten schon eine bedeutende Annäherung an die Lage einer Protopyramide eingetreten.

e) 40 Procent, 3 Min. Die Eindrücke sind sehr unvollkommen, weshalb nur auf zwei grössere, stark nach oP abgestumpfte, eingestellt wurde. Dabei ergaben sich die Werthe 3° 4′ und 4° 21′. Diese Eindrücke gehören noch einer positiven Tritopyramide an. Der Krystall war während des Ätzens an einer Stelle mit Wachs bedeckt (um so eine unangegriffene, zum Einstellen geeignete Kante zu erhalten). Doch war dadurch anscheinend der Säure der Zutritt nicht ganz gewehrt, denn es zeigten sich nachher wenigstens am Rande dieser Stelle sehr kleine Eindrücke, von welchen einige eine entgegengesetzte Stellung wie die grösseren aufweisen, also einer negativen Tritopyramide entsprechen. Da die Säure hier offenbar nur langsamer zuströmen konnte, so ist vielleicht anzunehmen, dass sie ähnlich wie eine stärker verdünnte Säure (welche Eindrücke negativer Stellung hervorruft) gewirkt hat.

f) Dieser Krystall wurde mit einer Mischung von 1 Vol. 50 procentiger und 2 Vol. $33^1/_3$ procentiger Säure geätzt. Obgleich mit grosser Vorsicht verfahren wurde, zeigte dieses Praeparat doch keine irgendwie gut gebildeten Eindrücke. An einzelnen derselben schien eine bedeutende Annäherung an die Protopyramide für gewisse, ziemlich scharfe Seitenlinien nachweisbar. Doch sind zuverlässige Messungen nicht auszuführen. Auch hier (wie bei den Krystallen vom Schwarzenstein) sind die Ätzfiguren gerade bei dem Punkte, wo sie die Lage einer Protopyramide passiren, am undeutlichsten. Beim vorsichtigen Auftupfen der Säure auf die Basis schieden sich sogleich viele Gypsnadeln aus, was sehr störend auf die Ausbildung der Ätzfiguren wirkte. Dieselben sind meist rundlich und flach gewölbt.

g) 25 Procent, 5 Min. Dieses wenig gute Praeparat erwies sich hinsichtlich der Trennung der in ihrer Lage auffallend stark differirenden Eindrücke in dunkle und lichte besonders schwierig. Wahrscheinlich ist es, dass dunkle und lichte Vertiefungen zu unterscheiden sind, doch ist die Grenze zu schwer zu ziehen. Die Ausbildung der

Ätzfiguren ist eine zu wenig charakteristische. Häufig sind sie parallel der Basis stark abgestumpft. Bei der Messung wurde zum Theil auf die Seitenlinien, zum Theil auf die vertieften Kanten eingestellt. Ich gebe hier die besseren der erhaltenen Werthe, ohne eine Sonderung nach dunklen und lichten Eindrücken zu versuchen:

4° 47′	12° 26′
4° 49′	12° 31′
7° 17′	15° 23′
11° 5′	

Alle diese Eindrücke entsprechen negativen Tritopyramiden. Der Übergang in die negative Stellung tritt also hier zum erstenmal mit aller Bestimmtheit hervor. — Ein zweites, mit 25 procentiger Säure erhaltenes Praeparat zeigte gar keine brauchbaren Ätzfiguren.

h) 20 Procent, 2½ Min. Dieses Praeparat weist wieder recht schöne dunkle und daneben wohl zu unterscheidende lichte Eindrücke auf. Häufig bildet ein lichter Eindruck, im Innern eines dunklen liegend, damit eine Combination.

ε = 14° 15′	15° 47′	ε′ = 14° 5′
14° 33′	17° 20′	14° 20′
15° 9′	17° 22′	14° 37′
15° 30′	17° 51′	14° 44′
15° 44′		Mittel: 14° 26½′
Mittel: 15° 57′		

Beiderlei Eindrücke stellen negative Tritopyramiden dar. Dieselben haben sich im allgemeinen in der eingeschlagenen Richtung weiter von der Lage einer Protopyramide entfernt (vergl. Praeparat e der Krystalle vom Schwarzenstein).

i) 10 Procent, 6 Min. Dieses Praeparat weist ausgezeichnet schöne dunkle, lichte und in der oben angegebenen Weise combinirte Eindrücke auf.

ε = 14° 16′	14° 38′	ε′ = 9° 59′	13° 22′
14° 16′	14° 44′	11° 38′	13° 42′
14° 38′	15° 16′	11° 56′	13° 42′
Mittel: 14° 38′		12° 35′	14° 25′
		12° 51′	
		Mittel: 12° 41′	

Die Lage der Eindrücke, ob positiv oder negativ, konnte an diesem Praeparat wegen Mangels makroskopischer Tritopyramidenflächen (das Praeparat bildet nur ein Bruchstück eines grösseren Krystalls) nicht bestimmt werden. Es ergab sich aber aus dem Vergleich mit

einem andern, sonst weniger gut ausgefallenem Praeparate (gleichfalls 6 Minuten mit 10procentiger Säure geätzt), dass die Eindrücke einer negativen Tritopyramide entsprechen. Das genannte zweite Praeparat ergab für die dunklen Vertiefungen Winkel von 13° 16′—15° 17′, für die lichten solche von 10° 16′—13° 5′. Interessant ist hier (ebenso wie bei f der Krystalle von Schwarzenstein) die Thatsache, dass beiderlei Eindrücke sich im Vergleich mit denjenigen des vorigen Praeparates nicht noch mehr von der Lage einer Protopyramide entfernen, sondern sich im allgemeinen derselben wieder etwas mehr nähern, dass also eine Rückkehr in der Drehung stattgefunden hat.

k) 5 Procent, 6 Min. Die gut ausgebildeten Eindrücke gehören gleichfalls sämmtlich einer negativen Titropyramide an und nähern sich im allgemeinen noch mehr wie die von i einer Protopyramide.

ε =	12° 23′	14° 3′	ε′ =	9° 57′	12° 23′
	13° 19′	14° 9′		10° 32′	12° 37′
	13° 33′	14° 10′		10° 54′	13° 17′
	13° 45′			11° 19′	
	Mittel: 13° 37′			Mittel: 11° 34′	

l) 5 Procent, 18 Min. Dieser Krystall wurde vorher gemessen (in der erwähnten Abhandlung als IV der Krystalle von der Knappenwand aufgeführt) und hierauf etwas länger geätzt. Ich mass daran einige dunkle Eindrücke und fand für ε:

11° 20′	12° 43′
11° 27′	13° 22′
11° 44′	13° 40′
12° 30′	14° 21′
Mittel: 12° 38′	

Durch die drei ersten Winkel ist der Mittelwerth im Vergleich zu dem vorigen Praeparat um etwa 1° herabgedrückt. Die übrigen Winkel hingegen stimmen mit solchen von k nahe überein. Natürlich sind hier die Eindrücke wegen der längeren Dauer des Ätzens bedeutend grösser ausgefallen.

m) 1 Procent, 25 Min. Der Krystall wurde gleichfalls vor dem Ätzen gemessen (a. a. O. als II der Knappenwander Krystalle aufgeführt). Der starken Verdünnung der Säure entsprechend, musste ziemlich lange geätzt werden, um hinreichend grosse Eindrücke zu erhalten. Dieselben sind im Allgemeinen weniger gut ausgebildet, doch konnte immer noch eine Reihe zuverlässiger Messungen angestellt werden.

$\varepsilon = 11^\circ\ 8'$	$12^\circ\ 7'$	$\varepsilon' = 9^\circ\ 32'$
$11^\circ\ 47'$	$12^\circ\ 17'$	$9^\circ\ 41'$
$11^\circ\ 51'$	$13^\circ\ 53'$	$9^\circ\ 52'$
Mittel:	$12^\circ\ 10\frac{1}{2}'$	$10^\circ\ 26'$
		Mittel: $9^\circ\ 53'$

Die Eindrücke gehören negativen Tritopyramiden an.

n) $^1/_{10}$ Procent, $5^3/_4$ Stunden. Trotz der sehr langen Dauer des Ätzens sind die Eindrücke ziemlich klein und sämmtlich stark nach der Basis abgestumpft. Es bleiben im Allgemeinen an denselben nur schmale Streifen der Pyramidenflächen übrig, welche dann wohl dunkler oder heller erscheinen; nur insoweit könnte ein Unterschied zwischen dunklen und lichten Eindrücken verzeichnet werden.

dunklere Eindrücke		lichtere Eindrücke
$8^\circ\ 33'$	$9^\circ\ 29'$	$9^\circ\ 8'$
$9^\circ\ 3'$	$10^\circ\ 27'$	$9^\circ\ 18'$
$9^\circ\ 4'$	$11^\circ\ 43'$	$10^\circ\ 41'$
		$11^\circ\ 15'$

Mittel: $9^\circ\ 52'$

Das Mittel wurde aus sämmtlichen angeführten Werthen genommen, da ja beiderlei Eindrücke nicht merklich in ihrer Lage differiren und vielleicht geradezu identisch sind. Man sieht, dass auch hier wieder im Ganzen eine weitere Annäherung der Ätzfiguren, welche einer negativen Tritopyramide entsprechen, an die Lage einer Protopyramide stattgefunden hat.

---

3. Krystalle vom Rothenkopf. Die von mir gemessenen, sowie die geätzten Krystalle dieses Fundortes stammen sämmtlich von einem und demselben Handstücke her; sie waren in einem chloritischen Gestein eingewachsen. So vortrefflich die Beschaffenheit ihrer Flächen ist, so wenig gute Ätzfiguren lieferten sie im Allgemeinen. Die besten Eindrücke erhielt ich wohl bei Anwendung von 100-, 10- und 5 procentiger Säure. Ich habe schon eingangs darauf hingewiesen, dass diese Krystalle sich beim Ätzen mit Schwefelsäure wesentlich anders verhalten als die bisher besprochenen.

a) 100 Procent, 4 Min. Dieses Praeparat zeigt nur verhältnissmässig wenige, wegen der kurzen Ätzdauer kleine, dunkle Eindrücke von ziemlich guter Ausbildung. Dieselben kommen einer Protopyramide sehr nahe, theilweise mögen sie in Wirklichkeit eine solche darstellen. Die Messungen waren schwierig und nur bei starker Vergrösserung auszuführen. Ich fand $\varepsilon = -0^\circ\ 4'$, $-0^\circ\ 34'$, $-0^\circ\ 34'$,

+ 0° 58′. Die mit — bezeichneten Werthe entsprechen einer negativen, der mit + bezeichnete einer positiven Tritopyramide.

b) 100 Procent, 6 Min. Hier sind dunklere und lichtere Eindrücke kaum mit Bestimmtheit zu unterscheiden. Es scheint nur, als seien die einer Protopyramide am meisten nahe kommenden (unter 1 aufgeführten) etwas lichter als die übrigen (2). Ich erhielt folgende Werthe:

1.	2.	
0° 16′	3° 10′	4° 57′
0° 38′	3° 28′	5° 20′
2° 44′	3° 57′	5° 21′
	4° 15′	
	Mittel: 4° 21′	

Die Abweichung von einer Protopyramide ist also hier zum Theil eine ziemlich beträchtliche. Sämmtliche angeführte Werthe entsprechen Tritopyramiden gleicher Stellung, mit alleiniger Ausnahme des zweiten (0° 38′), welcher sich auf einen Eindruck bezieht, der im Verhältniss zu den übrigen gemessenen die entgegengesetzte Stellung besitzt. Da makroskopische Tritopyramidenflächen fehlen, so gestattet das Praeparat leider nicht, die Stellung der Eindrücke, ob positiv oder negativ, zu bestimmen.

c) 100 Procent, 8 Min. Hier scheinen lichtere und dunklere Eindrücke zu unterscheiden zu sein. Die ersteren übertreffen die letzteren sehr an Zahl.

dunklere Eindrücke	lichtere Eindrücke	
0° 38′	1° 46′	2° 39′
2° 51′	1° 53′	3° 7′
4° 5′	2° 34′	3° 47′
Mittel: 2° 31′	Mittel: 2° 38′	

Eine Bestimmung darüber, ob die Eindrücke einer positiven oder negativen Tritopyramide angehören, war auch hier nicht möglich, indess ergab sich bei der Messung wenigstens, dass die dunklen und lichten entgegengesetzte Stellung haben.

d) 100 Procent, 8 Min. Dunkle und lichte Eindrücke lassen sich nicht zweifellos unterscheiden, obgleich es manchmal scheint, als entsprächen die dunkleren mehr einer positiven, die lichteren hingegen mehr einer negativen Tritopyramide. Ich fand die Neigungswinkel:

1.		2.	
+ 0° 37′	2° 3′	— 0° 50′	2° 2′
1° 0′	2° 36′	1° 24′	2° 12′
1° 31′	3° 1′	1° 42′	2° 59′
1° 49′		2° 1′	3° 37′
Mittel: 1° 48′		Mittel: 2° 6′	

Die unter 1. aufgeführten Zahlen entsprechen positiven, die unter 2. aufgeführten negativen Tritopyramiden. Die Abweichung von der Protopyramide ist nach der einen wie nach der anderen Richtung ziemlich dieselbe (vergl. auch oben c).

Aus den Beobachtungen an den mit 100 procentiger Säure geätzten Krystallen a—d folgt im allgemeinen nur, dass die Eindrücke sowohl positive als auch negative Lage haben können, dass sie sich gleichsam um die Lage einer Protopyramide bewegen und derselben zuweilen sehr nahe kommen.

e) 100 Procent, 10 Min. Hier beobachtete ich nur lichtere Eindrücke und fand daran folgende Neigungswinkel:

$1^\circ\ 33'$
$2^\circ\ 56'$
$3^\circ\ 1'$
$3^\circ\ 43'$
Mittel: $2^\circ\ 48'$

Die gemessenen Eindrücke gehören der nämlichen Stellung an; leider gestattete die Ausbildung des Krystalls nicht, diese Stellung, ob positiv oder negativ, näher zu bestimmen. Nach dem an d Beobachteten ist wohl anzunehmen, dass die Eindrücke einer negativen Tritopyramide entsprechen.

f) Die mit 80-, 60-, 40- und 20 procentiger Säure geätzten Krystalle vom Rothenkopf erweisen sich sämmtlich für genauere Messungen ungeeignet, ja sie zeigen wohl gar keine deutlichen Ätzfiguren.

Beim kurzen Ätzen (etwa während 5—6 Min.) mit 80 procentiger Säure entstehen einzelne dunkle, einigermaassen deutliche, einer Tritopyramide entsprechende Eindrücke, dieselben sind aber sehr klein. Ätzt man länger, so nimmt die Deutlichkeit der Eindrücke ab, und die Praeparate werden wohl ganz unbrauchbar. Stets zeigen die betreffenden Krystalle neben den dunklen viele flache, rundliche lichte Vertiefungen. Grössere deutliche Eindrücke konnte ich mit 80 procentiger Säure nicht erhalten.

Ein schöner Krystall ergab bei Behandlung mit 60 procentiger Säure während 1, 5 und 12 Minuten keinerlei deutliche Ätzfiguren, sondern nur eine rauhe Basisfläche. Ebenso verhielt sich ein zweiter Krystall.

Auch beim Ätzen eines Krystalls mit 40 procentiger Säure während 2 Min. wurden keinerlei Ätzfiguren bemerklich. Es fand eine reichliche Ausscheidung von Gypsnadeln statt. Nach der Einwirkung der Säure erscheint die Basis gleichmässig körnig.

Will man beim Ätzen mit 20 procentiger Säure wenigstens einigermaassen deutliche Eindrücke erhalten, so darf man die Säure nur etwa 1 Min. einwirken lassen. Die so entstehenden Ätzfiguren entsprechen negativen Tritopyramiden. Ätzt man länger, so werden dieselben undeutlicher: es bilden sich viele Gypsnadeln, welche auf die Ausbildung der Ätzfiguren nachtheilig und für die Beobachtung störend wirken. Ein Praeparat, welches $2^1/_2$ Min. geätzt war, zeigte schon gar keine deutlichen Eindrücke mehr.

g) 10 Procent, 2 Min. Dieses Praeparat zeigt wieder gute Eindrücke, und zwar dunkle, lichte und combinirte, bei welch letzteren ein lichter Eindruck sich in einem dunklen befindet, so dass von den Flächen des dunklen oft nur mehr schmale äussere Streifen übrig bleiben.

Da die lichten Eindrücke in ihrer Lage etwas von den dunklen verschieden sind, so beobachtet man an solchen combinirten Vertiefungen eine entsprechende Abweichung der inneren vertieften Kanten gegen die äusseren Seitenlinien. Es kommt auch vor, dass an einer Ätzfigur Dunkel und Licht in schmalen Flächenstreifen abwechseln, wodurch gestreifte, gleichsam treppenförmig gebaute Vertiefungen entstehen. Zu genauen Messungen sind natürlich derlei Eindrücke nicht zu verwenden. Ich fand:

$\varepsilon =$	$15^\circ\ 13'$	$15^\circ\ 37'$	$\varepsilon' =$	$10^\circ\ 56'$	$12^\circ\ 10'$
	$15^\circ\ 21'$	$15^\circ\ 40'$		$11^\circ\ 37'$	$12^\circ\ 36'$
	$15^\circ\ 29'$	$15^\circ\ 54'$		$11^\circ\ 45'$	$12^\circ\ 43'$
	Mittel: $15^\circ\ 32'$			$11^\circ\ 48'$	$13^\circ\ 9'$
				Mittel: $12^\circ\ 5^1/_2{}'$	

Die dunklen Eindrücke sowohl wie die lichten besitzen die Lage negativer Tritopyramiden. Die lichten nähern sich aber mehr einer Protopyramide.

h) 5 Procent, 3 Min. Man beobachtet dunkle, lichtere und sehr lichte Vertiefungen, von welchen die letzteren freilich sehr unvollkommen ausgebildet sind.

$\varepsilon =$	$15^\circ\ 4'$	$17^\circ\ 6'$	$\varepsilon' =$	$16^\circ\ 0'$
	$15^\circ\ 30'$	$17^\circ\ 31'$		$17^\circ\ 44'$
	$15^\circ\ 55'$			Mittel: $16^\circ\ 52'$
	Mittel: $16^\circ\ 13'$			

An einem sehr lichten Eindruck wurde gemessen: $12^\circ\ 35'$. Während ε und ε' zwischen ähnlichen Grenzen schwanken, ist die Neigung der sehr lichten Eindrücke eine wesentlich andere: dieselben nähern sich bedeutend mehr einer Protopyramide. Sämmtliche Eindrücke entsprechen negativen Tritopyramiden. Die dunklen und

namentlich die lichten erster Art haben sich im Vergleich zu denjenigen des vorigen Praeparats noch mehr von der Lage einer Protopyramide entfernt.

i) 1 Procent, 10 Min. Dieses wenig gute Praeparat zeigt kleine dunkle, rein pyramidale und viele stark nach oP abgestumpfte, mehr oder weniger dunkel umrandete Eindrücke. Zuweilen scheint das Innere eines dunklen Eindrucks von einem lichten erfüllt zu sein. Es wurden nur drei Messungen an dunklen Eindrücken ausgeführt, welche ergaben: 16° 50′, 17° 11′, 17° 58′ — Mittel: 17° 20′. Hiernach hat eine weitere Drehung in der eingeschlagenen Richtung von der Lage einer Protopyramide zu der einer Deuteropyramide stattgefunden. Die Eindrücke entsprechen negativen Tritopyramiden.

k) $^1/_{10}$ Procent, $^3/_4$ Stunden. Hier finden sich grössere, stark nach oP abgestumpfte Eindrücke zweierlei Art: die dunkleren kommen einer Deuteropyramide nahe, die lichteren hingegen nähern sich mehr einer Protopyramide. Ausserdem treten kleinere dunkle, nicht nach oP abgestumpfte Vertiefungen auf, welche mit den ersterwähnten dunklen im Wesentlichen gleicher Art zu sein scheinen. Häufig liegt nun ein solcher kleinerer dunkler Eindruck in einem grösseren abgestumpften lichten, wodurch die Verschiedenheit der Lage beider besonders deutlich in die Augen fällt. Ich maass bei den dunklen Eindrücken:

ε	24° 46′
	25° 49′
	25° 51′
	26° 2′
Mittel:	25° 37′,

bei den lichteren 6° 40′, 7° 39′ — Mittel: 7° 9½.

Die lichten Eindrücke, welche wenig zu genauen Messungen geeignet sind, scheinen übrigens ziemlich stark in ihrer Lage zu differiren. Sämmtliche Ätzfiguren sind negativer Stellung.

l) $^1/_{10}$ Procent, $1^1/_4$ Stunde. Dieses Praeparat zeigt im Wesentlichen die gleichen Erscheinungen wie das vorige. Die Ätzfiguren sind nur, der längeren Ätzdauer entsprechend, grösser, und es nähern sich meist die nicht abgestumpften dunklen Eindrücke (s. oben) noch mehr wie bei k der Stellung einer Deuteropyramide, ja sie erreichen dieselbe wohl gänzlich. Übrigens sind diese dunklen Ätzfiguren sehr wenig gut ausgebildet. Die lichten, stark abgestumpften Eindrücke gehören wieder einer negativen Tritopyramide an. Zuweilen kommen sie einer Protopyramide sehr nahe.

Die wichtigsten Ergebnisse der mitgetheilten Beobachtungen lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen.

1. Auch bei der Anwendung von Schwefelsäure als Ätzmittel treten auf der Basis des Apatit im Allgemeinen dunkle und lichte, einer sechsseitigen Pyramide entsprechende Vertiefungen auf, welche allerdings zuweilen nur schwierig zu unterscheiden sind. Die lichten Eindrücke schliessen sich hier in der Regel in ihrer Lage weit mehr, als es bei den früher mit Salzsäure erhaltenen Ätzfiguren der Fall war, an die dunklen an. Letztere zeigen am bestimmtesten die charakteristischen Wirkungen der Schwefelsäure.

2. Hinsichtlich der Krystalle vom Schwarzenstein, St. Gotthard, vom Floitenthal und von der Knappenwand ergab sich Folgendes. Bei Anwendung der Säure verschiedener Concentration (von 100 Procent bis $^1/_{10}$ Procent) findet eine Drehung der Ätzfiguren statt. Dieselben gehen von einer positiven Tritopyramide aus, passiren die Lage einer Protopyramide und gehen dann in die einer negativen Tritopyramide über. Bei etwa 10 Procent findet jedoch, was höchst merkwürdig ist, eine Rückwärtsdrehung statt, indem die Eindrücke sich von nun an wieder mehr einer Protopyramide nähern. Auffallend ist auch die Erscheinung, dass gerade da, wo die Lage einer Protopyramide fast erreicht oder passirt wird, die Ätzfiguren sich durch grosse Unvollkommenheit auszeichnen. Auch wurde bei Anwendung der Säure von mittlerer Concentration wohl eine starke Ausscheidung von Gypsnadeln beobachtet, welche man bei Anwendung der concentrirten und der stark verdünnten Säure nicht wahrnimmt. Dies hängt wohl mit den Löslichkeitsverhältnissen des Gyps in Schwefelsäure verschiedener Concentration zusammen.

In Betreff der im Einzelnen erhaltenen Werthe stimmen die Krystalle der genannten Fundorte nicht ganz überein; die Knappenwander unterscheiden sich etwas von denjenigen vom Schwarzenstein, allein auch die mit letzteren hinsichtlich ihrer Dimensionen genau übereinstimmenden Krystalle vom St. Gotthard und Floitenthal weisen ähnliche Abweichungen von den Schwarzensteinern auf. In dieser Hinsicht hat sich noch keine Regel aus meinen Versuchen ergeben.

3. Vergleicht man die beschriebene Drehung der Ätzfiguren mit den bei Anwendung von Salz- bezw. Salpetersäure beobachteten Bewegungen, so ergiebt sich ein bestimmter Unterschied. Bei HCl fand mit abnehmender Concentration eine Drehung der dunklen Eindrücke von der Lage einer negativen Tritopyramide, welche einer Deuteropyramide sehr nahe kam, zur Lage einer Protopyramide hin statt, ohne dass jedoch die letztere (bei 1 Procent) auch nur annähernd er-

reicht wurde. Bei Anwendung von Salpetersäure gehören die (dunklen und lichten) Ätzfiguren gleichfalls negativen Tritopyramiden an und bewegen sich bei abnehmender Concentration — umgekehrt wie bei HCl — mehr zur Lage einer Deuteropyramide hin, ohne dieselbe jedoch bei 5 Procent annähernd erreicht zu haben.

4. Wesentlich verschieden von den unter 2. erwähnten Krystallen verhalten sich beim Ätzen mit Schwefelsäure die auch goniometrisch und chemisch davon mehr abweichenden Krystalle vom Rothenkopf. Ihre Ätzfiguren beginnen bei 100 Procent mit Stellungen, welche nach beiden Seiten mit im Allgemeinen geringen Abweichungen um die Lage einer Protopyramide schwanken, um sich dann bei abnehmender Concentration — soweit die schwierig auszuführenden Beobachtungen zu erkennen gestatten — als negative Tritopyramiden mehr und mehr von dieser Lage zu entfernen. Bei $^1/_{10}$ Procent scheint von den dunklen Eindrücken zum Theil die Stellung einer Deuteropyramide erreicht zu werden. Im Ganzen liefern diese Krystalle weniger gute Ätzfiguren, gar keine bei Anwendung von 60- und 40 procentiger Säure. Es ist von Interesse, zu sehen, dass selbst so geringe Differenzen in den Dimensionen und in der chemischen Zusammensetzung, wie sie zwischen den Krystallen vom Rothenkopf einerseits und denjenigen vom Schwarzenstein (St. Gotthard, Floitenthal) und von der Knappenwand anderseits bestehen, sich in so auffallender Weise in der Verschiedenheit der Ätzerscheinungen ausprägen.

Ausgegeben am 22. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



1890.
XXVI.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

22. Mai. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Auwers.

1. Hr. Fuchs las über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen.

2. Hr. Kronecker machte eine Mittheilung: über orthogonale Systeme und eine fernere: über die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst.

3. Derselbe legte eine ihm von Hrn. Prof. H. Bruns in Leipzig zugegangene an die im Sitzungsbericht vom 12. April 1888 abgedruckten Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten anknüpfende Mittheilung über das Problem der Saecularstörungen vor.

4. Hr. Waldeyer legte eine Mittheilung des Hrn. Dr. W. Nagel hierselbst vor: über die Entwickelung des Uterus und der Vagina beim Menschen.

Sämmtliche Mittheilungen folgen hier, mit Ausnahme eines Theils der unter 2. aufgeführten, welcher später nachgetragen wird.



Über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen.

Von L. Fuchs.

Es seien die Integrale der irreductiblen Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

mit rationalen Coefficienten überall bestimmt[1], und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2, y_3 der Gleichung (A) eine homogene Relation $n$ten Grades mit constanten Coefficienten

$$\text{(B)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

bestehe, deren linke Seite sich nicht in Formen niedrigeren Grades zerlegen lässt. — In früheren Arbeiten[2] habe ich für $n > 2$ aus diesen Voraussetzungen die Folgerung gezogen, dass die Gleichung (A) algebraisch integrirbar sei, indem ich den Nachweis führte, dass z als Function von $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ nur eine endliche Anzahl von Werthen annehme[3] und dass zwischen z und η eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung besteht, in welcher die Variablen separirt sind[4].

Diese Differentialgleichung wird folgendermaassen gebildet. Es sei $H(f)$ die Hessische Covariante der Form f, so ist[5]

$$H(f) = X(z),$$

wo $X(z)$ Wurzel einer rationalen Function von z. Sei

---

1 S. Borchardt's Journal B. 66 S. 146 Gleichung 12.

2 Sitzungsberichte vom 8. Juni 1882 S. 703 ff. und Acta mathematica t. I p. 321.

3 Acta math. a. a. O. S. 328.

4 Acta math. S. 329.

5 Acta math. S. 323.

$$\frac{y_2}{y_1} = \eta\,,\ \frac{y_3}{y_1} = \zeta\,,$$
$$H(f) = y_1^{3n-6} \cdot H_1(\eta\,,\zeta)\,,$$
$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta\,,\zeta)\,,$$

endlich $\Delta(z)$ diejenige Wurzel einer rationalen Function von z, welcher die Hauptdeterminante von y_1, y_2, y_3 gleichwerthig ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt[3n-6]{\frac{\Delta^{n-2}}{X}} = \Omega(z) \qquad \sqrt[3n-6]{X} = \Theta(z)$$
$$\sqrt[3n-6]{\frac{H_1(\eta\,,\zeta)}{G(\eta\,,\zeta)^{n-2}}} = K(\eta) \qquad \sqrt[3n-6]{\frac{1}{H_1(\eta\,,\zeta)}} = L(\eta)\,,$$

so lautet die genannte Differentialgleichung[1]

$$(\alpha) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \Omega(z) \cdot K(\eta).$$

Wir fügen für den weiteren Gebrauch noch hinzu, dass[2]

$$(\beta) \qquad y_1 = \Theta(z) \cdot L(\eta).$$

Wie mit Hülfe der Gleichung (α) die algebraische Natur der Integrale der Gleichung (A) zu erweisen ist, findet sich am angeführten Orte nur angedeutet. Indem wir auf diesen Nachweis hier des Näheren eingehen, wollen wir zwei Verfahrungsarten entwickeln, welche auf verschiedenen Principien beruhen, und wie es scheint ein über den vorliegenden Zweck hinausreichendes Interesse darbieten.

1.

Wir schicken einige Sätze voraus, welche wir im Folgenden verwenden wollen.

I. S i n d w_1, w_2, w_3 d i e z u y_1, y_2, y_3 a d j u n g i r t e n F u n c t i o n e n, s o h a t d a s B e s t e h e n d e r G l e i c h u n g (B) z u r F o l g e, d a s s w_1, w_2, w_3 e i n e r h o m o g e n e n R e l a t i o n m i t c o n s t a n t e n C o e f f i c i e n t e n g e n ü g e n.

Denn durch Differentiation nach z folgt aus (B)

$$(1) \qquad f_1 y_1' + f_2 y_2' + f_3 y_3' = 0\,,$$

[1] Acta math. S. 329 Gleichung 27.

[2] Acta math. S. 329 Gleichung 26.

wo $f_k = \frac{\partial f}{\partial y_k}$, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dz^k}$ gesetzt ist. Ausserdem ist

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0. \tag{2}$$

Eliminiren wir aus (1) und (2) successive f_3 und f_2, so ergiebt sich

$$f_1 w_2 - f_2 w_1 = 0 \tag{3}$$

$$f_3 w_1 - f_1 w_3 = 0. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (B). (3), (4) ergiebt sich durch Elimination von y_1, y_2, y_3 eine homogene Relation zwischen w_1, w_2, w_3 mit constanten Coefficienten.

Ist $n > 2$, so ist auch der Grad der zwischen w_1, w_2, w_3 stattfindenden Relation grösser als 2.

II. Es sei die Differentialgleichung

$$y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \ldots + p_m y = 0 \tag{5}$$

irreductibel, und die Integrale derselben überall bestimmt[1]. Es seien überdiess die Zweige eines Integrals y derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl, so besitzt dieselbe ein Fundamentalsystem von Integralen, deren logarithmische Ableitungen algebraische Functionen sind.

In der That, wenn die Zweige eines Integrals y der Gleichung (5) bis auf constante Factoren mit den Werthen $y, y_1, y_2, \ldots y_{r-1}$ übereinstimmen, so sind die Zweige der Function $u = \frac{d \log y}{dz}$ genau mit den Werthen $u = \frac{d \log y}{dz}$, $u_1 = \frac{d \log y_1}{dz}$, $u_2 = \frac{d \log y_2}{dz}, \ldots u_{r-1} = \frac{d \log y_{r-1}}{dz}$ übereinstimmend. Die symmetrischen Functionen von $u, u_1, u_2, \ldots u_{r-1}$ sind daher eindeutige Functionen von z. Da die Integrale von (5) überall bestimmt sind, so haben diese eindeutigen Functionen keine wesentlich singuläre Stelle, sie sind also rationale Functionen von z. Demnach ist u eine algebraische Function von z. Die Gleichung (5) besitzt die Integrale

$$y_\lambda = e^{\int u_\lambda dz}$$
$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots r-1.$$

Von diesen müssen m linear unabhängig sein, da sonst Gleichung (5) mit einer linearen Differentialgleichung niedriger als $m$ter Ordnung und mit rationalen Coefficienten Integrale gemeinschaftlich hätte, gegen die Voraussetzung. Die Gleichung (5) besitzt daher ein Fundamentalsystem von Integralen, deren logarithmische Ableitungen algebraisch sind.

[1] Borchardt's Journal B. 66 S. 146 Gleichung (12).

2.

Wenn die Gleichung (A) die Relation (B) zulässt, und wenn ausserdem bekannt ist, dass die Zweige eines Integrals y derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, so hat dieselbe nach Satz II voriger Nummer ein Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, y_3, deren logarithmische Ableitungen Zweige einer algebraischen Function sind. Bezeichnen wir dieselben bezüglich mit u_1, u_2, u_3, so folgt aus Gleichung (1) voriger Nummer

$$f_1 y_1 u_1 + f_2 y_2 u_2 + f_3 y_3 u_3 = 0. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung und aus Gleichung (2) voriger Nummer ergiebt sich

$$f_1 y_1 (u_1 - u_3) + f_2 y_2 (u_2 - u_3) = 0. \tag{2}$$

Wenn wir vermittelst der Gleichung (B) ζ als algebraische Function von η in Gleichung (2) substituiren, so könnte sich ereignen, dass dieselbe für die beiden unabhängigen Variablen z, η identisch erfüllt würde.

Sind A_1, A_2 blosse Functionen von z und B_1, B_2 blosse Functionen von η, und ist identisch für die unabhängigen Variabeln η, z

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0 \tag{3}$$

so ist auch

$$A_1' B_1 + A_2' B_2 = 0 \tag{3a}$$

identisch erfüllt, wenn A_1', A_2' die Ableitungen von A_1, A_2 bedeuten. Sind B_1, B_2 nicht identisch Null, so folgt aus (3) und (3a), dass die Hauptdeterminante der Functionen A_1, A_2 identisch verschwindet, dass demnach[1]

$$A_1 = \gamma \cdot A_2, \tag{4}$$

wo γ von z unabhängig. Ist

$$A_1 = u_1 - u_3, \quad A_2 = u_2 - u_3,$$

sowie B_1, B_2 die sich aus $\frac{f_1}{y_1^{n-1}}$, $\frac{f_2 y_2}{y_1'}$ vermittelst Gleichung (B) sich ergebenden Functionen von η, so würde das identische Bestehen von (2) nach Gleichung (4) zur Folge haben

$$u_1 - u_3 = \gamma (u_2 - u_3) \tag{5}$$

und

$$f_2 y_2 + \gamma f_1 y_1 = 0 \tag{5a}$$

$$f_3 y_3 + (1 - \gamma) f_1 y_1 = 0, \tag{5b}$$

[1] Borchardt's Journal Bd. 66 S. 128.

wo γ eine Constante. Es kann nämlich wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit von f nicht B_1, B_2 identisch verschwinden.

In Folge der über f gemachten Voraussetzung ergiebt sich aus (5a) und (5b), dass identisch für alle y_1, y_2, y_3

$$f_2 y_2 + \gamma f_1 y_1 = M \cdot f \tag{6}$$

und

$$f_3 y_3 + (1-\gamma) f_1 y_1 = M_1 f, \tag{6a}$$

wo M und M_1 Constanten bedeuten.

Es können nicht M und M_1 gleichzeitig verschwinden, da sonst durch Addition der Gleichungen (6) und (6a) sich ergeben würden, dass f für alle Werthe y_1, y_2, y_3 identisch verschwindet. Es sei daher zunächst M von Null verschieden, und wir setzen

$$f = \phi_0 y_3^n + \phi_1 y_3^{n-1} + \ldots + \phi_n \tag{7}$$

wo ϕ_λ eine homogene Function λten Grades von y_1, y_2 bedeutet. Aus (6) ergiebt sich

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial y_2} y_2 + \gamma \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial y_1} \cdot y_1 = M\phi_\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \ldots n. \tag{7a}$$

Setzen wir

$$\phi_\lambda = \varepsilon_{\lambda 0} y_1^\lambda + \varepsilon_{\lambda 1} y_1^{\lambda-1} y_2 + \ldots + \varepsilon_{\lambda\lambda} y_2^\lambda, \tag{8}$$

so folgt aus (7a)

$$M\varepsilon_{\lambda k} = [k + \gamma(\lambda - k)]\varepsilon_{\lambda k} \quad k = 0, 1, \ldots \lambda. \tag{9}$$

Demnach ist entweder $\gamma = 1$, oder es besteht ϕ_λ nur aus einem einzigen Gliede, nämlich

$$\phi_\lambda = \varepsilon_\lambda y_1^{\lambda - k_\lambda} y_2^{k_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots n, \ \phi_0 = 0. \tag{10}$$

wo

$$k_\lambda = \frac{M - \lambda\gamma}{1-\gamma} = \frac{M}{1-\gamma} - \lambda \cdot \frac{\gamma}{1-\gamma} = \mu - \lambda\nu. \tag{10a}$$

Es kann aber nicht $\gamma = 1$ sein, da sonst (6a) ergeben würde, dass f eine zerlegbare Form sei, oder dass $\dfrac{\partial f}{\partial y_3}$, d. h.[1] w_3 verschwinden würde, was der Voraussetzung widerspricht, dass y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem bilden.

Wir haben daher

[1] Acta math. S. 331, Gleichung (C).

$$f = \sum_{1}^{n} {}_{\lambda}\, \varepsilon_\lambda y_1^{\lambda - k_\lambda} y_2^{k_\lambda} y_3^{n-\lambda}$$

oder

$$f = y_3^n y_2^\mu y_1^{-\mu} \sum_{1}^{n} {}_{\lambda}\, \varepsilon_\lambda (y_1^{1+\nu} y_2^{-\nu} y_3^{-1})^\lambda . \tag{11}$$

Die Gleichung (B) erforderte daher

$$y_1^{1+\nu} \cdot y_2^{-\nu} \cdot y_3^{-1} = C. \tag{12}$$

wo C eine Constante.

Es kann nicht $f = \phi_n$ sein, weil aus $\phi_n = 0$ sich $\eta =$ constans ergeben würde. Es kann andererseits, da $\phi_0 = 0$, nicht auch ϕ_n identisch verschwinden, demnach ist ϕ_n und wenigstens für noch einen Werth des Index λ ϕ_λ von Null verschieden. Aus (10a) ergiebt sich daher, dass μ und ν folglich auch γ und M reale und rationale Zahlen sind.

Da die linke Seite von (12) nach einem Umlaufe von z wie leicht zu sehen, identisch in sich selbst übergeführt werden muss, so ist die Hessische Determinante derselben

$$-(y_1^{1+\nu} y_2^{-\nu} y_3^{-1})^3 (y_1 y_2 y_3)^{-2},$$

also nach Gleichung (12) die Function $y_1 y_2 y_3$ gleich der Wurzel einer rationalen Function. Es sei

$$y_1 y_2 y_3 = \psi, \tag{12a}$$

wo ψ Wurzel einer rationalen Function.

Aus (12a) ergiebt sich

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{d \log \psi}{dz} . \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (5) und (13) folgt

$$u_2 = \frac{2 - \gamma}{2\gamma - 1} \cdot u_1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma - 1} \frac{d \log \psi}{dz} . \tag{14}$$

Die Function u_2 ist aus u_1 durch einen Umlauf U der Variablen z hervorgegangen. Da die Wiederholung des Umlaufes U nur eine endliche Anzahl verschiedener Zweige der algebraischen Function u_1 hervorbringen kann, so muss, da wegen der Irreductibilität der Gleichung (A) u_1 nicht eine rationale Function ist, $\frac{2 - \gamma}{2\gamma - 1}$ eine ganzzahlige Wurzel der Einheit sein, d. h., da γ eine rationale Zahl,

$$\frac{2 - \gamma}{2\gamma - 1} = \pm 1. \tag{15}$$

Da $\gamma = 1$ auszuschliessen ist, so müsste $\gamma = -1$ sein, demnach Gleichung (14) in

(14a) $$u_2 = -u_1 + \frac{2}{3}\frac{d\log\psi}{dz}$$

übergehen. Da u_1, u_2 beliebige Zweige der Function u_1 sind, so ergäbe sich ebenso für den Zweig u_3 der Function u_1

(14b) $$u_3 = -u_1 + \frac{2}{3}\frac{d\log\psi_1}{dz},$$

wo ψ_1 Wurzel einer rationalen Function bedeutet. Aber da u_3 auch ein Zweig der Function u_2 ist, so müsste aus demselben Grunde

(14c) $$u_3 = -u_2 + \frac{2}{3}\frac{d\log\psi_2}{dz},$$

wo ψ_2 Wurzel einer rationalen Function, sein. Aus den Gleichungen (14a) bis (14c) ergäbe sich aber, dass der Zweig u_3, also aus demselben Grunde alle Zweige der Function u_1, die logarithmischen Ableitungen von Wurzeln rationaler Functionen sind, und demnach die Integrale von (A) Wurzeln rationaler Functionen wären, was ausgeschlossen ist.

Wenn es nur zwei Zweige der Function u_1 gäbe, so müsste

(16) $$\frac{y_1'}{y_1} = a_0 + a_1\sqrt{R}$$

sein, wo a_0, a_1, R rationale Functionen von z. Hieraus würde sich ergeben

(17) $$\frac{y_1^{(2)}}{y_1} = b_0 + b_1\sqrt{R},$$

wo b_0, b_1 rationale Functionen. Aus (16) und (17) würde folgen, dass y_1 einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügte, was der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (A) widerspricht.

Demnach kann Gleichung (6) für einen von Null verschiedenen Werth von M nicht bestehen. Ebenso aber würden wir nachweisen, dass die Gleichung (6a) für einen von Null verschiedenen Werth von M_1 auf einen Widerspruch führt. Da aber, wie oben gezeigt, M und M_1 nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, so ergiebt sich, dass die Annahme, dass die Gleichung (2) identisch für von einander unabhängige Werthe der Variablen z, η bestehe, mit den über die Gleichungen (A) und (B) gemachten Voraussetzungen unverträglich ist.

Die Gleichung (2) setzt vielmehr die Variable η in Abhängigkeit von der Variablen z, und da diese Abhängigkeit eine algebraische ist, so folgt, unter Berücksichtigung der Gleichung (β) der Satz:

Wenn die Gleichung (A) die Relation (B) zulässt, und wenn ausserdem bekannt ist, dass die Zweige eines Integrals derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, so ist die Gleichung (A) algebraisch integrirbar.

3.

Es sei

$$y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_m y = 0 \tag{1}$$

eine beliebige lineare, homogene Differentialgleichung, und es seien $a_1, a_2, \dots a_m$ gegebene constante Werthe. Ist S eine Substitution der zur Gleichung (1) gehörigen Gruppe, α_{ik} deren Elemente, so wollen wir von den Ausdrücken

$$a'_k = \alpha_{k1} a_1 + \alpha_{k2} a_2 + \dots + \alpha_{km} a_m \qquad k = 1, 2, \dots m \tag{2}$$

sagen, sie seien durch Transformation aus $a_1, a_2, \dots a_m$ vermittelst der Substitution S entstanden. Nehmen wir an, dass die durch die Gesammtheit der Substitutionen der Gruppe entstandenen transformirten Werthsysteme, bis auf einen allen Elementen je eines Systems gemeinschaftlichen Factor, von endlicher Anzahl sind, nämlich übereinstimmend mit einem der Werthsysteme

$$(l_k a_1^{(\lambda)}, l_k a_2^{(\lambda)}, \dots l_k a_m^{(\lambda)}) \qquad \lambda = 0, 1, \dots r-1, \quad a_k^{(0)} = a_k. \tag{3}$$

Betrachten wir die Function

$$W = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m, \tag{4}$$

wo $w_1, w_2, \dots w_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (1) adjungirten Differentialgleichung ist.

Vollzieht z einen Umlauf, welcher der Substitution S entspricht, so verwandelt sich W in

$$W' = j \sum_{\lambda=1}^{m} a_\lambda (A_{\lambda 1} w_1 + A_{\lambda 2} w_2 + \dots + A_{\lambda m} w_m) \tag{5}$$

wo A_{kl} die Unterdeterminante erster Ordnung der Determinante $|\alpha_{kl}|$ bedeutet, welche zu α_{kl} gehört. Es ist übrigens

$$\text{Det}\, |\alpha_{kl}| = j^{-1} \tag{6}$$

Unter den Systemen (3) giebt es der Voraussetzung nach ein solches $(l_\lambda a_1^{(\lambda)}, l_\lambda a_2^{(\lambda)}, \ldots l_\lambda a_m^{(\lambda)})$ für welches

$$(7) \qquad la_\varrho = l_\lambda [\alpha_{\varrho 1} a_1^{(\lambda)} + \alpha_{\varrho 2} a_2^{(\lambda)} + \ldots + \alpha_{\varrho m} a_m^{(\lambda)}] \quad \varrho = 1, 2, \ldots m$$

nämlich dasjenige System, welches aus $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ durch die inverse Substitution von S hervorgegangen ist. — Substituiren wir (7) in (5), so folgt

$$(8) \qquad W' = \mu [a_1^{(\lambda)} w_1 + a_2^{(\lambda)} w_2 + \ldots + a_m^{(\lambda)} w_m]$$

wo μ von z unabhängig. Setzen wir allgemein

$$(4a) \qquad W_\lambda = a_1^{(\lambda)} w_1 + a_2^{(\lambda)} w_2 + \ldots + a_m^{(\lambda)} w_m; \quad \lambda = 0, 1, \ldots r-1$$

so ergiebt sich aus (8), dass die Zweige der Function W, bis auf constante Factoren, mit $W_0, W_1, \ldots W_{r-1}$ übereinstimmen. Wir erhalten also den Satz

I. Ist $a_1, a_2, \ldots a_m$ ein System gegebener von z unabhängiger Grössen, und sind diejenigen Systeme, welche aus dem gegebenen durch Transformation vermittelst der Gesammtheit der zu einer homogenen Differentialgleichung $m$ter Ordnung gehörigen Gruppe, bis auf einen allen Elementen je eines Systems gemeinschaftlichen Factor, von endlicher Anzahl, so besitzt die zu der gegebenen adjungirte Differentialgleichung ein Integral, dessen Zweige, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind.

Wenden wir dieses Theorem auf die Gleichung (A) an unter der Voraussetzung, dass sie die Relation (B) zulasse, und dass es eine von (0, 0, 0) verschiedene Stelle der Riemann'schen Fläche (B) gebe, welche durch die Gesammtheit der Substitutionen der zu (A) gehörigen Gruppe in eine nur endliche Anzahl von Stellen derselben Fläche transformirt wird, so ergiebt der Satz I, dass die zur Gleichung (A) adjungirte Differentialgleichung ein Integral besitzt, dessen Zweige, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind. Da nach Satz I, Nr. 1 zwischen w_1, w_2, w_3 eine homogene Relation stattfindet, so folgt aus dem Satze in Nr. 2, dass die adjungirte Differentialgleichung, folglich auch Gleichung (A) algebraisch integrirbar ist. Wir erhalten also das Resultat:

II. Wenn die Gleichung (A) die Relation (B) zulässt, und es ist eine von (0, 0, 0) verschiedene Stelle der Riemann'schen Fläche (B) vorhanden von der Beschaffenheit, dass sie durch die Gesammtheit der Substitutionen der zur Gleichung (A)

gehörigen Gruppe nur in eine **endliche** Anzahl von Stellen derselben Fläche übergeführt wird, so ist Gleichung (A) algebraisch integrirbar.

4.

Es sei a ein endlicher oder ein unendlich grosser Werth von z, in dessen Umgebung das Integral

$$J = \int \Omega dz$$

eine eindeutige Umkehrung nicht zulässt, und es sei $\eta = \alpha$, $\zeta = \beta$ eine Stelle der Riemann'schen Fläche (B), welche auf einem gewissen Wege der Variablen z für $z = a$ erreicht wird. Wenn durch alle möglichen Umläufe der Variablen z der Stelle (α, β) unzählig viele von einander verschiedene Stellen (α', β'), $(\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}) \ldots$ derselben Fläche zugeordnet würden, so gäbe es unter diesen auch unzählig viele, für welche $K(\eta)$ weder unendlich noch Null würde, da $K(\eta)$ eine algebraische Function. In diesen Stellen würde sich aber z als Function von η verzweigen. Wir dürfen nun voraussetzen,[1] dass z eine einwerthige Function von (η, ζ) ist, eine solche Function kann sich aber nur in den Verzweigungspunkten der Fläche (B), also nur in einer endlichen Anzahl von Stellen dieser Fläche verzweigen. Giebt es also Werthe $z = a$, in deren Umgebung J nicht eindeutig umkehrbar wäre, so könnte der Stelle (α, β) durch die Gesammtheit der Substitutionen der zur Gleichung (A) gehörigen Gruppe nur eine endliche Anzahl von Stellen zugeordnet werden, und es wäre nach Satz II Nr. 3 die Gleichung (A) algebraisch integrirbar.

Giebt es solche Werthe a nicht, alsdann ist[2] z eine eindeutige Function von J, welche entweder rational oder einfach, oder endlich doppelt periodisch ist. Da z für ein gegebenes η nur eine endliche Anzahl von Werthen annimmt, so müsste in dem Falle, dass z eine rationale Function von J würde, das Integral

$$\mathrm{H} = \int \frac{d\eta}{K(\eta)}$$

eine algebraische Function von η, und demzufolge z eine algebraische Function von η sein. — Ist z eine einfach oder doppeltperiodische Function von J, so müssen, damit z für ein gegebenes η nur eine

[1] Acta math. S. 337 Satz VI.

[2] Briot et Bouquet im Journal de l'École Polytechnique, cah. 36 S. 217.

endliche Anzahl von Werthen annehme, ganzzahlige Vielfache der Periodicitätsmodulen von H mit Periodicitätsmodulen von J übereinstimmen, und Stellen in der Fläche (B), in welchen z unbestimmt würde, könnten nur unter denjenigen Werthen befindlich sein, für welche $K(\eta)$ verschwindet. Solche Stellen sind demnach in der Fläche (B) nur in endlicher Anzahl vorhanden. Ist aber $\eta = \gamma$, $\zeta = \delta$ eine Stelle, wo z unbestimmt wird, so muss jede Stelle (γ', δ'), welche aus (γ, δ) durch Transformation vermittelst einer beliebigen Substitution der zur Gleichung (A) gehörigen Gruppe hervorgegangen, eine solche sein, für welche z unbestimmt wird. Es müssen daher die durch Transformation vermittelst der Substitutionen der zur Gleichung (A) gehörigen Gruppe aus (γ, δ) hervorgegangenen Stellen der Fläche (B) nur in endlicher Anzahl vorhanden sein, woraus wieder nach Satz II Nr. 3 die algebraische Integrirbarkeit der Gleichung (A) folgen würde. — Sind überhaupt keine Werthe (γ, δ) vorhanden, für welche das Integral H unendlich wird, dann giebt es auch keine Stelle in der Fläche (B), in welcher z unbestimmt wird, so dass z eine rationale Function von (η, ζ), also wiederum Gleichung (A) algebraisch integrirbar.

Hiermit ist der Satz, dass für $n > 2$ die Gleichung (A) algebraisch integrirbar ist, bewiesen.

In der folgenden Nummer wollen wir eine zweite auf anderen Principien beruhende Methode angeben, um aus der Gleichung (α) die algebraische Integrirbarkeit der Gleichung (A) herzuleiten. Obgleich diese zweite Methode bei weitem schneller zum Ziele führt, so haben wir doch geglaubt, die in den Nr. 1 bis 4 entwickelte Methode nicht unterdrücken zu dürfen, da die Principien, auf welche sie sich stützt, auch weiterer Anwendungen fähig erscheinen.

5.

Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in Gleichung (A) $p = 0$ ist. Wenn dieses nicht stattfindet, so kann dasselbe durch die Substitution $y = e^{-\frac{1}{3}\int p\,dz} \cdot v$ erreicht werden, ohne dass hierdurch die Coefficienten der Relation zwischen dem Fundamentalsystem v_1, v_2, v_3, welches y_1, y_2, y_3 entspricht, von denen der Gleichung (B) abweichend werden.

Wir haben alsdann

$$(1) \qquad \Omega\Theta = 1.$$

Bilden wir aus Gleichung (β) unter Berücksichtigung von (α) $\frac{dy_1}{dz}, \frac{d^2y_1}{dz^2}, \frac{d^3y_1}{dz^3}$ und setzen diese Werthe sowie den Werth von y_1 aus (β) in die Gleichung (A), so erhalten wir

$$A_0 KD_\eta [KD_\eta (KD_\eta L)] + A_2 KD_\eta L + A_3 L = 0 , \tag{2}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= \Omega^2 - \frac{1}{\Theta^2} \\ A_2 &= 2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + q \\ A_3 &= \Theta^{(3)} + q\Theta' + r\Theta , \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wenn wir die Ableitungen von Θ nach z mit oberen Indices, und die Ableitungen von K und L nach η mit dem Zeichen D_η angeben.

Es können zwei Fälle eintreten:

I. Entweder wird die Gleichung (2) nicht identisch für die unabhängigen Variablen z, η erfüllt, dann ist durch diese Gleichung eine Abhängigkeit zwischen diesen Variablen gegeben, und da diese Abhängigkeit eine algebraische ist, so folgt, dass die Gleichung (A) algebraisch integrirbar ist.

II. Es könnte aber auch die Gleichung (2) für die unabhängigen Variablen z, η identisch erfüllt sein. Dann sind aber auch diejenigen Gleichungen, welche aus (2) durch Differentiation nach einer dieser Variablen erhalten werden, in demselben Sinne identisch erfüllt.

Dividiren wir demnach die Gleichung (2) durch A_0 und differentiiren alsdann zweimal nach z, so wird identisch für z und η

$$\left\{\begin{aligned} D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right) KD_\eta L + D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right) \cdot L = 0 \\ D_z^2\left(\frac{A_2}{A_0}\right) KD_\eta L + D_z^2\left(\frac{A_3}{A_0}\right) \cdot L = 0 ; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

demnach ist entweder

$$\frac{A_2}{A_0} = \gamma_1 , \quad \frac{A_3}{A_0} = \gamma_2 \tag{5}$$

wo γ_1, γ_2 von z unabhängig, oder es ist die Determinante der Functionen $D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right)$, $D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right)$, d. h.[1]

$$D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right) = \lambda D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right) \tag{6}$$

[1] Borchardt's Journal B. 66 S. 128.

wo λ von z unabhängig, und gemäss der ersten der Gleichungen (4)

(6a) $$KD_r L = -\lambda L.$$

Multipliciren wir die Gleichung (6a) mit Ω und berücksichtigen die Gleichung (α), so folgt

(7) $$D_z L = -\frac{\lambda L}{\Theta},$$

woraus sich ergiebt

(8) $$L = e^{-\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}$$

und nach Gleichung (β)

(8a) $$y_1 = \Theta e^{-\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}.$$

Im Falle, dass die Gleichungen (5) erfüllt sind, folgt aus (2)

(9) $$KD_r[KD_r(KD_r L)] + \gamma_1 KD_r L + \gamma_2 L = 0$$

Nach Gleichung (α) und nach Gleichung (1) ist (9) gleichbedeutend mit

(9a) $$\Theta D_z[\Theta D_z(\Theta D_z L)] + \gamma_1 \Theta D_z L + \gamma_2 L = 0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch

(10) $$L = e^{\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}$$

wo λ eine Constante ist, welche durch die Gleichung

(11) $$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 = 0$$

bestimmt wird.

Wenn wir in (9a)

$$L = \frac{y_1}{\Theta}$$

substituiren, so erhalten wir für y_1

(12) $$\frac{d^3 y_1}{dz^3} + \left[-2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} + \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + \frac{\gamma_1}{\Theta^2}\right]\frac{dy_1}{dz}$$
$$+ \left\{-\frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + 2\frac{\Theta'}{\Theta}\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^3}{\Theta^3} - \gamma_1\frac{\Theta'}{\Theta^3} + \frac{\gamma_2}{\Theta^3}\right\} y_1 = 0.$$

Aus den Gleichungen (5) folgt aber:

(13) $$-2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} + \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + \frac{\gamma_1}{\Theta^2} = q$$

(14) $$-\frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + 2\frac{\Theta'}{\Theta}\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^3}{\Theta^3} - \gamma_1\frac{\Theta'}{\Theta^3} + \frac{\gamma_2}{\Theta^3} = r.$$

Demnach ist Gleichung (12) gleichbedeutend mit Gleichung (A) für $y = y_1$, also wird die Gleichung (A) befriedigt durch

$$(15) \qquad y_1 = \Theta e^{\lambda \int \frac{dz}{\Theta}},$$

wo λ eine Wurzel der Gleichung (11).

Aus den Gleichungen (8a) und (15) ergeben sich Integrale der Gleichung (A), deren Zweige bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, und wir könnten hieraus unmittelbar nach dem Satze in Nr. 2 folgern, dass Gleichung (A) algebraisch integrirbar sei. Wir können aber dieses hier auch direct nachweisen.

Zunächst ergiebt sich für den Fall der Gleichung (6) aus dieser Gleichung

$$(16) \qquad \frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + q\frac{\Theta'}{\Theta} + r = \frac{\lambda}{\Theta}\left[2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + q\right] + \frac{\mu}{\Theta^3}$$

wo μ eine neue Constante. Aus derselben ziehen wir den Schluss, dass Θ eine rationale Function, und dass daher die Gleichung (8a) ein Integral der Gleichung (A) liefert, dessen logarithmische Ableitung rational, was mit der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (A) unverträglich ist.

Im Falle der Gleichungen (5) ergeben die Gleichungen (13), (14), wenn γ_1, γ_2 beide von Null verschieden sind, dass Θ eine rationale Function von z, und die Gleichung (15) liefert wiederum ein Integral der Gleichung (A), dessen logarithmische Ableitung rational.

Die Grösse γ_2 kann nicht verschwinden, da sonst die Gleichung (A) durch Θ, d. h. durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt würde. Es könnte aber $\gamma_1 = 0$ sein. Alsdann hat die Gleichung (A) die Integrale

$$(17) \qquad y_1 = \Theta e^{\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}, \quad y_2 = \Theta e^{\lambda\varepsilon \int \frac{dz}{\Theta}}, \quad y_3 = \Theta e^{\lambda\varepsilon^2 \int \frac{dz}{\Theta}}$$

wo λ der Gleichung

$$(11a) \qquad \lambda^3 + \gamma_2 = 0$$

genügt, und wo ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Die drei Integrale y_1, y_2, y_3 bilden ein Fundamentalsystem.

Aus der zweiten der Gleichungen (5) oder aus

$$A_3 = \gamma_2 A_0$$

folgt

$$(18) \qquad \frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + q\frac{\Theta'}{\Theta} + r = \frac{\gamma_2}{\Theta^3}.$$

Demnach ist Θ^3 eine rationale Function, woraus sich ergiebt, dass die Integrale y_1, y_2, y_3 für alle Umläufe der Variablen z, bis auf constante Factoren, sich nur unter einander vertauschen. In der That ist auch

$$(19) \qquad y_1 y_2 y_3 = \Theta^3.$$

Wir sind also wieder auf die Gleichung (12a) Nr. 2 gekommen, wenn wir $\psi = \Theta^3$ setzen. Sei

$$(20) \qquad u_1 = \frac{\lambda}{\Theta} + \frac{\Theta'}{\Theta}, \quad u_2 = \frac{\lambda\varepsilon}{\Theta} + \frac{\Theta'}{\Theta}.$$

so ist nach Gleichung (14a) Nr. 2

$$(21) \qquad u_2 + u_1 = \frac{d\log\Theta^2}{dz}.$$

Hieraus folgt

$$(22) \qquad \lambda\frac{(1+\varepsilon)}{\Theta} = 0,$$

also $\lambda = 0$, d. h. nach Gleichung (11a), $\gamma_2 = 0$, was nicht möglich ist.

Demnach ist der oben mit II. bezeichnete Fall, dass die Gleichung (2) identisch für die unabhängigen Variablen z, η erfüllt sei, mit den über Gleichung (A) gemachten Voraussetzungen unverträglich. Es ist demnach nur der mit I. bezeichnete Fall zulässig, d. h. die Gleichung (A) ist algebraisch integrirbar.



Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen.

Von R. Lipschitz.

(Vorgelegt am 1. Mai [s. oben S. 429].)

Die Untersuchungen über die gleichzeitige Transformation von zwei quadratischen Formen, welche in dem Aufsatze: Beitrag zu der Theorie des Hauptaxenproblems (Abhandlungen der Akademie v. J. 1873) entwickelt sind, beabsichtige ich gegenwärtig in doppelter Hinsicht auszudehnen.

In der früheren Arbeit, bei welcher die eine der zu transformirenden Formen gleich dem Aggregat der Quadrate der Variabeln angenommen ist, habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass sich die Fälle, in denen die Anzahl der Variabeln gleich Zwei, Drei oder Vier ist, insofern auszeichnen, als die dem betreffenden Transformationsproblem zugeordnete charakteristische Gleichung algebraisch aufgelöst werden kann. Nun gelten für die Wurzeln dieser Gleichung oder für lineare Verbindungen derselben gewisse Systeme von partiellen Differentialgleichungen, welche für die Anzahl Zwei oder Drei der Variabeln in der Arbeit abgeleitet und erörtert sind. Mit diesen Systemen von partiellen Differentialgleichungen werde ich mich jetzt noch einmal beschäftigen, indem ich, von einem anderen Gesichtspunkte ausgehend, dem auf die Anzahl Drei bezüglichen System eine sehr einfache neue Gestalt gebe, und das bisher noch nicht entwickelte der Anzahl Vier entsprechende System in einer ebenso durchsichtigen Anordnung darstelle. Eine zweite Erweiterung der Betrachtung entsteht dadurch, dass die gleichzeitige Transformation von zwei bilinearen Formen zu Grunde gelegt wird, von denen die eine gleich dem Aggregat der Producte von je zwei Variabeln, die andere alternirend ist.

Die zu diesem Transformationsproblem gehörende charakteristische Gleichung erlaubt eine Behandlung, welche der bei dem ersten Problem angewendeten ähnlich ist, und führt zu der Auffindung von correspondirenden Eigenschaften der Wurzeln der betreffenden Gleichung.

Erste Abtheilung.

1.

Der bequemeren Übersicht wegen beginne ich mit einer Zusammenstellung der Grundzüge der erwähnten früheren Arbeit, die ich bei Anführungen mit B. H. bezeichnen werde.

Für die n Variabeln x_a, wo der Zeiger a, wie auch im Folgenden $b, c, \ldots k$ die Zahlen von 1 bis n durchläuft, sei die quadratische Form $\sum_{a,b} p_{a,b}\, x_a x_b$ gegeben, bei welcher $p_{a,b} = p_{b,a}$ ist. Gleichzeitig mit dieser Form wird die Summe der Quadrate $\sum_a x_a^2$ vermittels einer linearen Substitution transformirt, in der die neuen Variabeln ξ_k durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \xi_k = \alpha_1^{(k)} x_1 + \alpha_2^{(k)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{(k)} x_n$$

ausgedrückt sind. Durch Zuziehung einer beliebig veränderlichen Grösse s wird das Ergebniss der Transformation in der Gleichung

$$(2)\qquad s\sum_a x_a^2 + \sum_{a,b} p_{a,b}\, x_a x_b = \sum_k (s + A_k)\, \xi_k^2$$

dargestellt. Die Determinante der auf der linken Seite befindlichen quadratischen Form der Variabeln x_a, die für das Transformationsproblem charakteristisch ist, liefert die nach den Potenzen von s geordnete Entwickelung

$$(3)\qquad \Gamma(s) = s^n + G_1 s^{n-1} + G_2 s^{n-2} + \ldots + G_n;$$

hier ist $G_1 = \sum_a p_{a,a}$, G_n gleich der Determinante $|p_{a,b}|$; die in (2) auftretenden Grössen A_k werden durch die Zerlegung in einfache Factoren

$$(4)\qquad \Gamma(s) = (s + A_1)(s + A_2)\ldots(s + A_n)$$

bestimmt. Bekanntlich sind für jedes System von reellen Coefficienten $p_{a,b}$ die Grössen A_k ebenfalls reell und die Substitutionscoefficienten $\alpha_a^{(k)}$ desgleichen. Im Folgenden werden die $\frac{n(n+1)}{2}$ Coefficienten $p_{a,b}$ als ein

System von unabhängigen Variabeln angesehen, von welchen die n sämmtlich unter einander verschiedenen Grössen A_k abhängen. Unter dieser Voraussetzung sind die Substitutionscoefficienten $\alpha_a^{(k)}$ bis auf ein System von positiven oder negativen Einheiten vollständig bestimmt. Jacobi hat in der Abhandlung: De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis etc., Journal f. Mathematik Bd. 12, S. 1—69, und Werke, Bd. 3, S. 191—268, die Verbindungen von Substitutionscoefficienten $\alpha_b^{(k)}\alpha_c^{(k)}$ durch Zuziehung der betreffenden Wurzel $-A_k$ der Gleichung $\Gamma(s)=0$ rational ausgedrückt. Indem $\frac{d\Gamma(s)}{ds}=\Gamma'(s)$ gesetzt wird, finden sich im art. 10 der genannten Abhandlung die Darstellungen

$$(5)\qquad \alpha_b^{(k)}\alpha_b^{(k)}=\left(\frac{1}{\Gamma'(s)}\frac{\partial\Gamma(s)}{\partial p_{bb}}\right)_{s=-A_k}=\frac{\partial A_k}{\partial p_{bb}},$$

$$(6)\qquad \alpha_b^{(k)}\alpha_c^{(k)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma'(s)}\frac{\partial\Gamma(s)}{\partial p_{bc}}\right)_{s=-A_k}=\frac{1}{2}\frac{\partial A_k}{\partial p_{bc}},$$

wo b und c verschiedene Indices bedeuten. Hieraus folgen für die vollständige Variation der Grössen A_k in Bezug auf die $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Veränderlichen p_{bc} die Ausdrücke

$$(7)\qquad \delta A_k=\sum_{b,c}\alpha_b^{(k)}\alpha_c^{(k)}\delta p_{bc},$$

und

$$(8)\qquad \delta A_k=\left(\frac{\delta\Gamma(s)}{\Gamma'(s)}\right)_{s=-A_k}.$$

Die Gleichungen (8) entstehen auch auf dem Wege, dass aus (4) die Gleichung

$$(9)\qquad \frac{\delta\Gamma(s)}{\Gamma(s)}=\frac{\delta A_1}{s+A_1}+\frac{\delta A_2}{s+A_2}+\ldots+\frac{\delta A_n}{s+A_n}$$

geschlossen wird, deren linke Seite durch Partialbruchzerlegung die Gleichung

$$(10)\qquad \frac{\delta\Gamma(s)}{\Gamma(s)}=\sum_k\left(\frac{\delta\Gamma(s)}{\Gamma'(s)}\right)_{s=-A_k}\frac{1}{s+A_k}$$

ergibt.

Da aus (1) durch Erhebung auf das Quadrat die Gleichung

$$(11)\qquad \xi_k^2=\sum_{b,c}\alpha_b^{(k)}\alpha_c^{(k)}x_b x_c$$

hervorgeht, welche aus (7) erhalten werden kann, indem auf der linken Seite δA_k durch ξ_κ^2 und gleichzeitig auf der rechten δp_{bc} durch $x_b x_c$ ersetzt wird, so bleibt jede zwischen den Variationen δA_k und δp_{bc} bestehende Gleichung gültig, wenn man mit denselben die angegebene Substitution vornimmt. Die Ersetzung von δp_{bc} durch $x_b x_c$ in einem gegebenen Ausdruck wird durch Einschliessen des Ausdrucks in eine eckige Klammer [ ] angedeutet werden.

Die aus (2) folgenden bekannten Relationen

$$\sum_b \alpha_b^{(k)} \alpha_b^{(k)} = 1\,, \tag{12}$$

und, für zwei verschiedene Zeiger k und k',

$$\sum_b \alpha_b^{(k)} \alpha_b^{(k')} = 0\,, \tag{13}$$

liefern für die partiellen Differentialquotienten von $A^{(k)}$, oder beziehungsweise $A^{(k)}$ und $A^{(k')}$, die partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_b \frac{\partial A_k}{\partial p_{bb}} = 1\,, \tag{I}$$

$$\sum_b \frac{\partial A_k}{\partial p_{bb}} \frac{\partial A_{k'}}{\partial p_{bb}} = 0. \tag{II}$$

Ferner folgt aus den identischen Relationen

$$(\alpha_b^{(k)})^2 (\alpha_c^{(k)})^2 = (\alpha_b^{(k)} \alpha_c^{(k)})^2\,, \tag{14}$$

$$(\alpha_b^{(k)})^2 (\alpha_c^{(k)} \alpha_f^{(k)}) = (\alpha_b^{(k)} \alpha_c^{(k)})(\alpha_b^{(k)} \alpha_f^{(k)})\,, \tag{15}$$

$$(\alpha_b^{(k)} \alpha_e^{(k)})(\alpha_c^{(k)} \alpha_f^{(k)}) = (\alpha_b^{(k)} \alpha_c^{(k)})(\alpha_e^{(k)} \alpha_f^{(k)}) \tag{16}$$

respective das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bb}} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{cc}} = \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bc}}\right)^2, \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bb}} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{cf}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bc}} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bf}}, \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{be}} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{cf}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{bc}} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A_k}{\partial p_{ef}}. \end{cases}$$

Überall, wo zwei verschiedene Buchstaben als Indices geschrieben sind, sollen dieselben verschiedene Zahlen bedeuten. Das System (III) enthält die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die mit $[\delta A_k]$ bezeichnete quadratische Form der Variabeln x_b gleich dem vollständigen Quadrat eines linearen Ausdrucks dieser Variabeln ist. Die auf einen beliebigen Werth von n bezüglichen

Gleichungen (I), (II), (III) sind in *B. H.* nicht ausdrücklich hervorgehoben.

Ich wende mich nun zu der Betrachtung der Fälle $n = 2, 3, 4$, in denen die Gleichung $\Gamma(s) = 0$ algebraisch auflösbar ist. Für die Annahme $n = 2$ sei

$$-D = G_1^2 - 4\,G_2\,, \tag{14}$$

dann hat man

$$A_k = \frac{G_1 + (-1)^{k-1}\sqrt{-D}}{2}\,, \tag{15}$$

und in Folge dessen

$$\delta A_k = \frac{\delta G_1 + (-1)^{k-1}\delta\sqrt{-D}}{2}\,. \tag{16}$$

Hieraus entstehen die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \delta A_1 + \delta A_2 = \delta G_1 \\ \delta A_1 - \delta A_2 = \delta\sqrt{-D}\,, \end{cases} \tag{17}$$

welche durch das vorhin definirte Substitutionsverfahren in die Gleichungen

$$\begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 = [\delta\sqrt{-D}] \end{cases} \tag{18}$$

übergehen. Indem die erstere mit der unbestimmten Grösse s multiplicirt und zu der zweiten addirt wird, ergiebt sich die Relation

$$(s+1)\,\xi_1^2 + (s-1)\,\xi_2^2 = s\,(x_1^2 + x_2^2) + [\delta\sqrt{-D}]. \tag{19}$$

Weil nun das Quadrat der in (1) enthaltenen Substitution gleich der Einheit ist, so folgt aus (19) nach Entwickelung des Ausdrucks $[\delta\sqrt{-D}]$ die Gleichung

$$s^2 - 1 = \begin{vmatrix} s + \dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{11}}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{12}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{12}}, & s + \dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{22}} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

welche in die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{11}} + \dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{22}} = 0 \\ \dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{11}}\,\dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{22}} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{12}}\right)^2 = -1 \end{cases} \tag{21}$$

zerfällt, die in B. H. art. 2 mit (5) bezeichnet sind.

Für den Fall $n = 3$ erhält man die Darstellung der Grössen A_1, A_2, A_3 durch Radicale, indem gesetzt wird

$$(22)\qquad \begin{cases} G_1^2 - 3G_2 = F \\ 2G_1^3 - 9G_1G_2 + 27G_3 = E \\ E^2 - 4F^3 = 27D, \end{cases}$$

ferner

$$(23)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{27D}\right)} = H \\ \sqrt[3]{\left(\frac{E}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{27D}\right)} = K \\ \qquad HK = F. \end{cases}$$

Mit Hülfe einer nicht reellen dritten Wurzel der Einheit ρ kommt dann

$$(24)\qquad A_k = \tfrac{1}{3}(G_1 + \rho^{k-1}H + \rho^{2k-2}K).$$

Für die Verbindungen H und K ist in B. H. art. 2, (17), (18), (19) ein System von partiellen Differentialgleichungen aufgestellt, das jetzt auf eine andere Weise ermittelt werden wird.

Aus (24) folgen für G_1, H, K die bekannten Ausdrücke

$$(25)\qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = G_1 \\ A_1 + \rho^2 A_2 + \rho A_3 = H \\ A_1 + \rho A_2 + \rho^2 A_3 = K. \end{cases}$$

Wenn man auf beiden Seiten die vollständigen Variationen nimmt, die Gleichung $G_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33}$ berücksichtigt, und wieder das obige Substitutionsverfahren anwendet, so entsteht das System von Gleichungen

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \xi_1^2 + \rho^2\xi_2^2 + \rho\xi_3^2 = [\delta H] \\ \xi_1^2 + \rho\xi_2^2 + \rho^2\xi_3^2 = [\delta K]. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste mit der veränderlichen Grösse s und addirt die zweite oder dritte, so kommt bez.

$$(27)\qquad (s+1)\xi_1^2 + (s+\rho^2)\xi_2^2 + (s+\rho)\xi_3^2 = s(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [\delta H],$$

$$(28)\qquad (s+1)\xi_1^2 + (s+\rho)\xi_2^2 + (s+\rho^2)\xi_3^2 = s(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [\delta K].$$

Aus dem bei $n = 2$ angeführten Grunde ist in beiden Gleichungen die charakteristische Determinante der linken gleich der der rechten Seite. Wenn daher

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_{bb}} = H_{bb}\,, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial H}{\partial p_{bc}} = H_{bc}\,, \qquad b \gtrless c, \\ \dfrac{\partial K}{\partial p_{bb}} = K_{bb}\,, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial K}{\partial p_{bc}} = K_{bc}\,, \qquad b \gtrless c, \end{cases}$$

gesetzt wird, so gelten die beiden Gleichungen

$$(30)\qquad s^3 + 1 = \begin{vmatrix} s+H_{11}, & H_{12}, & H_{13} \\ H_{21}, & s+H_{22}, & H_{23} \\ H_{31}, & H_{32}, & s+H_{33} \end{vmatrix},$$

$$(31)\qquad s^3 + 1 = \begin{vmatrix} s+K_{11}, & K_{12}, & K_{13} \\ K_{21}, & s+K_{22}, & K_{23} \\ K_{31}, & K_{32}, & s+K_{33} \end{vmatrix}.$$

Aus der ersten folgt das System von partiellen Differentialgleichungen für die Grösse H

$$(32)\quad \begin{cases} H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0 \\ H_{22}H_{33} + H_{23}^2 + H_{33}H_{11} - H_{31}^2 + H_{11}H_{22} - H_{12}^2 = 0 \\ \sum \pm H_{11}H_{22}H_{33} = 1, \end{cases}$$

und aus der zweiten ein genau ebenso gebildetes System für die partiellen Differentialquotienten der Grösse K. Durch bekannte Schlüsse erhält man ferner aus (27) eine gültige Gleichung, wenn auf der linken Seite statt der Form $\xi_1^2 + \rho^2\xi_2^2 + \xi_3^2$, und auf der rechten statt der Form $[\delta H]$ bez. die in den gleichen Variabeln geschriebene, durch die zugehörige Determinante dividirte adjungirte Form gesetzt wird. Die betreffenden Determinanten haben den Werth der positiven Einheit, was für die linke Seite evident ist, für die rechte aus der letzten Gleichung (32) folgt. Weil nun zu der Form $\xi_1^2 + \rho^2\xi_2^2 + \rho\xi_3^2$ die Form $\xi_1^2 + \rho\xi_2^2 + \rho^2\xi_3^2$ adjungirt ist, so folgt aus (27) die Gleichung:

$$(33)\quad (s+1)\,\xi_1^2 + (s+\rho)\,\xi_2^2 + (s+\rho^2)\,\xi_3^2 = s\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$+ (H_{22}H_{33} - H_{23}^2)\,x_1^2 + \ldots + 2\,(H_{31}H_{12} - H_{11}H_{23})\,x_2x_3.$$

Da die linke Seite mit der linken Seite von (28) identisch ist, so liefert die Vergleichung der rechten Seiten das System von partiellen Differentialgleichungen

$$(34)\quad \begin{cases} K_{11} = H_{22}H_{33} - H_{23}^2\,, & K_{22} = H_{33}H_{11} - H_{31}^2\,, & K_{33} = H_{11}H_{22} - H_{12}^2\,, \\ K_{23} = H_{31}H_{12} - H_{11}H_{23}\,, & K_{31} = H_{12}H_{23} - H_{22}H_{31}\,, & K_{12} = H_{23}H_{31} - H_{33}H_{12}\,, \end{cases}$$

durch welches die partiellen Differentialquotienten der Grösse K vermittelst der partiellen Differentialquotienten der Grösse H rational dargestellt werden. Wie man leicht sieht, folgt aus der Verbindung

von (32) und (34) das System von partiellen Differentialgleichungen für die Grössen K_{bc}, welches die Gestalt von (32) hat und nicht hingeschrieben ist. Offenbar könnte man aber auch statt (32) und (34) die beiden Systeme anwenden, welche aus diesen hervorgehen, indem überall H mit K vertauscht wird. Es lässt sich durch eine directe Überführung nachweisen, dass die in B. H. art. 2 mit (17), (18), (19) bezeichneten Systeme denselben Inhalt wie die obigen (32) und (34) haben. Diese beiden Systeme in Verbindung mit (7) und (24) bringen zur Evidenz, wie die neun Substitutionscoefficienten $\alpha_b^{(k)}$, welche von drei unabhängigen Elementen abhängen, mit Hülfe der sechs Grössen H_{bc} und den aus diesen nach (34) rational zusammengesetzten K_{bc} ausgedrückt werden; wegen der drei Gleichungen (32) bilden die sechs Grössen H_{bc} ein System, welches mit einem System von drei unabhängigen Elementen gleiche Bedeutung hat.

Um die partiellen Differentialgleichungen, welche in B. H. für die Functionen E und F entwickelt sind, in einer entsprechenden Umformung abzuleiten, kann man sich auf die aus (23) folgenden Gleichungen

$$(35)\qquad \begin{cases} H^3 + K^3 = E \\ HK = F \end{cases}$$

stützen, nach Vornahme der vollständigen Variation die Gleichungen

$$(36)\qquad \begin{cases} 3H^2[\delta H] + 3K^2[\delta K] = [\delta E] \\ K[\delta H] + H[\delta K] = [\delta F] \end{cases}$$

bilden, und hierauf die obigen Relationen (26) benutzen, was ich der Kürze halber nicht ausführe.

2.

Bei der Voraussetzung $n = 4$ haben die vier Wurzeln A_1, A_2, A_3, A_4 der biquadratischen Gleichung $\Gamma(-s) = 0$ Ausdrücke, welche so zusammengefasst werden können

$$(1)\qquad A_k = \frac{1}{4}\left(G_1 + (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} L + (-1)^{k-1} M + (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} N\right),$$

während L, M, N durch die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} L^2 + M^2 + N^2 = 3G_1^2 - 2^3 G_2 \\ L^2M^2 + L^2N^2 + M^2N^2 = 3G_1^4 - 2^4 G_1^2 G_2 + 2^4 G_1 G_3 + 2^4 G_2^2 - 2^6 G_4 \\ LMN = G_1^3 - 2^2 G_1 G_2 + 2^3 G_3 \end{cases}$$

bestimmt sind. Aus (1) entsteht das System von Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = G_1 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = L \\ A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = M \\ A_1 - A_2 - A_3 + A_4 = N, \end{cases}$$

welches durch Anwendung der Variation und Substitution die Relationen liefert

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 = [\delta L] \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 = [\delta M] \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2 = [\delta N]. \end{cases}$$

Indem nun wieder die erste Gleichung mit s multiplicirt, und die zweite, dritte oder vierte addirt wird, folgen bez. die Gleichungen

$$(5)\qquad (s+1)\xi_1^2 + (s+1)\xi_2^2 + (s-1)\xi_3^2 + (s-1)\xi_4^2 = s\sum_b x_b^2 + [\delta L],$$

$$(6)\qquad (s+1)\xi_1^2 + (s-1)\xi_2^2 + (s+1)\xi_3^2 + (s-1)\xi_4^2 = s\sum_b x_b^2 + [\delta M],$$

$$(7)\qquad (s+1)\xi_1^2 + (s-1)\xi_2^2 + (s-1)\xi_3^2 + (s+1)\xi_4^2 = s\sum_b x_b^2 + [\delta N].$$

In jeder dieser Gleichungen ist die charakteristische Determinante der linken und die der rechten Seite einander gleich. Gebraucht man die Bezeichnungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_{bb}} = L_{bb}, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial p_{bc}} = L_{bc}, & b \gtrless c \\ \dfrac{\partial M}{\partial p_{bb}} = M_{bb}, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M}{\partial p_{bc}} = M_{bc}, & b \gtrless c \\ \dfrac{\partial N}{\partial p_{bb}} = N_{bb}, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N}{\partial p_{bc}} = N_{bc}, & b \gtrless c, \end{cases}$$

so folgt aus (5) die Gleichung

$$(9)\qquad (s^2-1)^2 = \begin{vmatrix} s + L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14} \\ L_{21}, s + L_{22}, L_{23}, L_{24} \\ L_{31}, L_{32}, s + L_{33}, L_{34} \\ L_{41}, L_{42}, L_{43}, s + L_{44} \end{vmatrix},$$

und aus (6) oder (7) diejenige, in welche sich (9) verwandelt, indem statt L bez. M oder N geschrieben wird. Jede der drei Gleichungen liefert ein System von vier partiellen Differentialgleichungen, von denen das auf die Grösse L bezügliche das folgende ist

$$(10)\quad \begin{cases} L_{11} + L_{22} + L_{33} + L_{44} & = 0 \\ L_{11} L_{22} - L_{12}^2 + \ldots + L_{33} L_{44} - L_{34}^2 & = -2 \\ \sum \pm L_{22} L_{33} L_{44} + \ldots + \sum \pm L_{11} L_{22} L_{33} & = 0 \\ \sum \pm L_{11} L_{22} L_{33} L_{44} & = 1, \end{cases}$$

und die auf die Grössen M oder N bezüglichen in gleicher Weise gebildet sind. Für jede der quadratischen Formen $[\delta L]$, $[\delta M]$, $[\delta N]$ ist also die Determinante gleich der positiven Einheit. Aus jeder der Gleichungen (5), (6), (7) kann eine neue Gleichung abgeleitet werden, indem sowohl rechts als links statt der nicht in s multiplicirten quadratischen Form die in den gleichen Variabeln geschriebene, durch die zugehörige Determinante dividirte adjungirte Form gesetzt wird. Weil nun jede der vorkommenden Determinanten gleich $+1$ ist, und weil jede der drei Formen

$$\begin{gathered} \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2, \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2, \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2, \end{gathered}$$

mit der ihr adjungirten Form zusammenfällt, so bleibt bei dem angegebenen Verfahren die linke Seite von (5), (6), (7) ungeändert. Mithin muss auch für die rechte Seite das Gleiche gelten, und deshalb hat jede der drei Formen $[\delta L]$, $[\delta M]$, $[\delta N]$ die Eigenschaft, mit der eigenen adjungirten Form identisch zu sein.

Wenn ein System von n^2 quadratisch geordneten Grössen so beschaffen ist, dass jede derselben ihrem adjungirten Element gleich ist, so bilden bekanntlich diese n^2 Grössen die Coefficienten einer zur Transformation von n Quadraten in sich selbst geeigneten oder orthogonalen Substitution von der Determinante $+1$, und umgekehrt. Das hierfür charakteristische System von zehn rationalen Gleichungen bildet ein ferneres System von partiellen Differentialgleichungen für jede der Grössen L, M, N. Es stellt sich demnach heraus, dass die 16 Grössen L_{bc}, für welche die Gleichungen $L_{bc} = L_{cb}$ bestehen, ein System ausmachen, das zugleich orthogonal und symmetrisch ist, und dessen Determinante noch (10) gleich $+1$ ist. Das Gleiche gilt von den Grössen M_{bc} oder N_{bc}.

Für den Fall $n = 3$ hat die im vorigen Artikel enthaltene Erörterung gezeigt, dass nach (34) die sechs Grössen K_{bc} rationale ganze Functionen der sechs Grössen H_{bc} sind, und dass in derselben Weise auch die letzteren durch die ersteren ausgedrückt werden können. In dem gegenwärtig vorliegenden Falle haben die drei Systeme von je zehn Grössen L_{bc}, M_{bc}, N_{bc} eine solche gegenseitige Beziehung, dass

je zwei Systeme ausreichen, um die Individuen des dritten als rationale ganze Functionen darzustellen.

Wie bekannt, folgt aus dem System (1) des art. 1 durch Auflösung ein System von Gleichungen, das für $n=4$ durch die Gleichung

$$\alpha_b^{(1)}\xi_1+\alpha_b^{(2)}\xi_2+\alpha_b^{(3)}\xi_3+\alpha_b^{(4)}\xi_4=x_b \tag{11}$$

repräsentirt wird. Ferner erhält man durch partielle Differentiation der zweiten, dritten oder vierten Gleichung in (4) nach x_b bez. die Ergebnisse

$$\alpha_b^{(1)}\xi_1+\alpha_b^{(2)}\xi_2-\alpha_b^{(3)}\xi_3-\alpha_b^{(4)}\xi_4=L_{b1}x_1+L_{b2}x_2+L_{b3}x_3+L_{b4}x_4, \tag{12}$$

$$\alpha_b^{(1)}\xi_1-\alpha_b^{(2)}\xi_2+\alpha_b^{(3)}\xi_3-\alpha_b^{(4)}\xi_4=M_{b1}x_1+M_{b2}x_2+M_{b3}x_3+M_{b4}x_4, \tag{13}$$

$$\alpha_b^{(1)}\xi_1-\alpha_b^{(2)}\xi_2-\alpha_b^{(3)}\xi_3+\alpha_b^{(4)}\xi_4=N_{b1}x_1+N_{b2}x_2+N_{b3}x_3+N_{b4}x_4. \tag{14}$$

Wird in (11) und (13) statt b der Buchstabe c gesetzt, mit L_{bc} multiplicirt und nach c summirt, so kommt

$$\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(1)}\xi_1+\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(2)}\xi_2+\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(3)}\xi_3+\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(4)}\xi_4=\sum_c L_{bc}x_c, \tag{15}$$

$$\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(1)}\xi_1-\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(2)}\xi_2+\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(3)}\xi_3-\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(4)}\xi_4= \tag{16}$$
$$\sum_c L_{bc}M_{c1}x_1+\sum_c L_{bc}M_{c2}x_2+\sum_c L_{bc}M_{c3}x_3+\sum_c L_{bc}M_{c4}x_4.$$

Weil aber die rechte Seite von (15) mit der rechten von (12) übereinstimmt, so folgen durch Vergleichung der linken Seite die Gleichungen

$$\sum_c L_{bc}\alpha_c^{(1)}=\alpha_b^{(1)},\quad \sum_c L_{bc}\alpha_c^{(2)}=\alpha_b^{(2)},\quad \sum_c L_{bc}\alpha_c^{(3)}=-\alpha_b^{(3)},\quad \sum_c L_{bc}\alpha_c^{(4)}=-\alpha_b^{(4)}; \tag{17}$$

durch Anwendung derselben geht die linke Seite von (16) in den Ausdruck

$$\alpha_b^{(1)}\xi_1-\alpha_b^{(2)}\xi_2-\alpha_b^{(3)}\xi_3+\alpha_b^{(4)}\xi_4 \tag{18}$$

über, welcher mit der linken Seite von (14) identisch ist. Es muss also auch die rechte Seite von (16) mit der rechten von (14) zusammenfallen, und dies zieht die Relationen nach sich

$$\sum_c L_{bc}M_{ce}=N_{be}, \tag{19}$$

durch welche die Grössen N_{be}, der gemachten Behauptung entsprechend, als bilineare Functionen der Grössen L_{bc} und M_{ce} ausgedrückt werden. Zugleich leuchtet ein, dass sich in entsprechender Weise jedes der drei Systeme mit Hülfe der beiden anderen ausdrücken lässt.

Es bleibt jetzt noch ein Umstand zu erledigen. Nach der Natur des in (2) des art. 1 ausgesprochenen Transformationsproblems hängen die n^2 Substitutionscoefficienten $\alpha_a^{(k)}$ von $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Elemen-

ten, also für $n=4$ die sechszehn Substitutionscoefficienten von sechs unabhängigen Elementen ab. In Folge von (7) des art. 1, ferner von (3) und (9) des gegenwärtigen Artikels werden diese sechszehn Substitutionscoefficienten mit Hülfe von zwei Systemen der eingeführten partiellen Differentialquotienten, etwa L_{bc} und M_{bc}, dargestellt, indem die Individuen des dritten Systems als rationale ganze Functionen von den Individuen der beiden ersten erscheinen. Es erhebt sich nun die Frage, von welcher Anzahl von unabhängigen Elementen ein einziges dieser Systeme abhängt. Denn so lange man die Antwort nicht kennt, bleibt es ungewiss, ob nicht etwa ein einziges der drei Systeme zu der Bestimmung der sechszehn Substitutionscoefficienten genüge. Nach dem Vorhergehenden bilden die Individuen eines jeden der drei Systeme eine zur Transformation einer Summe von vier Quadraten in sich selbst dienende und zugleich symmetrische Substitution von der Determinante $+1$. Im Folgenden werde ich die Frage nach der Anzahl der vorhandenen unabhängigen Elemente auf alle Substitutionen ausdehnen, welche zur Transformation einer Summe von beliebig vielen Quadraten in sich selbst geeignet und symmetrisch sind. Im Eingange ist an die bekannte Thatsache erinnert worden, dass aus der Realität der Grössen p_{ab} die Realität der Wurzeln A_k der Gleichung $\Gamma(s)=0$ und der Substitutionscoefficienten $\alpha_a^{(k)}$ folge. In dem Falle $n=4$ zieht die Realität der Wurzeln A_k die Realität von L, M, N, und deshalb auch von den partiellen Derivirten L_{bc}, M_{bc}, N_{bc} nach sich. Bei der jetzt anzustellenden Untersuchung sollen complexe Bestandtheile nicht ausgeschlossen sein.

3.

Wenn n Variable x_b als homogene lineare Functionen von n Variabeln y_c, die letzteren als eben solche Functionen von n Variabeln z_e gegeben sind,

$$(1)\qquad x_b=\alpha_{b1}\,y_1+\alpha_{b2}\,y_2+\ldots+\alpha_{bn}\,y_n\,,$$

$$(2)\qquad y_c=\beta_{c1}\,y_1+\beta_{c2}\,z_2+\ldots+\beta_{cn}\,z_n\,,$$

so entsteht durch Zusammensetzung der betreffenden Substitutionen das System von Gleichungen

$$(3)\qquad x_b=\sum_c\alpha_{bc}\beta_{c1}\,z_1+\sum_c\alpha_{bc}\beta_{c2}\,z_2+\ldots+\sum_c\alpha_{bc}\beta_{cn}\,z_n\,.$$

Bei der besonderen Voraussetzung, dass die Substitution (2) mit (1) identisch ist, oder dass für die Coefficienten die Gleichungen

$$(4)\qquad \alpha_{ef}=\beta_{ef}$$

gelten, erhält (3) die Gestalt

$$(5)\qquad x_b = \sum_c \alpha_{bc}\alpha_{c1} z_1 + \sum_c \alpha_{bc}\alpha_{c2} z_2 + \dots + \sum_c \alpha_{\beta c}\alpha_{cn} z_n .$$

Ich werde jetzt ferner annehmenn, dass die Substitution (1) zur Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst geeignet, ausserdem symmetrisch sei,[1] und die Determinante $+1$ habe.

Dann hat man auf der rechten Seite von (5) die Coefficienten

$$(6)\qquad \sum_c \alpha_{bc}\alpha_{ce} = \sum_c \alpha_{bc}\alpha_{ec};$$

weil aber bekanntlich die Summe $\sum_c \alpha_{bc}\alpha_{ec}$ unter den vorliegenden Bedingungen gleich der positiven Einheit oder der Null ist, je nachdem $b = e$ oder von e verschieden ist, so geht (5) in das System von Gleichungen

$$(7)\qquad x_b = z_b$$

über. Eine Substitution der angegebenen Beschaffenheit hat demnach die Eigenschaft, sobald sie zwei Mal nach einander angewendet wird, die identische Substitution hervorzubringen.

Die Frage nach der Anzahl von unabhängigen Elementen, welche in einer Substitution α_{bc} der bezeichneten Art enthalten sind, lässt sich mit Hülfe der Grundsätze beantworten, welche ich in der Schrift: Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn, 1886, entwickelt habe. In dem Abschnitt III, Transformation einer Summe von beliebig vielen Quadraten in sich selbst für das Gebiet der einfach complexen Grössen, werden, wie im vorliegenden Falle, solche Substitutionen betrachtet, deren Coefficienten aus zwei unabhängigen reellen Bestandtheilen und den Einheiten 1 und $\sqrt{-1}$ gebildet, oder, nach dem dort angewendeten Sprachgebrauch, einfach complexe Grössen sind. Nach den art. 3 und 4 von S. Q. Abschnitt III gehört zu jeder obigen Substitution (1), welche die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

erfüllt, und die Determinante $+1$ hat, ein regulärer bicomplexer Ausdruck der $n$ten Ordnung. Ich werde ihn mit Φ bezeichnen und vermittelst der dort definirten Primitivzeichen $k_1, k_2, \dots k_n$ und der einfach complexen Bestandtheile $\phi_0, \phi_{12}, \dots \phi_{1234}, \dots$ so darstellen

$$(8)\qquad \Phi = \phi_0 + k_1 k_2 \phi_{12} + \dots + k_1 k_2 k_3 k_4 \phi_{1234} + \dots .$$

[1] Vergl. FR. PRYM: Untersuchungen über die RIEMANN'sche Thetaformel und die RIEMANN'sche Charakteristikentheorie. V. Über ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen.

Wenn dann zu der Substitution (2), welche die Gleichung

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$$

befriedigen und ebenfalls die Determinante + 1 haben möge, der reguläre bicomplexe Ausdruck

$$\Omega = \omega_0 + k_1 k_2 \omega_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \omega_{1234} + \ldots \tag{9}$$

gehört, und wenn die symbolischen Ausdrücke

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n \\ Y = y_1 + k_1 k_2 y_2 + \ldots + k_1 k_n y_n \\ Z = z_1 + k_1 k_2 z_2 + \ldots + k_1 k_n z_n \end{array} \right. \tag{10}$$

gebildet werden, so lassen sich die obigen Systeme (1) und (2) beziehungsweise durch die symbolischen Gleichungen

$$\Phi X = Y \Phi_1 , \tag{11}$$

$$\Omega Y = Z \Omega_1 , \tag{12}$$

zusammenfassen, wo $\Phi_1 = - k_1 \Phi k_1$, $\Omega_1 = - k_1 \Omega k_1$ ist, während das aus der Zusammensetzung von (1) und (2) hervorgehende System (3) durch die Gleichung

$$\Omega \Phi X = Z \Omega_1 \Phi_1 \tag{13}$$

dargestellt wird: der Zusammensetzung der Substitutionen (1) und (2) entspricht hier die Multiplication der zugeordneten regulären bicomplexen Ausdrücke.

Das in S. Q. Abschnitt III, art. 3 auseinandergesetzte Verfahren zeigt, dass, wenn die obige Substitution (1) in die identische Substitution übergeht, der zugehörige reguläre bicomplexe Ausdruck sich in eine einfach complexe Grösse zusammenzieht, welche willkürlich bleibt, und nur die einzige Bedingung erfüllen muss, von Null verschieden zu sein. Ich lasse jetzt die in (4) enthaltene Annahme eintreten, dass die Substitution (2) mit (1) identisch sei. In Folge dessen wird auch

$$\Phi = \Omega . \tag{14}$$

Weil nun aus der getroffenen Voraussetzung das System (7) hervorgeht, d. h. die x_h mit den z_h durch die identische Substitution zusammenhängen, so entspricht dem System (7) die Gleichung

$$X = Z . \tag{15}$$

Andererseits geht (13) durch Anwendung von (14) in die Gleichung

$$\Phi \Phi X = Z \Phi_1 \Phi_1 \tag{16}$$

über, welche durch Verbindung mit (15) die Gleichung

$$\Phi \Phi = r \tag{17}$$

hervorbringt, in der r eine von Null verschiedene einfach complexe Grösse bedeutet. Ein regulärer bicomplexer Ausdruck Φ, welcher zu einer Substitution (1) gehört, die eine Summe von n Quadraten in sich selber transformirt, die Determinante $+1$ hat, und symmetrisch ist, muss somit die Eigenschaft haben, mit sich selber multiplicirt, gleich einer von Null verschiedenen einfach complexen Grösse zu sein. Auch ergibt sich aus den angewendeten Methoden leicht, dass die aufgefundene Bedingung hinreichend ist. Es ist somit die gestellte Frage auf die andere zurückgeführt, von wie viel unabhängigen Elementen ein regulärer bicomplexer Ausdruck abhänge, dessen Quadrat gleich einer von Null verschiedenen einfach complexen Grösse ist.

Indem der zu Φ conjugirte reguläre bicomplexe Ausdruck durch Φ' bezeichnet wird,

$$(8^*) \qquad \Phi' = \phi_0 + k_2 k_1 \phi_{12} + \ldots + k_4 k_3 k_2 k_1 \phi_{1234} + \ldots$$

ist, folgt aus (17), da jede einfach complexe Grösse nach der vorliegenden Definition sich selbst conjugirt ist, die Gleichung

$$(18) \qquad \Phi' \Phi' = r.$$

Durch Multiplication von (17) und (18) erhält man

$$(19) \qquad \Phi' \Phi' \Phi \Phi = r^2.$$

Nach dem geltenden Associationsgesetz darf das Product der beiden mittleren Factoren $\Phi'\Phi$ zusammengefasst werden, und dasselbe ist gleich der Norm des regulären bicomplexen Ausdrucks Φ

$$(20) \qquad N(\Phi) = \phi_0^2 + \phi_{12}^2 + \ldots + \phi_{1234}^2 + \ldots,$$

einer von Null verschiedenen einfach complexen Grösse. Aus diesem Grunde kann dieses Product $\Phi'\Phi$ bei der Bildung der linken Seite von (19) eine beliebige andere Stelle erhalten, wodurch die linke Seite gleich dem Quadrat der Norm $N(\Phi)$ wird. Es folgt daher aus (19) die Gleichung

$$(21) \qquad \big(N(\Phi)\big)^2 = r^2,$$

welche entweder

$$N(\Phi) = r$$

oder

$$N(\Phi) = -r.$$

d. h., indem $\varepsilon = \pm 1$ gesetzt wird,

$$(22) \qquad N(\Phi) = \varepsilon r$$

nach sich zieht. Indem in (18) beide Seiten rechts mit Φ multiplicirt werden, ergibt sich

$$(23) \qquad \Phi' N(\Phi) = r\Phi$$

und durch Anwendung von (22),

$$\Phi' \varepsilon r = r\Phi. \tag{23*}$$

Der von Null verschiedene einfach complexe Factor darf auf beiden Seiten fortgelassen werden, so dass, da $\varepsilon^2 = 1$ ist, die Relation

$$\Phi' = \varepsilon\Phi \tag{24}$$

entsteht.

Weil die Norm jedes regulären bicomplexen Ausdrucks eine von Null verschiedene einfach complexe Grösse ist, so kann aus der Gleichung (24) umgekehrt die ursprüngliche Gleichung (17) erschlossen werden. Mithin enthält auch die Gleichung (24) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die zu untersuchenden regulären bicomplexen Ausdrücke Φ.

In Folge der für die Primitivzeichen bestehenden Grundgleichungen

$$k_a^2 = -1, \quad k_a k_b = -k_b k_a \tag{25}$$

sind in Φ' und Φ die correspondirenden Bestandtheile einander gleich oder entgegengesetzt gleich, je nachdem die Anzahl der in dem betreffenden Summanden auftretenden Indices modulo 4 entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 2$ ist; der Bestandtheil ϕ_0 wird hierbei so angesehen, als ob für ihn die Anzahl der Indices gleich Null wäre. Zerlegt man jetzt die Gleichung (24) in die beiden

$$\Phi' = \Phi \tag{24*}$$

und

$$\Phi' = -\Phi, \tag{24**}$$

so leuchtet ein, dass für die erstere in Φ alle Summanden verschwinden müssen, bei denen die Anzahl der Indices $\equiv 2 \pmod{4}$ ist, und wenigstens einer der übrigen von Null verschieden sein muss, während für die zweite Gleichung in Φ alle Summanden verschwinden müssen, bei denen die Anzahl der Indices $\equiv 0 \pmod{4}$ ist, und gleichfalls wenigstens einer der übrigen nothwendig von Null verschieden ist.

Zuerst werde die Voraussetzung (24*) discutirt. Gesetzt es sei ϕ_0 von Null verschieden; dann müssen alle Bestandtheile mit zwei Zeigern, ϕ_{ab}, gleich Null sein. Weil aber alle übrigen Bestandtheile nach den Gesetzen gebildet werden, welche in S. Q. Abschnitt II, art. 2, angegeben sind, und von denen ich das folgende anführe

$$\phi_{1234} = \frac{\phi_{12}\phi_{34} + \phi_{13}\phi_{42} + \phi_{14}\phi_{23}}{\phi_0}, \tag{25*}$$

so werden diese sämmtlich gleich Null, und Φ reducirt sich auf das eine Glied ϕ_0. Wenn dagegen $\phi_0 = 0$, und ein Bestandtheil mit 2e

Indices nicht gleich Null ist, wo nach dem vorhin Gesagten ρ eine gerade Zahl sein muss, — so kann das folgende Verfahren benutzt werden. Beispielsweise sei der Bestandtheil ϕ_{abcd} von Null verschieden. Man setze nun

$$(26) \qquad k_d k_c k_b k_a \Phi = \Lambda ,$$

dann ist

$$(27) \qquad \Lambda = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots$$

wieder ein regulärer bicomplexer Ausdruck, in welchem der einfach complexe Bestandtheil $\lambda_0 = \phi_{abcd}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, wo

$$(27^*) \qquad \lambda_{ab} + \lambda_{ba} = 0$$

ist, und alle übrigen Bestandtheile $\lambda_{abcd}, \ldots$ nach den so eben angeführten Vorschriften durch λ_0 und die $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen λ_{ab} rational ausgedrückt sind. (Vergl. S. Q. Abschnitt II, art. 9 und Abschnitt III, art. 4.)

In Φ müssen die Bestandtheile verschwinden, für welche die Anzahl der Indices gleich $2\rho-2$, oder $2\rho+2$ ist, falls es solche gibt; und das letztere ist immer der Fall, ausser wenn $2\rho = n$ oder $n-1$ ist. Diejenigen Bestandtheile von Φ mit $2\rho-2$ Indices, bei welchen von der Gruppe a, b, c, d irgend ein Paar, z. B. a, b fortgelassen ist, liefern nach (27) einen Bestandtheil von Λ, welcher mit diesem Paar Indices versehen ist, also in dem gewählten Beispiel λ_{ab}. Wofern 2ρ weder gleich n noch gleich $n-1$ ist, mögen die Indices, welche mit der ersten Gruppe a, b, c, d zusammen alle Indices ausmachen, durch $a', b', c', d', \ldots$ bezeichnet werden. Dann wird aus einem Bestandtheil von Φ mit $2\rho+2$ Indices, welcher ausser den Zeigern a, b, c, d der ersten Gruppe noch zwei Individuen der anderen Gruppe, etwa a', b' enthält, wegen (27) ein Bestandtheil von Λ, welcher nur diese beiden Zeiger hat, also in dem Beispiel $\lambda_{a'b'}$. Der Ausdruck Λ ist durch rationale Operationen aus der von Null verschiedenen einfach complexen Grösse λ_0, und den $\frac{n(n-1)}{2}$ ebenfalls unabhängigen einfach complexen Grössen λ gebildet, die zwei Indices haben. Nach dem so eben Gesagten müssen alle diejenigen Grössen λ von zwei Indices gleich Null sein, bei denen die Indices entweder irgend einem Paar aus der ersten Gruppe a, b, c, d oder, falls 2ρ nicht gleich n oder $n-1$ ist, irgend einem Paar aus der zugehörigen zweiten Gruppe $a', b', c', d', \ldots$ gleich ist, welche mit der ersteren zusammen die n Zeiger erschöpft.

Es lässt sich nun zeigen, dass, sobald diese Bedingungen erfüllt sind, in Φ alle Bestandtheile verschwinden, bei welchen die Anzahl der Indices nicht gleich 2ρ ist. Indem man die vorhin angefangene Betrachtung fortsetzt, leuchtet ein, dass ein Bestandtheil von Φ, bei welchem aus der ersten Gruppe vier Zeiger fortgelassen sind, in A einen Bestandtheil mit diesen vier Zeigern der ersten Gruppe hervorbringt, und dass ein Bestandtheil von Φ, bei welchem zu den Zeigern der ersten Gruppe vier Zeiger der zweiten hinzugefügt sind, in A einen Bestandtheil erzeugt, welcher diese vier Zeiger der zweiten Gruppe enthält, u. s. f.

Bisher sind nur diejenigen Bestandtheile von Φ in's Auge gefasst worden, bei denen von der ersten Gruppe eine gerade Anzahl Indices fortgenommen oder zu der ersten Gruppe eine gerade Anzahl Indices der zweiten Gruppe hinzugefügt ist. Um alle Bestandtheile von Φ zu umfassen, ist jetzt auf die so eben besprochenen noch der Process anzuwenden, dass eine Anzahl Indices aus der ersten Gruppe durch die gleiche Anzahl aus der zweiten Gruppe ersetzt wird; hierbei ist auch der vorhin ausgeschlossene Fall mit aufzunehmen, bei dem $2\rho = n - 1$ ist, und die zweite Gruppe nur ein Individuum enthält. Hierbei wird die Anzahl der Indices der Bestandtheile von Φ nicht geändert. Weil aber sowohl dem Wegnehmen eines Zeigers der ersten Gruppe wie auch dem Zufügen eines Zeigers der zweiten Gruppe in Φ das Zufügen des betreffenden Zeigers in A entspricht, so gehört zu denjenigen Veränderungen in Φ, bei welchen die Anzahl der Indices dieselbe bleibt, ein Process in A, bei dem gleich viel Individuen aus jeder der beiden Gruppen hinzugefügt werden. Die Bestandtheile von A zerfallen in solche, bei denen die Anzahl der Indices aus der zweiten Gruppe kleiner, oder grösser als die Anzahl der Indices aus der ersten Gruppe, oder derselben gleich ist. Von diesen drei Kategorien liefert die erste, zweite oder dritte nach dem obigen Bestandtheile von Φ, die bez. weniger als 2ρ, mehr als 2ρ oder 2ρ Indices haben. Es handelt sich also darum, zu beweisen, dass in Folge der bestehenden Voraussetzungen, nämlich des Verschwindens aller λ_{ab}, $\lambda_{ac}, \dots$ mit je zwei Zeigern der ersten Gruppe, und aller $\lambda_{a'b'}, \lambda_{a'c'}, \dots$ mit je zwei Zeigern der zweiten Gruppe, alle Bestandtheile von A, die den beiden ersten Kategorien angehören, gleich Null sind. Man kann die Behauptung allgemein beweisen, indem man zeigt, dass, wenn sie für $2\nu - 2$ Zeiger richtig ist, sie auch für 2ν Zeiger gelten muss. Für zwei Zeiger ist sie deshalb richtig, weil die beiden Zeiger entweder der einen Gruppe oder der anderen Gruppe angehören müssen; denn wenn der eine aus der einen, der andere aus der anderen Gruppe genommen wird, so ist die Anzahl der Individuen

aus beiden Gruppen gleich, und der betreffende Bestandtheil von A gehört weder zu der ersten noch zu der zweiten, sondern zu der dritten Kategorie, und verschwindet deshalb nach der Voraussetzung.

Es mögen z. B. die gewählten 2ν Zeiger aus dreien der ersten Gruppe a, b, c und fünfen der zweiten a', b', c', d', e' bestehen. Dann wird nach S. Q. II, art. 2, (3) und (4) $\lambda_{abca'b'c'd'e'}$ durch die λ mit $2\nu - 2$ Zeigern so ausgedrückt

$$(28) \quad \lambda_0 \lambda_{abca'b'c'd'e'} = \lambda_{ab}\lambda_{ca'b'c'd'e'} + \lambda_{ac}\lambda_{a'b'c'd'e'b} + \lambda_{aa'}\lambda_{b'c'd'e'bc} + \lambda_{ab'}\lambda_{c'd'e'bca'} \\ + \lambda_{ac'}\lambda_{d'e'bca'b'} + \lambda_{ad'}\lambda_{e'bca'b'c'} + \lambda_{ae'}\lambda_{bca'b'c'd'}.$$

Hier verschwinden auf der rechten Seite die beiden ersten Summanden wegen der ersten Factoren $\lambda_{ab}, \lambda_{ac}$, die nach der Annahme gleich Null sind, dagegen die fünf übrigen Summanden wegen ihrer zweiten Factoren aus dem folgenden Grunde. Weil in jedem Product die sämmtlichen 2ν Zeiger vertreten sind, und weil der erste Factor ein Paar Indices hat, von denen der eine aus der ersten, der andere aus der zweiten Gruppe stammt, so fehlt bei den jetzt zu erörternden Producten in jedem zweiten Factor von $2\nu - 2$ Indices ein Individuum aus jeder Gruppe, mithin ist der Überschuss der Anzahl Individuen aus der einen über die Anzahl aus der anderen Gruppe genau so gross wie in der Gesammtheit der 2ν Zeiger, und alle in Rede stehenden zweiten Factoren müssen nach der getroffenen Annahme gleich Null sein. Es verschwindet also die ganze rechte Seite von (28) und daher, weil λ_0 von Null verschieden ist, der Bestandtheil $\lambda_{abca'b'c'd'e'}$. Eine gleiche Betrachtung kann in jedem Falle angestellt werden, und daher ist die gemachte Behauptung allgemein bewiesen.

Die Grössen λ mit zwei Zeigern, die von der so eben festgestellten Vorschrift, gleich Null zu sein, nicht betroffen werden, sind diejenigen, bei welchen ein Zeiger aus der ersten, der andere aus der zweiten Gruppe herrührt, und diese λ sind keiner Bedingung unterworfen. Da die erste Gruppe 2ρ, die zweite $n - 2\rho$ Zahlen umfasst, so ist die Anzahl der betreffenden Grössen λ gleich $2\rho(n - 2\rho)$. Zu diesen kommt die Grösse λ_0 hinzu, welche von Null verschieden sein muss; die Anzahl der unabhängigen einfach complexen Elemente, aus denen A rational gebildet wird, beträgt also $1 + 2\rho(n - 2\rho)$. Nach dem Obigen bleiben in A ausser λ_0 alle und nur diejenigen Bestandtheile bestehen, bei welchen die vorhandenen Indices aus der gleichen Anzahl Individuen der ersten wie der zweiten Gruppe bestehen. Die Gleichung (26) giebt dann die explicite Darstellung des gesuchten regulären bicomplexen Ausdrucks Φ, welcher die Gleichung (24*) befriedigt, und nur Bestandtheile mit 2ρ Indices enthält.

Um nun zweitens die Voraussetzung (24^{**}) zu erörtern, werde ein nicht verschwindender Bestandtheil von Φ mit 2ρ Zeigern, wo ρ eine ungerade Zahl ist, herausgehoben: derselbe sei beispielsweise ϕ_{abcdef}. Vermöge der Gleichungen

$$(29)\qquad k_f k_e k_d k_c k_b k_a \Phi = \Lambda\,,$$

$$(30)\qquad \Lambda = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots$$

ist dann Λ ein regulärer bicomplexer Ausdruck, in welchem der einfach complexe Bestandtheil $\lambda_0 = \phi_{abcdef}$ nicht gleich Null ist. Aus der Gleichung (24^{**}) folgt zunächst, dass in Φ die Bestandtheile mit $2\rho - 2$ und mit $2\rho + 2$ Zeigern, wofern letztere existiren, verschwinden müssen. Indem jetzt wieder aus den Zeigern a, b, c, d, e, f eine erste Gruppe, aus den übrigen Zeigern $a', b' \ldots$ eine zweite Gruppe gebildet wird, ergibt sich, wie vorhin, dass alle λ mit zwei Zeigern, die entweder nur aus der ersten oder nur aus der zweiten Gruppe entnommen sind, gleich Null sein müssen. Hieraus wird dann ferner in derselben Weise geschlossen, dass in Φ alle Bestandtheile, die weniger oder mehr als 2ρ Zeiger haben, fortfallen, und nur die mit 2ρ Zeigern bestehen bleiben. Ausser der von Null verschiedenen einfach complexen Grösse λ_0 bleiben dann in Λ diejenigen λ mit zwei Zeigern unbeschränkt, bei welchen je ein Zeiger aus je einer der beiden Gruppen genommen ist. Die Anzahl derselben ist gleich $2\rho(n - 2\rho)$. Mithin wird die Anzahl der unabhängigen Elemente, aus denen Λ, und in Folge von (39) auch Φ rational gebildet ist, in diesem, wie in dem ersten Falle, durch $1 + 2\rho(n - \rho)$ dargestellt; der Ausdruck Φ enthält dann nur Bestandtheile mit 2ρ Zeigern.

Aus (11) ergiebt sich für die Substitutionscoefficienten α_{bc} die folgende Bestimmung

$$(31)\qquad \begin{cases} \alpha_{1c} + k_1 k_2 \alpha_{2c} + \ldots + k_1 k_n \alpha_{nc} = \dfrac{\Phi' k_c \Phi k_1}{N(\Phi)}\,, \text{[illegible]} \\ N(\Phi) = \phi_0^2 + \phi_{12}^2 + \phi_{1234}^2 + \ldots \end{cases}$$

Da hiernach α_{bc} gleich einem Bruche ist, dessen Zähler und Nenner homogene Functionen des zweiten Grades der Bestandtheile ϕ_0, ϕ_{12}, $\phi_{1234} \ldots$ von Φ sind, so hängen die Substitutionscoefficienten nur von den Verhältnissen ab, in welchen die Bestandtheile von Φ zu irgend einem von Null verschiedenen Bestandtheile stehen. Weil nun bei den vorhin untersuchten Substitutionen die Anzahl der unabhängigen Elemente, von denen der zugehörige Ausdruck Φ abhängt, durch $1 + 2\rho(n - \rho)$ ausgedrückt ist, so hängen die Coefficienten der Substitution von $2\rho(n - \rho)$ unabhängigen einfach complexen Elementen auf rationale Weise ab. Falls die Substitutions-

coefficienten α_{hc} reelle Grössen sind, ist die angestellte Untersuchung auf das Gebiet der reellen Grössen zu verlegen, und es folgt dann aus den betreffenden in S. Q. Abschnitt II enthaltenen Sätzen, dass statt der bicomplexen regulären Ausdrücke der $n$ten Ordnung complexe reguläre Ausdrücke der $n$ten Ordnung auftreten, die in der angegebenen Weise aus der gefundenen Zahl von reellen Elementen gebildet werden.

Die Zahl 2ρ der Primitivzeichen, welche in den aufgestellten bicomplexen Ausdrücken Φ eine entscheidende Rolle spielt, macht sich bei der zugehörigen Substitution auf eine andere Art geltend. In S. Q. Abschnitt III, art. 4 ist darauf hingewiesen, dass der Inhalt von Abschitt II, art. 8 von den regulären complexen auch auf die regulären bicomplexen Ausdrücke übertragen werden kann; ich werde das dortige Hauptresultat in der Anwendung auf die regulären bicomplexen Ausdrücke sogleich anführen. Vorher bemerke ich, dass in der Ableitung von Abschnitt II, art. 8 ein Ausdruck Λ vorausgesetzt ist, bei dem λ_0 einen von Null verschiedenen Werth hat. Man kann sich indessen durch einen directen Übergang vergewissern, dass es gestattet ist, statt des Ausdrucks Λ von dieser Beschaffenheit irgend einen regulären Ausdruck zu supponiren. Indem ich also statt Λ einen regulären bicomplexen Ausdruck Φ einführe, erhält die Gleichung (16) in S. Q. Abschnitt II, art. 8 die folgende Gestalt. Mit n beliebigen veränderlichen Grössen $s_1, s_2, \dots s_n$ sei die Determinante gebildet

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+s_1, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}+s_2, \dots \alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots \alpha_{nn}+s_n \end{vmatrix} = D(s_1, s_2, \dots s_n).$$

Ferner sei

$$(33)\qquad \Phi\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}, \dots \frac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\right) = \phi_0 + k_1 k_2 \frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}} \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}} \phi_{12}$$
$$+ \dots + \frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}} \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}} \frac{\sqrt{s_3-1}}{\sqrt{s_3+1}} \frac{\sqrt{s_4-1}}{\sqrt{s_4+1}} \phi_{1234} + \dots$$

$$(34)\qquad N\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}, \dots \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\right)\right) = \phi_0^2 + \frac{s_1-1}{s_1+1} \frac{s_2-1}{s_2+1} \phi_{12}^2$$
$$+ \dots + \frac{s_1-1}{s_1+1} \frac{s_2-1}{s_2+1} \frac{s_3-1}{s_3+1} \frac{s_4-1}{s_4+1} \phi_{1234}^2 + \dots$$

Dann gilt die Gleichung

$$(35)\qquad N(\Phi)\, D(s_1, s_2, \dots s_n)$$
$$= (s_1+1)(s_2+1)\dots(s_n+1)\, N\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}, \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}, \dots \frac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\right)\right).$$

In den oben bestimmten bicomplexen Ausdrücken Φ sind nur solche Bestandtheile vorhanden, bei denen die Anzahl der Zeiger gleich einer gegebenen Zahl 2ρ ist. In Folge dessen reducirt sich die Norm $N(\Phi)$ nach (31) auf das Aggregat der Quadrate dieser Bestandtheile, ferner die Norm $N\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{s_1}-1}{\sqrt{s_1}+1}, \ldots \frac{\sqrt{s_n}-1}{\sqrt{s_n}+1}\right)\right)$ nach (34) auf das Aggregat von Producten, bei denen der zweite Factor eines der genannten Quadrate, der erste Factor ein Bruch ist, der im Zähler 2ρ aus $s_1, s_2, \ldots$ und der Einheit gebildete Differenzen, im Nenner 2ρ ebenso gebildete Summen enthält. Ich mache jetzt die Annahme, dass $s_1 = s_2 \ldots = s_n = s$ sei; dann werden die bezeichneten ersten Factoren einander gleich, mithin tritt in (35) die nothwendig von Null verschiedene Norm $N(\Phi)$ auf beiden Seiten als Factor heraus, und es entsteht für die Determinante $D(s, s \ldots s)$ die Gleichung

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + s \,.\, \alpha_{12} \,.\, \ldots \,.\, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22} + s, \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots \alpha_{nn} + s \end{vmatrix} = (s-1)^{2\rho}(s+1)^{n-2\rho}.$$

Die hiermit ausgedrückte Eigenschaft der auf der linken Seite befindlichen charakteristischen Determinante folgt übrigens schon allein aus dem oben hervorgehobenen Umstande, dass die betreffende Substitution, zwei Mal nach einander angewendet, die identische hervorbringt. Der allgemeine Satz, der dies ergibt, ist von Hrn. Camille Jordan in dem Mémoire sur les équations différentielles linéaires à integrale algébrique (Journal f. Mathematik, Bd. 84, S. 112) aufgestellt; einen Beweis desselben habe ich in den Acta mathematica, Bd. 10, S. 137 veröffentlicht. Nach (36) hat die Zahl 2ρ für die gegenwärtig untersuchten Substitutionen die Bedeutung, dass die zugeordnete charakteristische Determinante gleich dem Product aus der 2ρ ten Potenz des Factors $(s-1)$ und der $(n-2\rho)$ten Potenz des Factors $(s+1)$ ist. Die Beschaffenheit der charakteristischen Determinante liefert also einen Eintheilungsgrund für die betreffenden Substitutionen, und zeigt durch ihren Ausdruck $(s-1)^{2\rho}(s+1)^{n-2\rho}$ an, dass die entsprechende Substitution von $2\rho(n-2\rho)$ unabhängigen Elementen abhängt.

Die ursprünglich aufgeworfene Frage nach der Anzahl der unabhängigen Elemente, aus welchen das im vorigen Artikel behandelte System L_{bc} oder M_{bc} oder N_{bc} besteht, kann mit Hülfe des so eben gefundenen Satzes aus der dortigen Gleichung (9) herausgelesen werden. Nach derselben ist die zugehörige charakteristische Determinante gleich $(s-1)^2(s+1)^2$; man hat also $n = 4$, $2\rho = 2$, mithin ist die Anzahl

der unabhängigen Elemente für jedes der drei Systeme gleich Vier. Wenn den Systemen L_{bc} oder M_{bc} bez. der bicomplexe reguläre Ausdruck der vierten Ordnung Φ oder Ω entspricht, so folgt aus dem obigen, dass in jedem derselben nur Bestandtheile mit zwei Primitivzeichen von Null verschieden sein dürfen. Die Bedingungen dafür, dass ein Ausdruck der vierten Ordnung Φ regulär sei, lassen sich in Übereinstimmung mit (25*) dahin zusammenfassen, dass nicht alle acht Bestandtheile verschwinden, und dass zwischen denselben die Gleichung bestehe

$$(37) \qquad \phi_0\,\phi_{1234} - \phi_{12}\,\phi_{34} - \phi_{13}\,\phi_{42} - \phi_{14}\,\phi_{23} = 0\,.$$

Für den Ausdruck der vierten Ordnung Ω gilt dasselbe, mithin die Gleichung

$$(38) \qquad \omega_0\,\omega_{1234} - \omega_{12}\,\omega_{34} - \omega_{13}\,\phi_{42} - \omega_{14}\,\omega_{23} = 0\,.$$

Wegen der besonderen obwaltenden Verhältnisse müssen in Φ die Bestandtheile ϕ_0 und ϕ_{1234}, in Ω die Bestandtheile ω_0 und ω_{1234} gleich Null sein.

Die Gleichung (19) des vorigen Artikels gibt an, auf welche Weise die Grössen N_{bc} aus den Coefficienten L_{bc} und M_{ce} gebildet werden. Es ist dies dasselbe Gesetz, nach welchem in der obigen Gleichung (5) die Zusammensetzung der auf einander folgenden Substitutionen (1) und (2) ausgedrückt ist. Mit dieser Zusammensetzung von (1) und (2) correspondirt nach (13) das aus den Ausdrücken Φ und Ω gebildete Product $\Omega\Phi$. Folglich entspricht dem System N_{be} das aus den regulären Ausdrücken der vierten Ordnung Φ und Ω gebildete Product $\Omega\Phi$, welches selbst ein regulärer Ausdruck der vierten Ordnung ist. Aus den vorhin angegebenen Gründen darf aber auch dieser Ausdruck nur solche Bestandtheile enthalten, die in zwei Primitivzeichen multiplicirt sind. Nachdem die sämmtlichen Bestandtheile des Products $\Omega\Phi$ gebildet sind, müssen also diejenigen gleich Null sein, welche bez. in kein Primitivzeichen aber in das Product $k_1 k_2 k_3 k_4$ multiplicirt sind. Hieraus erkennt man, dass die Grössen L_{bc} für sich allein von vier unabhängigen Elementen, die Grössen M_{bc} ebenfalls für sich allein von vier unabhängigen Elementen abhängen, dass aber diese acht Elemente, zusammengenommen, durch zwei Gleichungen beschränkt werden, und daher einem System von sechs unabhängigen Elementen aequivalent sind. Auf diese Weise hängt das in dem vorigen Artikel erörterte System der 16 Coefficienten $\alpha_b^{(k)}$ von sechs unabhängigen Elementen ab.

Zweite Abtheilung.

1.

Mit den zwei Systemen von je n Variabeln y_a und z_b sei die bilineare Form

$$(1) \qquad \sum_a y_a z_a$$

und die bilineare alternirende Form

$$(2) \qquad \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b$$

gebildet, deren Coefficienten für jedes Paar von Zeigern a, b die Gleichungen

$$(3) \qquad q_{ab} + q_{ba} = 0$$

erfüllen. Ich werde die Coefficienten q_{ab} reell voraussetzen. Wenn man die Form (1) mit einer unbestimmten Variable t multiplicirt, und zu (2) addirt, so wird die gleichzeitige Transformation von (1) und (2) auf die Transformation des Ausdrucks

$$(4) \qquad t \sum_a y_a z_a + \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b$$

zurückgeführt. Nach einer Bezeichnung, die Hr. Kronecker in mehreren im Monatsbericht der Akademie vom J. 1874 publicirten Arbeiten gebraucht hat, repraesentirt (4) eine Schaar von bilinearen Formen; die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die gleichzeitige Transformation von zwei bilinearen Formen

$$\sum_a y_a z_a \quad \text{und} \quad \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b$$

in zwei andere solche Formen sind in §. 3 der Abhandlung vom 23. April d. J. vollständig entwickelt. Für die Transformationsaufgabe charakteristisch ist die Determinante

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} t, & q_{21}, & \dots & q_{n1} \\ q_{12}, & t, & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n}, & q_{2n}, & \dots & t \end{vmatrix} \quad E(t).$$

Verschiedene Haupteigenschaften derselben sind von Hrn. Hovestadt, der mein Zuhörer war, in seiner Inauguraldissertation nachgewiesen, die unter dem Titel: Über eine mit dem Problem der kleinen Schwingungen verwandte Aufgabe, in Bonn im Jahre 1873

erschienen ist. Die hier behandelte Aufgabe besteht darin, n Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer unabhängigen Variable t so zu bestimmen, dass, wenn mit den n Differentialquotienten $\frac{dx_a}{dt} = x'_a$ eine wesentlich positive quadratische Form $\phi(x'_1, \ldots x'_n)$, ferner mit den Grössen x_a und x'_b eine beliebige reelle bilineare Form $\psi(x_1, \ldots x_n; x'_1, \ldots x'_n)$ gebildet wird, die erste Variation des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} \Big(\phi(x'_1 \ldots x'_n) + \psi(x_1, \ldots x_n; x'_1, \ldots x'_n)\Big)\, dt$$

verschwindet. Setzt man

$$\phi(x'_1, \ldots x'_n) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} a_{ab}\, x'_a x'_b,$$

$$\psi(x_1, \ldots x_n; x'_1, \ldots x'_n) = \sum_{a,b} g_{ab}\, x_a x'_b,$$

so ergeben die Regeln der Variationsrechnung das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\sum_b a_{ab} \frac{d^2 x_b}{dt^2} - \sum_b (g_{ab} - g_{ba}) \frac{dx_b}{dt} = 0\,.$$

Indem ferner

$$g_{ab} - g_{ba} = c_{ab}$$

gesetzt wird, bilden die Grössen c_{ab} die Coefficienten einer bilinearen alternirenden Form, und das System von Differentialgleichungen erhält den Ausdruck

$$\sum_b a_{ab} \frac{d^2 x_b}{dt^2} - \sum_b c_{ab} \frac{dx_b}{dt} = 0\,. \tag{6}$$

Zum Behuf der Integration wird $\frac{dx_a}{dt} = \lambda_a e^{st}$ angenommen, wo s und λ_a zu bestimmende Constanten sind, dann kommt $\frac{d^2 x_a}{dt^2} = s\lambda_a e^{st}$, und es entsteht ein System von n linearen Gleichungen für die Grössen λ_a, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} sa_{11}, & sa_{12} - c_{12}, & \ldots & sa_{1n} - c_{1n} \\ sa_{21} - c_{21}, & sa_{22}, & \ldots & sa_{2n} - c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ sa_{n1} - c_{n1}, & sa_{n2} - c_{n2} & \ldots & sa_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

verschwinden muss. Nun stellt sich heraus, dass, wenn bei geradem n die Determinante $|c_{ab}|$, bei ungeradem n wenigstens eines ihrer adjungirten Elemente nicht gleich Null ist, die betreffende Gleichung

ausser der einen verschwindenden Wurzel, die bei ungeradem n vorhanden ist, nur rein imaginäre, einander paarweise conjugirte Wurzeln hat. Ferner beweist Hr. Hovestadt, dass die in (7) definirte Function der Variable s, auch wenn bei ihrer Zerlegung in Factoren des ersten Grades mehrfache Factoren auftreten, stets so beschaffen ist, dass alle ihre Elementartheiler von der ersten Ordnung sind. Hieraus folgt dann, dass die vollständige Integration des Systems von Differentialgleichungen (6) bewerkstelligt wird, indem für die Grössen $\frac{dx_a}{dt}$ nur Aggregate von Exponentialfunctionen mit rein imaginären Argumenten auftreten. Hr. Hovestadt macht in seiner Arbeit besonders darauf aufmerksam, dass seine Ergebnisse vermittelst der Methoden erhalten sind, die Hr. Weierstrass in der Abhandlung: über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendungen desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen, Monatsbericht der Akademie vom 1. März 1858, eingeführt hat. Die Determinante (7) geht in die obige Determinante (5) über, sobald statt der Form $\frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{ab}x'_a x'_b$ die Summe der Quadrate $\frac{1}{2}\sum_a x'^2_a$ genommen, $c_{ab} = q_{ab}$ gesetzt, und statt s der Buchstabe t geschrieben wird. Die bezügliche Voraussetzung $\frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{ab}x'_a x'_b = \frac{1}{2}\sum_a x'^2_a$ ist auch von Hrn. Hovestadt herausgehoben.

Ich habe mir erlaubt, den Zusammenhang zwischen der Determinante (5), der Determinante (7) und dem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (6) zu erörtern, weil in der vollständigen Integration desselben die vollständige Integration des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen enthalten ist, welche Hr. Weierstrass in dem Aufsatze ausgeführt hat: Nachtrag zu der im Monatsbericht vom Jahre 1858 — S. 207—220 — abgedruckten Abhandlung: »Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem«; dieser Nachtrag ist in dem Monatsbericht der Akademie vom 29. Mai 1879 veröffentlicht. Hier bezeichnet Hr. Weierstrass durch $G(x_1, x_2, \dots x_{2n})$ eine ganze homogene Function des zweiten Grades der $2n$ Variabeln $x_1, x_2, \dots x_{2n}$, mit reellen Coefficienten, welche die Eigenschaft hat, wesentlich positiv zu sein, und behandelt das System von Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} \\ \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} &= -\frac{\partial G(x_1, \dots x_{2n})}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right. \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

Ich werde jetzt die nach den Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten der Form $G(x_1, \ldots x_{2n})$ als neue Variable einführen, indem ich setze

$$\frac{\partial G(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_\alpha} = u_\alpha, \quad \frac{\partial G(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} = u_{n+\alpha}.$$

Dadurch verwandelt sich die Form $G(x_1, x_2, \ldots x_{2n})$ in eine ebenfalls wesentlich positive Form $g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})$, und für die ursprünglichen Variabeln resultiren die Ausdrücke

$$x_\alpha = \frac{\partial g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial u_\alpha}, \; x_{n+\alpha} = \frac{\partial g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial u_{n+\alpha}}.$$

Nach Einsetzung derselben nimmt das von Hrn. WEIERSTRASS gebildete obige System von Differentialgleichungen die Gestalt an

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{\partial g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial u_\alpha}\right)}{dt} &= u_{n+\alpha} \\ \frac{d\left(\dfrac{\partial g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial u_{n+\alpha}}\right)}{dt} &= -u_\alpha. \end{aligned}\right.$$

Dies System geht aber aus dem obigen (6) hervor, sobald statt des Differentialquotienten $\frac{dx_b}{dt}$ die Variable u_b gesetzt und ferner in Übereinstimmung mit der allgemein geltenden Gleichung $c_{ab} + c_{ba} = 0$ angenommen wird, dass die Anzahl n der Variabeln eine gerade Zahl sei, dass, wenn a die Reihe $1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2}$ durchläuft, c_{ab} für jeden Werth von b mit Ausnahme des Werthes $b = \frac{n}{2} + a$ verschwindet und $c_{a, \frac{n}{2}+a} = 1$ ist, dass, wenn a die Reihe $\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \ldots n$ durchläuft, c_{ab} für jeden Werth von b mit Ausnahme des Werthes $b = -\frac{n}{2} + a$ gleich Null ist, und alsdann $c_{a, -\frac{n}{2}+a} = -1$ ist. Nachdem diese Veränderungen vorgenommen sind, hat man nur noch statt $\frac{n}{2}$ die Zahl n und statt der wesentlich positiven Form $\frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{ab} u_a u_b$ die wesentlich positive Form $g(u_1, u_2, \ldots u_{2n})$ zu substituiren, um die vollständige Übereinstimmung der Systeme von Differentialgleichungen und der bezüglichen Integrationen zu erreichen.

2.

Wenn man die im vorigen Artikel definirte Determinante $E(t)$ nach den Potenzen der Variable t entwickelt, und die grösste gerade Zahl, welche n nicht übertrifft, mit 2ν bezeichnet, so ergibt sich die Darstellung

$$(1) \qquad E(t) = t^n + E_1 t^{n-2} + E_2 t^{n-4} + \ldots + E_\nu t^{n-2\nu}.$$

Die Factoren von $t^{n-1}, t^{n-3}, \ldots$ verschwinden, weil jede schiefe Determinante von ungerader Ordnung gleich Null ist; der Coefficient E_μ ist gleich dem Aggregat der Quadrate, durch welche die sämmtlichen schiefen Determinanten der 2μten Ordnung ausgedrückt werden, deren Elemente in Bezug auf die aus den Grössen t bestehende Diagonale symmetrisch geordnet sind. Das Bildungsgesetz der rechten Seite von (1) steht in einer sehr einfachen Beziehung zu dem Bildungsgesetz der Norm eines regulären Ausdrucks der $n$ten Ordnung. In art. 3 der ersten Abtheilung ist in (20) die Norm eines regulären bicomplexen Ausdrucks der $n$ten Ordnung angegeben. Für einen regulären complexen Ausdruck ist das Bildungsgesetz, wie dort schon erwähnt worden, dasselbe, und es besteht nur der Unterschied, dass die auftretenden Bestandtheile reelle Grössen sind. Um den Übergang vollständig zu bezeichnen, wähle ich den in (27) des angeführten Artikels vorkommenden Ausdruck A, bei welchem λ_0 von Null verschieden vorausgesetzt ist, und nehme ausserdem an, dass sowohl λ_0 als auch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen λ_{ab} reell sind. Die Norm von A hat den Ausdruck

$$(2) \qquad N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots$$

Wenn nun in (1) statt t der von Null verschiedene Werth λ_0, ferner jeder der $\frac{n(n-1)}{2}$ Coefficienten der alternirenden Form $q_{ab} = \lambda_{ab}$ gesetzt wird, so geht nach S. Q. Abschnitt II, art. 1 die Determinante $E(t)$ in das Product aus der Potenz λ_0^{n-2} in die Norm $N(A)$ über. Es läuft also die Frage nach den Wurzeln der Gleichung $E(t) = 0$ auf die Frage nach solchen Werthen von λ_0 heraus, für welche die Form $N(A)$ verschwindet, die nach ihrer Natur, als Summe von 2^{n-1} Quadraten, für reelle nicht verschwindende Werthe von λ_0 nicht gleich Null werden kann.

Der von Hrn. Hovestadt herrührende, im vorigen Artikel erwähnte Beweis der Thatsache, dass die Wurzeln der Gleichung $E(t) = 0$ nur rein imaginär oder gleich Null sein können, besteht in Folgendem.

Es sei $B^{(l)}$ irgend eine Wurzel dieser Gleichung; dann kann immer ein System von n Grössen $\beta_a^{(l)}$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so bestimmt werden, dass die n Gleichungen erfüllt sind

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} B^{(l)}\beta_1^{(l)} + q_{21}\beta_2^{(l)} + \dots + q_{n1}\beta_n^{(l)} = 0 \\ q_{12}\beta_1^{(l)} + B^{(l)}\beta_2^{(l)} + \dots + q_{n2}\beta_n^{(l)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{1n}\beta_1^{(l)} + q_{2n}\beta_2^{(l)} + \dots + B^{(l)}\beta_n = 0\,. \end{array}\right.$$

Die Grösse $B^{(l)}$ kann aus dem angegebenen Grunde nicht reell und von Null verschieden sein; es wird jetzt angenommen, dass sie nicht gleich Null sei; mithin muss sie complex sein. Der Gleichung $E(t) = 0$, deren Coefficienten reell sind, genügt also auch die conjugirte Wurzel, die mit $B^{(-l)}$ bezeichnet werden möge. Wenn die zu $\beta_a^{(l)}$ conjugirte complexe Grösse $\beta_a^{(-l)}$ genannt wird, so folgt aus (3) das System von Gleichungen

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} B^{(-l)}\beta_1^{(-l)} + q_{21}\beta_2^{(-l)} + \dots + q_{n1}\beta_n^{(-l)} = 0 \\ q_{12}\beta_1^{(-l)} + B^{(-l)}\beta_2^{(-l)} + \dots + q_{n2}\beta_n^{(-l)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{1n}\beta_1^{(-l)} + q_{2n}\beta_2^{(-l)} + \dots + B^{(-l)}\beta_n^{(-l)} = 0\,. \end{array}\right.$$

Man multiplicire nun die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\beta_1^{(-l)}, \dots \beta_n^{(-l)}$, die Gleichungen (4) ebenso mit $\beta_1^{(l)}, \dots \beta_n^{(l)}$, und addire alle $2n$ Gleichungen, dann heben sich die in q_{ab} multiplicirten Bestandtheile in Folge der Relation $q_{ab} + q_{ba} = 0$ fort, und es bleibt die Gleichung

$$(5)\qquad (B^{(l)} + B^{(-l)})\,(\beta_1^{(l)}\beta_1^{(-l)} + \dots + \beta_n^{(l)}\beta_n^{(-l)}) = 0.$$

Der in der zweiten Klammer enthaltene Ausdruck ist das Aggregat der Normen von n complexen Grössen, die nicht sämmtlich gleich Null sind, und hat deshalb einen von Null verschiedenen Werth. Folglich muss der erste Factor gleich Null sein, und dies ist nur möglich, wenn die von Null verschiedene Wurzel $B^{(l)}$ der Gleichung $E(t) = 0$ rein imaginär ist. Die aufgestellte Behauptung ist somit erwiesen. Bildet man für irgend eine Wurzel der betreffenden Gleichung $B^{(m)}$, welche nicht gleich $-B^{(l)}$ ist, das System von Gleichungen

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} B^{(m)}\beta_1^{(m)} + q_{21}\beta_2^{(m)} + \dots + q_{n1}\beta_n^{(m)} = 0 \\ q_{12}\beta_1^{(m)} + B^{(m)}\beta_2^{(m)} + \dots + q_{n2}\beta_n^{(m)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{1n}\beta_1^{(m)} + q_{2n}\beta_2^{(m)} + \dots + B^{(m)}\beta_n^{(m)} = 0 \end{array}\right.$$

und verfährt, wie vorhin, so ergibt sich die Gleichung

$$(7)\qquad (B^{(l)} + B^{(m)})\,(\beta_1^{(l)}\beta_1^{(m)} + \dots + \beta_n^{(l)}\beta_n^{(m)}) = 0\,.$$

aus welcher, weil $B^{(l)} + B^{(m)}$ nicht gleich Null ist, die Relation folgt

$$\beta_1^{(l)}\beta_1^{(m)} + \ldots + \beta_n^{(l)}\beta_n^{(m)} = 0\,. \tag{8}$$

Von hier ab werde ich annehmen, dass die Function $\mathrm{E}(t)$ in lauter verschiedene Factoren des ersten Grades zerfalle. Darin liegt die Bedingung, dass in der Entwickelung (1) der letzte Coefficient E_n nicht gleich Null sein darf. Demnach enthält $\mathrm{E}(t)$ für ungerade Werthe von n den Factor t einfach, für gerade Werthe von n gar nicht. Die n von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung mögen so dargestellt werden, dass der Zeiger l in $B^{(l)}$ für ein ungerades n die Werthe

$$-\left(\frac{n-1}{2}\right), -\left(\frac{n-3}{2}\right), \ldots -1, 0, 1, \ldots \left(\frac{n-3}{2}\right), \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

für ein gerades n die Werthe

$$-\left(\frac{n}{2}\right), -\left(\frac{n-2}{2}\right), \ldots -1, +1, \ldots \left(\frac{n-2}{2}\right), \left(\frac{n}{2}\right)$$

durchläuft, dass im ersteren Falle $B^{(0)} = 0$ ist, und für jeden Werth von l die Gleichung $B^{(l)} + B^{(-l)} = 0$ gilt.

Man kann nun den in art. 1 mit (4) bezeichneten Ausdruck

$$t\sum_a y_a z_a + \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b$$

durch eine lineare Substitution, bei welcher die obigen Grössen $\beta_a^{(l)}$ als Coefficienten auftreten, in eine Normalform transformiren. Da die Function $\mathrm{E}(t)$ keine gleichen Factoren haben darf, so verschwindet $\dfrac{d\mathrm{E}(t)}{dt}$ niemals für $t = B^{(l)}$, und deshalb können bei dem System der Coefficienten von (3) nicht alle adjungirten Elemente gleich Null sein. Es sind deshalb die Grössen $\beta_a^{(l)}$ durch (3) bis auf einen willkürlich bleibenden gemeinsamen Factor bestimmt. Für die Bestimmung der Grössen $\beta_a^{(-l)}$ durch (4) gilt das entsprechende; man kann daher über die freibleibenden Factoren so verfügen, dass die Gleichung

$$\beta_1^{(l)}\beta_1^{(-l)} + \ldots + \beta_n^{(l)}\beta_n^{(-l)} = 1 \tag{9}$$

für jeden Werth von l erfüllt ist. Es sollen η_l, ζ_m zwei Systeme von je n Variabeln bedeuten, und dabei l wie m die vorhin für l angegebene Reihe von Zahlen durchlaufen: dann bilde ich die lineare Substitution

$$y_a = \sum_l \beta_a^{(l)}\eta_l, \quad z_a = \sum_m \beta_a^{(m)}\zeta_m\,. \tag{10}$$

Hier hat man

$$\sum y_a z_a = \sum_l \beta_a^{(l)}\eta_l \sum_m \beta_a^{(m)}\zeta_m\,, \tag{11}$$

mithin, weil nach (8) die Summe $\sum_a \beta_a^{(l)}\beta_a^{(m)}$ stets verschwindet, ausser wenn $l+m=0$ ist, dann aber nach (9) gleich der positiven Einheit wird, die Gleichung

$$\sum_a y_a z_a = \sum_l \eta_l \zeta_{-l}. \tag{12}$$

Es wird ferner

$$\sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b = \sum_{a,b} q_{ab} \sum_l \beta_a^{(l)} \eta_l \sum_m \beta_b^{(m)} \zeta_m. \tag{13}$$

Aus (3) folgt

$$\sum_{a,b} q_{ab} \beta_a^{(l)} \beta_b^{(m)} = \quad B^{(l)} \sum_a \beta_a^{(l)} \beta_b^{(m)}; \tag{14}$$

wegen der Relationen (8) und (9) verschwindet die linke Seite, sobald $l+m$ nicht gleich Null ist, wird dagegen für $m=-l$ gleich $-B^{(l)}$, so dass die Gleichung

$$-B^{(l)} = \sum_{a,b} q_{ab} \beta_a^{(l)} \beta_b^{(-l)} \tag{15}$$

entsteht. Mithin wird aus (13) die Gleichung

$$\sum_{a,b} q_{ab} y_a z_a = -\sum_l B^{(l)} \eta_l \zeta_{-l}. \tag{16}$$

Demnach liefert die Vereinigung von (12) und (16) die gesuchte Transformation des Ausdrucks (4) in eine Normalform

$$t\sum_a y_a z_a + \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b = t\sum_l \eta_l \zeta_{-l} - \sum_l B^{(l)} \eta_l \zeta_{-l}. \tag{17}$$

Man erhält solche Verbindungen der Coefficienten $\beta_a^{(l)}$, welche durch die Forderungen der vorliegenden Transformationsaufgabe vollständig bestimmt sind, durch ein Verfahren, das dem in der ersten Abtheilung benutzten Verfahren Jacobi's ähnlich ist. Es mögen in dem System (3) die adjungirten Elemente, die nach einer obigen Bemerkung nicht sämtlich verschwinden können, so bezeichnet werden, dass zu der mit den Zeigern a, b versehenen Stelle das adjungirte Element $Q_{ab}^{(l)}$ gehört. Dann besteht bekanntlich für einen beliebigen Werth von b die Proportion

$$\beta_1^{(l)} : \beta_2^{(l)} : \ldots : \beta_n^{(l)} = Q_{1b}^{(l)} : Q_{2b}^{(l)} : \ldots : Q_{nb}^{(l)}.$$

Wenn daher die Grössen links mit demselben Factor $\beta_b^{(-l)}$ multiplicirt werden, so lassen sich die Producte mit Hülfe eines gemeinsamen Factors $R_b^{(l)}$ so darstellen, dass für jedes a die Relation

$$\beta_a^{(l)} \beta_b^{(-l)} = R_b^{(l)} Q_{ab}^{(l)} \tag{18}$$

gilt. In gleicher Weise entsteht aus (4) mit Zuziehung eines gemeinsamen Factors $S_a^{(-l)}$ die Relation

$$\beta_b^{(-l)}\beta_a^{(l)} = S_a^{(-l)} Q_{ba}^{(-l)}. \tag{19}$$

Weil $B^{(l)}$ und $B^{(-l)}$ stets einander entgegengesetzt gleich sind, so folgt aus (3) die Gleichung

$$Q_{ba}^{(-l)} = (-1)^{n-1} Q_{ab}^{(l)}. \tag{20}$$

Da die linken Seiten von (18) und (19) einander gleich sind, so hat man nach (20) durch Gleichsetzung der rechten Seiten

$$R_b^{(l)} Q_{ab}^{(l)} = (-1)^{n-1} S_a^{(-l)} Q_{ab}^{(l)}. \tag{21}$$

Für jede Combination von Zeigern, bei der $Q_{ab}^{(l)}$ nicht gleich Null ist, muss also

$$R_b^{(l)} = (-1)^{n-1} S_a^{(-l)} \tag{22}$$

sein, d. h. für irgend zwei Combinationen mit gleichen Werthen von a, und verschiedenen Werthen von b muss die Grösse $R_b^{(l)}$ von b, für irgend zwei Combinationen mit gleichen Werthen von b, und verschiedenen Werthen von a die Grösse $S_a^{(-l)}$ von a unabhängig sein. Der Factor $R_b^{(l)}$ ist bestimmt, wenn unter den Grössen $Q_{1b}^{(l)}, \ldots Q_{nb}^{(l)}$ wenigstens eine $Q_{ab}^{(l)}$ von Null verschieden ist. Setzt man statt b einen anderen Zeiger b', so gilt von dem Factor $R_{b'}^{(l)}$ das entsprechende; dann muss aber auch die mit demselben Zeiger a gebildete Grösse $Q_{a,b'}^{(l)}$ von Null verschieden sein, weil sonst die oben mit dem Zeiger b aufgestellte Proportion der mit dem Zeiger b' gebildeten widersprechen würde. Es sind also die für die Anwendung von (22) erforderlichen Voraussetzungen erfüllt, um schliessen zu dürfen, dass $R_b^{(l)} = R_{b'}^{(l)}$ ist. Das entsprechende gilt für $S_a^{(-l)}$. Weil also $R_b^{(l)}$ stets, wo es bestimmt ist, einen von b unabhängigen Werth haben muss, in den übrigen Fällen aber willkürlich angenommen werden darf, so ist es gerechtfertigt, in (18) statt $R_b^{(l)}$ die von b unabhängige Grösse $R^{(l)}$ einzuführen und zu schreiben

$$\beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)} = R^{(l)} Q_{ab}^{(l)}. \tag{23}$$

Indem jetzt $b = a$ gesetzt wird, folgt aus (9) für $R^{(l)}$ die Bestimmung

$$R^{(l)} \sum_c Q_{cc}^{(l)} = 1, \tag{24}$$

und man erhält die Relation

$$\beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)} = \frac{Q_{ab}^{(l)}}{\sum_c Q_{cc}^{(l)}} \tag{25}$$

Hiernach sind die Grössen $\beta_a^{(l)}$ in der Weise bestimmt, dass für jeden von Null verschiedenen Werth von l eine mit einem rein imaginären Argument gebildete Exponentialfunction $e^{\sqrt{-1}\,\tau_l}$ als Factor willkürlich bleibt, dass zu dem entgegengesetzten Werthe $-l$ die conjugirte Exponentialfunction $e^{\sqrt{-1}\,\tau_{-l}} = e^{-\sqrt{-1}\,\tau_l}$ gehört, und dass für den Werth $l = 0$ der willkürlich hinzuzufügende Factor sich auf die positive oder negative Einheit reducirt.

Es werden jetzt die Wurzeln der Gleichung $E(t) = 0$ als Functionen der $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängig veränderlichen reellen Grössen q_{ab} aufgefasst werden; eine auf dieselben bezügliche vollständige Variation sei durch die Charakteristik δ bezeichnet. Dann erhält man, der Gleichung (9) in art. 1 der ersten Abtheilung entsprechend, die Gleichung

$$\frac{\delta E(t)}{E(t)} = -\sum_l \frac{\delta B^{(l)}}{t - B^{(l)}}; \tag{26}$$

ferner liefert die Zerlegung in Partialbrüche, da $E(t)$ nur differente Factoren hat, der dortigen Gleichung (10) analog, die Gleichung

$$\frac{\delta E(t)}{E(t)} = \sum_l \left(\frac{\delta E(t)}{E'(t)}\right)_{t=B^{(l)}} \frac{1}{t - B^{(l)}}, \tag{27}$$

wo $E'(t) = \frac{dE(t)}{dt}$ ist.

Hieraus folgt dann für $\delta B^{(l)}$ der Ausdruck

$$-\delta B^{(l)} = \left(\frac{\delta E(t)}{E'(t)}\right)_{t=B^{(l)}}. \tag{28}$$

Bei der Bildung der vollständigen Variation $\delta E(t)$ für $t = B^{(l)}$ ist zu erwägen, dass die in der Diagonale des Schemas von der Grösse t ausgefüllten Glieder keine Beiträge liefern, während die Glieder q_{ab}, welche zwei verschiedene Indices haben, bez. die Beiträge $Q_{ab}^{(l)}$ ergeben. Weil aber q_{cc} gleich Null ist, so darf man die Glieder von der Gestalt $Q_{cc}^{(l)}\delta q_{cc}$, da sie sämmtlich verschwinden, formell hinzufügen. Der Nenner $E'(t)$ für $t = B^{(l)}$ hat den Ausdruck $\sum_c Q_{cc}^{(l)}$; mithin nimmt (28) die Gestalt an

$$-\delta B^{(l)} = \frac{\sum_{a,b} Q_{ab}^{(l)}\delta q_{ab}}{\sum_c Q_{cc}^{(l)}}. \tag{29}$$

Diese verwandelt sich durch Zuziehung von (25) in die folgende

$$-\delta B^{(l)} = \sum_{a,b} \beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)}\delta q_{ab}; \tag{30}$$

es wird also die vollständige Variation $\delta B^{(l)}$ in genau derselben Weise durch die Variationen δq_{ab} ausgedrückt, wie in (15) $B^{(l)}$ als lineare Function der Grössen q_{ab} dargestellt ist. Um auf der rechten Seite von (30) nur die $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Variationen der Grössen q_{ab} beizubehalten, in denen a und b von einander differiren, möge eine Summation, bei welcher jedes dieser Paare nur ein Mal gezählt wird, durch $\sum\limits_{a,b}'$ angedeutet werden; in Folge der Gleichung $\delta q_{ab} + \delta q_{ab} = 0$ ergibt sich dann die Gleichung

$$(31) \qquad \delta B^{(l)} = \sum_{a,b}{}' (\beta_a^{(-l)} \beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)} \beta_b^{(-l)}) \delta q_{ab}.$$

Aus den Substitutionsgleichungen (10) folgt, indem zuerst in den Ausdrücken der rechten Seite statt l der Buchstabe l', statt m der Buchstabe m' geschrieben, dann auf jede der beiden Summen $\sum\limits_a \beta_a^{(-l)} y_a$ und $\sum\limits_b \beta_b^{(-m)} z_a$ das System (8) und (9) angewendet wird, die Umkehrung

$$(32) \qquad \eta_l = \sum_a \beta_a^{(-l)} y_a, \; \zeta_m = \sum_b \beta_b^{(-m)} z_b.$$

Dies gibt unmittelbar die Relation

$$(33) \qquad \eta_l \zeta_{-l} - \zeta_l \eta_{-l} = \sum_{a,b} (\beta_a^{(-l)} \beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)} \beta_b^{(-l)}) y_a z_b.$$

Da auf der rechten Seite die Glieder, bei denen $a = b$ ist, fortfallen, so kann man die Summation wieder über alle Paare differenter Zahlen a, b ausdehnen, und erhält dann die Darstellung

$$(34) \qquad \eta_l \zeta_{-l} - \zeta_l \eta_{-l} = \sum_{a,b}{}' (\beta_a^{(-l)} \beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)} \beta_b^{(-l)}) (y_a z_b - z_a y_b),$$

in welcher die Coefficienten der rechten Seite mit denen der rechten Seite von (31) genau übereinstimmen. Es bleibt also eine zwischen den Variationen $\delta B^{(l)}$ und δq_{ab} bestehende Gleichung gültig, sobald gleichzeitig statt $\delta B^{(l)}$ die Verbindung $\eta_l \zeta_{-l} - \zeta_l \eta_{-l}$ und statt δq_{ab} die Verbindung $y_a z_b - z_a y_b$ gesetzt wird. Dass in einem Ausdruck δq_{ab} durch $y_a z_b - z_a y_b$ ersetzt wird, möge durch Einschliessen des Ausdrucks in eine Klammer $\} \{$ angedeutet werden.

Um eine sehr einfache Anwendung zu machen, bemerke ich, dass in Folge der getroffenen Annahmen die Function $\mathrm{E}(t)$, je nachdem die Zahl n ungerade oder gerade ist, die erste oder zweite Zerlegung in Factoren liefert

$$(35) \qquad \mathrm{E}(t) = t\left(t^2 - (B^{(1)})^2\right)\left(t^2 - (B^{(2)})^2\right) \ldots \left(t^2 - \left(B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)^2\right),$$

$$(35^*) \qquad \mathrm{E}(t) = \left(t^2 - (B^{(1)})^2\right)\left(t^2 - (B^{(2)})^2\right) \ldots \left(t^2 - \left(B^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^2\right).$$

Nach der bei (1) gebrauchten Bezeichnung ist im ersten Falle $\frac{n-1}{2} = \nu$, im zweiten $\frac{n}{2} = \nu$.

Man hat daher die für beide Fälle geltende Gleichung

$$(36)\qquad -(B^{(1)})^2 - (B^{(2)})^2 - \ldots - (B^{(\nu)})^2 = E_1\,.$$

und zwar ist

$$(37)\qquad E_1 = \sum_{a,b}{}' q_{ab}^2\,.$$

Durch Ausführung der vollständigen Variation der beiden Seiten von (36) kommt hiernach

$$(38)\qquad -B^{(1)}\delta B^{(1)} - B^{(2)}\delta B^{(2)} - \ldots - B^{(\nu)}\delta B^{(\nu)} = \tfrac{1}{2}\delta E_1 = \sum{}' q_{ab}\,\delta q_{ab}\,.$$

Diese Gleichung erzeugt durch die so eben erwähnte Substitution die Relation

$$(39)\qquad \begin{aligned} -B^{(1)}(\eta_1\zeta_{-1} - \zeta_1\eta_{-1}) - \ldots - B^{(\nu)}(\eta_\nu\zeta_{-\nu} - \zeta_\nu\eta_{-\nu}) &= \left\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\right\} \\ &= \sum{}' q_{ab}(y_a z_b - z_a y_b)\,. \end{aligned}$$

welche mit der obigen Transformationsgleichung (16) den gleichen Inhalt hat.

Ich werde jetzt drei Arten von Relationen zwischen den Coefficienten der rechten Seite von (31) angeben, aus denen partielle Differentialgleichungen für $B^{(l)}$ hervorgehen. Man hat

$$(40)\qquad \sum_a (\beta_a^{(-l)})^2 \sum_b (\beta_b^{(l)})^2 - \Big(\sum_a \beta_a^{(-l)}\beta_a^{(l)}\Big)^2 = \sum_{a,b}{}' (\beta_a^{(-l)}\beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)})^2\,.$$

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\sum_a \beta_a^{(-l)}\beta_a^{(-m)} \sum_b \beta_b^{(l)}\beta_b^{(m)} - \sum_a \beta_a^{(-l)}\beta_a^{(m)} \sum_b \beta_b^{(l)}\beta_b^{(-m)} \\ &\quad = \sum_{a,b}{}' (\beta_a^{(-l)}\beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)})(\beta_a^{(-m)}\beta_b^{(m)} - \beta_a^{(m)}\beta_b^{(-m)})\,, \end{aligned}$$

und, wenn $n \overline{\gtrless} 4$ ist, und a, b, c, e vier verschiedene Zeiger bedeuten,

$$(42)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(\beta_a^{(-l)}\beta_b^{(l)} - \beta_a^{(l)}\beta_b^{(-l)})\,(\beta_c^{(-l)}\beta_e^{(l)} - \beta_c^{(l)}\beta_e^{(-l)}) \\ + &(\beta_a^{(-l)}\beta_c^{(l)} - \beta_a^{(l)}\beta_c^{(-l)})\,(\beta_e^{(-l)}\beta_b^{(l)} - \beta_e^{(l)}\beta_b^{(-l)}) \\ + &(\beta_a^{(-l)}\beta_e^{(l)} - \beta_a^{(l)}\beta_e^{(-l)})\,(\beta_b^{(-l)}\beta_c^{(l)} - \beta_b^{(l)}\beta_c^{(-l)}) = 0\,. \end{aligned} \right.$$

In Folge von (8) und (9) ist die linke Seite von (40) für jeden von Null verschiedenen Werth von l gleich -1, ferner die linke Seite von (41), sobald weder $l+m$ noch $l-m = 0$ ist, gleich Null. Demnach besteht das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{I})\qquad \sum{}' \left(\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\right)^2 = -1\,.$$

für jeden Werth von l, der nicht Null ist;

(II) $$\sum' \left(\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\right)\left(\frac{\partial B^{(m)}}{\partial q_{ab}}\right) = 0,$$

für jedes Paar von Werthen l und m, bei denen weder $l+m=0$ noch $l-m=0$ ist;

(III) $$\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ce}} + \frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ac}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{eb}} + \frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ae}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{bc}} = 0.$$

für je vier von einander verschiedene Zeiger a, b, c, e.

3.

Nach den Gleichungen (35) und (35*) des vorigen Artikels leuchtet es ein, dass die Wurzeln der Gleichung $\mathrm{E}(t) = 0$

$$\pm B^{(1)},\ \pm B^{(2)},\ \ldots\ \pm B^{(\nu)}$$

durch Radicale dargestellt werden können, sobald die Zahl n einen der Werthe 2, 3, ... 9 annimmt. Ich werde die Gleichungen, auf denen diese Darstellung beruht, angeben, und durch das so eben entwickelte Substitutionsverfahren aus denselben Schlüsse ziehen, jedoch unterlassen, die entsprechenden besonderen Systeme von partiellen Differentialgleichungen näher zu untersuchen.

Für $n = 2$ ist

(1) $$\mathrm{E}(t) = t^2 + q_{12}^2,$$

also

(2) $$B^{(1)} = \sqrt{-1}\, q_{12}.$$

Für $n = 3$ kommt

(3) $$\mathrm{E}(t) = t(t^2 + q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2),$$

mithin

(4) $$B^{(1)} = \sqrt{-1}\sqrt{q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2}.$$

Von nun ab mögen die Systeme von Gleichungen, die sich auf zwei aufeinander folgende Werthe von n beziehen, zusammengefasst werden.

Man erhält

für $n = 4$ oder 5,

(5) $$\begin{cases} (B^{(1)})^2 - (B^{(2)})^2 = E_1 \\ -(B^{(1)})^2 + (B^{(2)})^2 = \sqrt{-D}, \\ D = E_1^2 - 4E_2; \end{cases}$$

für $n = 6$ oder 7,

$$(6)\quad \begin{cases} -(B^{(1)})^2 - (B^{(2)})^2 - (B^{(3)})^2 = E_1 \\ -(B^{(1)})^2 - \rho^2 (B^{(2)})^2 - \rho (B^{(3)})^2 = H \\ -(B^{(1)})^2 - \rho (B^{(2)})^2 - \rho^2 (B^{(3)})^2 = K, \\ \qquad H^3 + K^3 = 2E_1^3 - 9E_1 E_2 + 27 E_3 \\ \qquad HK = E_1^2 - 2E_2; \end{cases}$$

hier bedeutet ρ, wie in (25), art. 2 der ersten Abtheilung, eine nicht reelle dritte Wurzel der Einheit:

für $n = 8$ oder 9,

$$(7)\quad \begin{cases} -(B^{(1)})^2 - (B^{(2)})^2 - (B^{(3)})^2 - (B^{(4)})^2 = E_1 \\ -(B^{(1)})^2 - (B^{(2)})^2 + (B^{(3)})^2 + (B^{(4)})^2 = L \\ (B^{(1)})^2 + (B^{(2)})^2 - (B^{(3)})^2 + (B^{(4)})^2 = M \\ (B^{(1)})^2 + (B^{(2)})^2 + (B^{(3)})^2 - (B^{(4)})^2 = N. \\ \qquad L^2 + M^2 + N^2 = 3E_1^2 - 2^3 E_2 \\ L^2 M^2 + L^2 N^2 + M^2 N^2 = 3E_1^4 - 2^4 E_1^2 E_2^2 + 2^4 E_1 E_3 + 2^4 E_2^2 - 2^6 E_4 \\ \qquad LMN = E_1^3 - 2^2 E_1 E_2 + 2^3 E_3. \end{cases}$$

In dem Falle $n = 4$ ist

$$(8)\quad \begin{cases} E_1 = q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{14}^2 + q_{23}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2 \\ E_2 = q_{12} q_{34} + q_{13} q_{42} + q_{14} q_{23}, \end{cases}$$

und daraus ergibt sich

$$(9)\quad \begin{aligned} -D = \big((q_{12} - q_{34})^2 + (q_{13} - q_{42})^2 + (q_{14} - q_{23})^2\big) \\ \times \big((q_{12} + q_{34})^2 + (q_{13} + q_{42})^2 + (q_{14} + q_{23})^2\big). \end{aligned}$$

Mithin liefert (5) für $B^{(1)}, B^{(2)}$ die Ausdrücke

$$(9^*)\quad \begin{cases} B^{(1)} = \dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{(q_{12} - q_{34})^2 + (q_{13} - q_{42})^2 + (q_{14} - q_{23})^2} + \sqrt{-1}\sqrt{(q_{12} + q_{34})^2 + (q_{13} + q_{42})^2 + (q_{14} + q_{23})^2}}{2} \\ B^{(2)} = \dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{(q_{12} - q_{34})^2 + (q_{13} - q_{42})^2 + (q_{14} - q_{23})^2} - \sqrt{-1}\sqrt{(q_{12} + q_{34})^2 + (q_{13} + q_{42})^2 + (q_{14} + q_{23})^2}}{2}. \end{cases}$$

Bei den Systemen (5), (6), (7) ist das Resultat der Variation der jedesmaligen ersten Gleichung in (39) des vorigen Artikels enthalten; diese Relation zeigt, dass durch $\{\frac{1}{2}\delta E_1\}$ die ursprünglich gegebene bilineare alternirende Form ausgedrückt wird. Wenn man nun in (5) auf die zweite, in (6) auf die zweite und dritte, in (7) auf die zweite, dritte und vierte Gleichung das Verfahren der Variation und Substitution anwendet, das aus der ersten Gleichung hervorgehende Resultat mit einer unbestimmten Variable u multiplicirt und zu jedem der betreffenden zugehörigen addirt, so entstehen die folgenden Systeme:

Für $n = 4$ oder 5,

$$(10)\quad -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u-1)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta D\}:$$

für $n = 6$ oder 7,

$$(11)\quad \begin{cases} -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u+\rho^2)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) \\ \qquad - B^{(3)}(u+\rho)(\eta_3\zeta_{-3}-\zeta_3\eta_{-3}) = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta H\}, \\ -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u+\rho)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) \\ \qquad - B^{(3)}(u+\rho^2)(\eta_3\zeta_{-3}-\zeta_3\eta_{-3}) = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta K\}; \end{cases}$$

für $n = 8$ oder 9,

$$(12)\quad \begin{cases} -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u+1)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) \\ \qquad - B^{(3)}(u-1)(\eta_3\zeta_{-3}-\zeta_3\eta_{-3}) - B^{(4)}(u-1)(\eta_4\zeta_{-4}-\zeta_4\eta_{-4}) \\ \qquad\qquad = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta L\}, \\ -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u-1)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) \\ \qquad - B^{(3)}(u+1)(\eta_3\zeta_{-3}-\zeta_3\eta_{-3}) - B^{(4)}(u-1)(\eta_4\zeta_{-4}-\zeta_4\eta_{-4}) \\ \qquad\qquad = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta M\}, \\ -B^{(1)}(u+1)(\eta_1\zeta_{-1}-\zeta_1\eta_{-1}) - B^{(2)}(u-1)(\eta_2\zeta_{-2}-\zeta_2\eta_{-2}) \\ \qquad - B^{(3)}(u-1)(\eta_3\zeta_{-3}-\zeta_3\eta_{-3}) - B^{(4)}(u+1)(\eta_4\zeta_{-4}-\zeta_4\eta_{-4}) \\ \qquad\qquad = u\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{ + \}\tfrac{1}{2}\delta N\}. \end{cases}$$

Durch Verbindung der Gleichung (1) mit den Gleichungen (35) und (35*) im vorigen Artikel ergibt sich die Gleichung

$$(13)\qquad (-1)^{\nu}(B^{(1)})^2(B^{(2)})^2\ldots(B^{(\nu)})^2 = E_n.$$

Die Grösse $E_{2\nu}$ ist für $n = 2\nu$ gleich der Determinante des schiefen Systems der Elemente q_{ab} oder der bilinearen Form

$$\sum_{a,b}{}' q_{ab}(y_a z_b - z_a y_b) = \}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{,$$

dagegen für $n = 2\nu+1$ gleich dem Aggregat der Determinanten 2νter Ordnung, deren Elemente q_{ab} in Bezug auf die aus verschwindenden Grössen bestehende Diagonale symmetrisch geordnet sind.

Um die Abhängigkeit anzudeuten, in welcher E_n von der alternirenden Form $\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{$ steht, möge die Bezeichnung

$$(13^*)\qquad E_n = \Delta(\}\tfrac{1}{2}\delta E_1\{)$$

gebraucht werden. Diese Gleichung lässt sich auch als eine Folgerung aus der Transformationsgleichung (17) des art. 2 auffassen. Weil es nun gestattet ist, in dieser Gleichung gleichzeitig statt $-\sum_l B^{(l)}\eta_l\zeta_{-l}$ die linke, statt $\sum_{a,b} q_{ab}y_a z_b$ die rechte Seite von jeder einzelnen Gleichung der so eben aufgestellten Systeme (10), (11), (12) zu substitui-

ren, während die Zahl n in jedem Falle einen der zugehörigen Werthe bekommt, so darf man auch das Schlussverfahren benutzen, das zu der obigen Gleichung (13*) führt, und gelangt dadurch zu den folgenden Relationen: für $n = 4$ oder 5,

$$(14) \qquad \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^2-1)^2 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta\sqrt{-D}\});$$

für $n = 6$ oder 7,

$$(15) \qquad \begin{cases} \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^3+1)^2 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta H\}). \\ \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^3+1)^2 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta K\}): \end{cases}$$

für $n = 8$ oder 9.

$$(16) \qquad \begin{cases} \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^2-1)^4 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta L\}). \\ \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^2-1)^4 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta M\}), \\ \Delta(\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\})(u^2-1)^4 = \Delta(u\{\tfrac{1}{2}\delta E_1\}+\{\tfrac{1}{2}\delta N\}). \end{cases}$$

Jede derselben liefert ein System von partiellen Differentialgleichungen, welches sich auf eine einzelne der Grössen $\sqrt{-D}$, H, K, L, M, N bezieht.



Über orthogonale Systeme.

Von L. Kronecker.

Hr. Lipschitz hat im art. 3 der ersten Abtheilung seines vorstehend abgedruckten Aufsatzes das interessante Problem der Aufstellung aller orthogonalen symmetrischen Systeme mit Hülfe der Grundsätze, welche in seiner Schrift »Untersuchungen über die Summe von Quadraten« entwickelt sind, und mit Benutzung der darin eingeführten »Primitivzeichen« vollständig gelöst. Ich will nun hier, mit Hülfe von einigen in meinen früheren akademischen Mittheilungen enthaltenen Sätzen über die Transformation quadratischer Formen, eine zweite elegante Lösung des bezeichneten Problems ableiten und daran einige Bemerkungen über die Darstellung allgemeiner orthogonaler Systeme knüpfen.

I.

Formulirt man die zu lösende Aufgabe dahin,

dass alle symmetrischen Systeme bestimmt werden sollen, welche zugleich orthogonal sind,

so liegt es nahe, die Elemente der symmetrischen Systeme in jener Darstellungsweise der Untersuchung zu Grunde zu legen, in welcher sie selbst durch die Elemente orthogonaler Systeme ausgedrückt erscheinen.

Beschränkt man sich zuvörderst auf symmetrische Systeme mit reellen Elementen:

$$a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so ergiebt sich schon unmittelbar aus den höchst einfachen, in meiner Mittheilung vom 18. Mai 1868 enthaltenen Entwickelungen,[1] dass solche Grössen a_{ik} stets in folgender Form dargestellt werden können:

$$(1) \qquad a_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

[1] Monatsbericht vom Mai 1868, S. 339—342.

wo die Grössen p_h und c_{hi} reell und die letzteren die Elemente eines orthogonalen Systems sind.

Bedeuten nämlich u, v, $x_1, x_2, \ldots x_n$ unbestimmte Variable, so repraesentirt der Ausdruck:

$$u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nach der a. a. O. eingeführten Bezeichnungsweise eine »Schaar von quadratischen Formen«, und zwar eine der »ersten Art«, da die »*forma definita*« $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ unter den Formen der Schaar vorkommt. Eine solche Schaar lässt sich, wie dort gezeigt ist, immer auf die Gestalt bringen:[1]

$$\sum_h (uv_h - vu_h)\, z_h^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher u_h, v_h reelle Grössen und $z_1, z_2, \ldots z_n$ homogene lineare reelle Functionen der n Variabeln x bedeuten. Die Grössen v_h sind dabei nothwendig positiv, da dies durch die Transformationsgleichung:

$$(2) \qquad u \sum_k x_k^2 + v \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_h (uv_h - vu_h)\, z_h^2 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und zwar speciell durch die daraus hervorgehende Gleichung:

$$\sum_h x_h^2 = \sum_h v_h z_h^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

erfordert wird. Es werden daher, wenn:

$$\sqrt{v_h}\, z_h = \sum_i c_{hi} x_i \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt wird, die Coefficienten c_{hi} die reellen Elemente eines orthogonalen Systems. Substituirt man nun in der aus der Transformationsgleichung (2) hervorgehenden Gleichung:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = -\sum_h u_h z_h^2 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

für die Variabeln z die angegebenen linearen Functionen der Variabeln x und setzt:

$$u_h = p_h \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

so resultiren für die Grössen a_{ik} jene Gleichungen (1):

$$a_{ik} = \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

deren Existenz nachgewiesen werden sollte.

Soll das symmetrische System (a_{ik}) zugleich orthogonal sein, so müssen die Relationen bestehen:

[1] A. a. O. S. 34.

$$(3) \qquad \sum_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots n),$$

wo δ_{rs} gleich Eins oder gleich Null ist, je nachdem $r = s$ oder $r \gtrless s$ ist. Substituirt man hierin für a_{ir} und a_{is} die Werthe aus den Gleichungen (1) so gehen die Relationen (3) in folgende über:

$$\sum_{g,h,i} p_g p_h c_{gr} c_{hs} c_{gi} c_{hi} = \delta_{rs} \qquad (g, h, i, r, s = 1, 2, \ldots n),$$

und diese nehmen, wenn man von den Gleichungen:

$$(4) \qquad \sum_i c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n)$$

Gebrauch macht, welche die Grössen c als Elemente eines orthogonalen Systems charakterisiren, die einfachere Gestalt an:

$$(5) \qquad \sum_h p_h^2 c_{hr} c_{hs} = \delta_{rs} \qquad (h, r, s = 1, 2, \ldots n).$$

Multiplicirt man nun mit $c_{kr} c_{ks}$ und summirt über alle Werthe:

$$r, s = 1, 2, \ldots n,$$

so kommt:

$$\sum_{h,r,s} p_h^2 c_{hr} c_{kr} c_{hs} c_{ks} = \sum_r c_{kr}^2 \qquad (h, k, r, s = 1, 2, \ldots n).$$

und hieraus folgt unmittelbar, bei Anwendung der gemäss den Gleichungen (4) bestehenden Relationen:

$$\sum_s c_{hs} c_{ks} = \delta_{hk}, \qquad \sum_r c_{kr}^2 = 1 \qquad (h, k, r, s = 1, 2, \ldots n),$$

dass die Grössen p_k^2 sämmtlich gleich Eins sein müssen. Die Relationen (3) können also nur dann erfüllt sein, wenn man in den Gleichungen (1) die sämmtlichen Grössen p_h gleich ± 1 annimmt. Alsdann sind sie aber, wie aus den Gleichungen (5) folgt, in der That erfüllt, und es zeigt sich daher,

> dass man alle orthogonalen symmetrischen Systeme mit reellen Elementen a_{ik} (ausser dem Einheitssystem) erhält, wenn man:
>
> $$(6) \qquad a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
>
> setzt, dabei für m eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ und für die n^2 Grössen c die reellen Elemente irgend eines orthogonalen Systems nimmt.

Da die n^2 Grössen c die Relationen erfüllen:

$$\sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} + \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

so können die Gleichungen (6) durch folgende ersetzt werden:

$$(6') \qquad a_{ik} = -\delta_{ik} + 2\sum_{g=1}^{g=m} c_{gi}\, c_{gk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Fasst man, wie oben, die so bestimmten Grössen a_{ik} als die Coefficienten einer quadratischen Form auf und bildet alsdann die Schaar quadratischer Formen:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

welche auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$(7) \qquad \sum_{i,k} (u\delta_{ik} + va_{ik})\, x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so ersieht man aus den Gleichungen (6), dass diese Schaar (7) durch die Substitution:

$$y_i = \sum_k c_{ik}\, x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

aus der Schaar:

$$(8) \qquad (u+v)\sum_{g=1}^{g=m} y_g^2 + (u-v)\sum_{h=m+1}^{h=n} y_h^2$$

hervorgeht, und die reellen Elemente a_{ik} eines orthogonalen symmetrischen Systems können offenbar auch dadurch charakterisirt werden, dass die Grössen:

$$u\delta_{ik} + va_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Coefficienten einer Transformirten der Schaar (8) sind, oder auch dadurch,

> dass sie die Coefficienten einer durch irgend welche orthogonale Transformation aus:
>
> $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$
>
> entstehenden quadratischen Form sind.

Bei dieser Charakterisirung orthogonaler symmetrischer Systeme (a_{ik}) tritt es deutlich hervor, dass sie — wie Hr. Lipschitz nachgewiesen hat — eine $m(n-m)$fache Mannigfaltigkeit bilden. Denn erstens bildet die Gesammtheit der orthogonalen Transformationen, welche auf die Form:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \cdots - y_n^2$$

anzuwenden sind, eine $\frac{1}{2}n(n-1)$fache Mannigfaltigkeit. Zweitens muss jede orthogonale Transformation dieser Form in sich selbst auch die oben mit (8) bezeichnete Schaar quadratischer Formen, also sowohl die mit $u+v$ als auch die mit $u-v$ multiplicirte Summe

von Quadraten in sich selbst übergehen lassen; es sind dies also nur diejenigen Transformationen, bei welchen sowohl die Summe der m positiven Quadrate als auch die Summe der $n-m$ negativen Quadrate in sich selbst transformirt wird. Diese bilden aber eine $\frac{1}{2}(m(m-1)+(n-m)(n-m-1))$fache Mannigfaltigkeit, und die Differenz:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)-\tfrac{1}{2}\Big(m(m-1)+(n-m)(n-m-1)\Big),$$

welche gleich $m(n-m)$ ist, giebt also die Zahl für die wirkliche Mannigfaltigkeit der durch orthogonale Transformationen aus der Form:

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2-y_{m+1}^2-y_{m+2}^2-\cdots-y_n^2$$

entstehenden quadratischen Formen an.

II.

Dass eine orthogonale Transformation, bei welcher die Summe der m positiven Quadrate oder die Summe der $n-m$ negativen Quadrate der Form:

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2-y_{m+1}^2-y_{m+2}^2-\cdots-y_n^2$$

in sich selbst transformirt wird, keine neuen Systeme (a_{ik}) liefert, ist an sich klar, da bei zwei mittels der Substitutionssysteme:

$$(\mathfrak{c}_{ik}),\ (c_{ik}) \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

nach einander ausgeführten orthogonalen Transformationen, von denen die erstere z. B. nur die Quadratsumme:

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2$$

in eine ebensolche Quadratsumme überführt, offenbar eine quadratische Form mit denselben Coefficienten a_{ik} resultirt, wie wenn nur die eine Transformation mittels des Substitutionssystems (c_{ik}) angewendet wird. Um dies aber auch an den oben angegebenen Ausdrücken der Elemente a_{ik} nachzuweisen, sei:

$$(c'_{ik}) \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

das aus der Composition der Systeme $(\mathfrak{c}_{ik})$ und (c_{ik}) hervorgehende orthogonale System und also:

$$\sum_h \mathfrak{c}_{gh}c_{hi}=c'_{gi} \qquad (g,h,i=1,2,\ldots n).$$

Gemäss der Gleichung (6) ist nun:

$$(9)\qquad a_{pq}=\sum_{g=1}^{g=m}c'_{gp}c'_{gq}-\sum_{r=m+1}^{r=n}c'_{rp}c'_{rq} \qquad (p,q=1,2,\ldots n)$$

und daher:

$$(10)\qquad a_{pq} = \sum_{g,i,k} \mathfrak{c}_{gi}\mathfrak{c}_{gk}c_{ip}c_{kq} - \sum_{r,i,k} \mathfrak{c}_{ri}\mathfrak{c}_{rk}c_{ip}c_{kq}\,.$$
$$(g = 1, 2, \ldots m;\ r = m+1, m+2, \ldots n;\ i, k, p, q = 1, 2, \ldots n)$$

Da das System $(\mathfrak{c}_{ik})$, der Voraussetzung nach, die Transformation einer Summe von m Quadraten in sich selbst bewirkt, so erfüllen die Elemente $\mathfrak{c}_{ik}$ die Bedingungen:

$$(11)\qquad \mathfrak{c}_{rh} = \delta_{rh}\,,\quad \sum_{g=1}^{g=m} \mathfrak{c}_{gh}\mathfrak{c}_{gi} = \delta_{hi}\,,\quad \sum_{g=1}^{g=m} \mathfrak{c}_{gq}\mathfrak{c}_{gr} = 0\,,$$
$$(h, i = 1, 2, \ldots m;\ q = 1, 2, \ldots m, m+1, \ldots n;\ r = m+1, m+2, \ldots n)$$

und vermöge derselben geht die Gleichung (10) in folgende über:

$$a_{pq} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gp}c_{gq} - \sum_{r=m+1}^{r=n} c_{rp}c_{rq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots n),$$

welche in Verbindung mit der Gleichung (9) zeigt, dass die beiden orthogonalen Systeme (c_{ik}), (c'_{ik}) ein und dasselbe orthogonale symmetrische System (a_{ik}) liefern.

In noch einfacherer Weise zeigt sich dies bei dem Ausdruck:

$$(6')\qquad a_{ik} = -\delta_{ik} + 2\sum_{g=1}^{g=m} c_{gi}c_{gk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Denn es ist:

$$\sum_{g} c'_{gi}c'_{gk} = \sum_{i,k} c_{pi}c_{qk} \sum_{g} \mathfrak{c}_{gp}\mathfrak{c}_{gq} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m; \\ i, k, p, q = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und es ergiebt sich also bei Anwendung der Relationen (11) in der That die Gleichung:

$$\sum_{g} c'_{gi}c'_{gk} = \sum_{g} c_{gi}c_{gk} \qquad (g = 1, 2, \ldots m),$$

welche zeigt, dass die beiden aus den orthogonalen Systemen (c_{ik}), (c'_{ik}) mittels der Gleichungen (6′) hervorgehenden orthogonalen symmetrischen Systeme (a_{ik}) mit einander identisch sind.

Das System der mn Grössen:

$$c_{gi} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m \\ i = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

welche allein bei der mit (6′) bezeichneten Darstellung der Systeme (a_{ik}) vorkommen, ist nur den $\frac{1}{2}m(m+1)$ Bedingungen unterworfen:

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} c_{gi}c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots m).$$

Diese Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man die n durch die Indexwerthe $i = 1, 2, \ldots n$ charakterisirten Grössen c_{gi} durch:

$$\frac{\alpha c_{gi} + \beta c_{hi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

aber auch zugleich die n Grössen c_{hi} durch:

$$\frac{\beta c_{gi} + \alpha c_{hi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt, und das so veränderte System der Grössen c liefert, wenn es in den Gleichungen (6′) verwendet wird, dasselbe System der Grössen a_{ik} wie das ursprüngliche System der Grössen c. Nimmt man hierbei:

$$\alpha = c_{g1}, \quad \beta = c_{h1},$$

so tritt $\sqrt{c_{g1}^2 + c_{h1}^2}$ an Stelle von c_{g1} und *Null* an Stelle von c_{h1}. In dem neuen Systeme der mn Grössen c ist also das erste Element der $h$ten Horizontalreihe gleich Null. Das angegebene Verfahren kann nun offenbar dazu angewendet werden, um zuvörderst die ersten Elemente der sämmtlichen auf die erste folgenden Horizontalreihen, alsdann die sämmtlichen zweiten Elemente der auf die zweite folgenden Horizontalreihen u. s. f. gleich Null zu machen, und man kann auf diese Weise zu einem Systeme von mn Grössen c_{gi} gelangen, in welchem alle Elemente, deren erster Index grösser als der zweite ist, gleich Null sind, und welche immer noch die Bedingungen (12) erfüllen.[1] Es genügt also, solche Systeme (c_{gi}) in den Gleichungen (6′) zur Bildung orthogonaler symmetrischer Systeme (a_{ik}) zu verwenden.

Die Systeme (c_{gi}) von der angegebenen Beschaffenheit bestehen nur noch aus den $\frac{1}{2}m(m+1)$ Elementen:

$$c_{gk} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m; \\ k = g, g+1, \ldots m \end{pmatrix}$$

und aus den $m(n-m)$ Elementen:

$$c_{gr} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m; \\ r = m+1, m+2, \ldots n \end{pmatrix}.$$

Man kann sich dabei die letzteren $m(n-m)$ Elemente c_{gr}, d. h. die Elemente der $n-m$ letzten Verticalreihen, als unbestimmte Variable und die ersteren $\frac{1}{2}m(m+1)$ Elemente c_{gk}, welche in den ersten m

[1] Die obige Reduction eines nur durch die Bedingungen (12) beschränkten Systems variabler Grössen c_{gi} auf ein solches, in welchem für $g > i$ die Elemente sämmtlich gleich Null sind, bleibt auch auf alle speciellen Systeme reeller Grössen c_{gi} ohne Ausnahme anwendbar. Aber bei speciellen complexen Grössen kann der Nenner $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ gleich Null werden, und es bedarf dann einer anderen Art der Reduction. Statt, wie hier, elementare orthogonale Transformationen, d. h. solche zu benutzen, welche die Summe zweier Quadrate in eine eben solche transformiren, hat man alsdann von den elementaren Transformationen Gebrauch zu machen, bei welchen eine Summe von zwei Producten je zweier Variabeln, also eine Form $z_1 z_2 + z_3 z_4$, in sich selbst übergeht, sowie von denjenigen, bei welchen eine Form $z_1^2 + z_2 z_3$ in sich selbst transformirt wird.

Verticalreihen vorkommen, als Functionen derselben denken. Denn wenn man die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots m) \tag{12}$$

nach einander für:

$g = m, h = m;\ g = m-1, h = m;\ g = m-1, h = m-1;$
$g = m-2, h = m;\ g = m-2, h = m-1;\ g = m-2, h = m-2;$
. . . .

benutzt, so bestimmen sich der Reihe nach die Elemente:

$$c_{m,m},\ c_{m-1,m},\ c_{m-1,m-1},\ c_{m-2,m},\ c_{m-2,m-1},\ c_{m-2,m-2},\ \ldots,$$

nämlich $c_{m,m}$ durch die Gleichung:

$$c^2_{m,m} + c^2_{m,m+1} + \ldots + c^2_{m,n} = 1,$$

ferner $c_{m-1,m}$ durch die Gleichung:

$$c_{m-1,m} c_{m,m} + c_{m-1,m+1} c_{m,m+1} + \ldots + c_{m-1,n} c_{m,n} = 0,$$

dann $c_{m-1,m-1}$ durch die Gleichung:

$$c^2_{m-1,m-1} + c^2_{m-1,m} + \ldots + c^2_{m-1,n} = 1$$

u. s. f., und man sieht, dass hierbei nur die Vorzeichen der ersten m Verticalreihen unbestimmt bleiben, dass also jeder dieser Verticalreihen ein beliebiges Vorzeichen gegeben werden kann.

Dass die Mannigfaltigkeit der orthogonalen symmetrischen Systeme (a_{ik}) eine $m(n-m)$fache ist, tritt bei der angegebenen Bildungsweise in Evidenz, da die hierbei verwendeten Systeme (c_{gk}) genau $m(n-m)$ unbestimmte Elemente enthalten.

III.

Bezeichnet man mit:

$$w_{gp} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m \\ p = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

unbestimmte Variable, bildet daraus ein Modulsystem mit den $\frac{1}{2} m(m+1)$ Elementen:

$$-\delta_{gh} + \sum_p w_{gp} w_{hp} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots m;\ g \leq h \\ p = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{$\mathfrak{M}$}$$

und setzt dann:

$$u_{pq} = -\delta_{pq} + 2 \sum_g w_{gp} w_{gq} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m \\ p, q = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

so besteht die Congruenz:

$$\sum_p u_{pq} u_{pr} \equiv \delta_{qr} \left(\text{modd. } -\delta_{gh} + \sum_p w_{gp} w_{hp}\right) \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots m \\ p, q, r = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Denn es wird zuvörderst:

$$\sum_p u_{pq} u_{pr} = \sum_p \left(2 \sum_g w_{gp} w_{gq} - \delta_{pq}\right) \left(2 \sum_h w_{hp} w_{hr} - \delta_{pr}\right),$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots m; \quad p, q, r = 1, 2, \ldots n)$$

und wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite entwickelt, so kommt:

$$(15) \qquad 4 \sum_{g,h} w_{gq} w_{hr} \sum_p w_{gp} w_{hp} - 4 \sum_g w_{gq} w_{gr} + \delta_{qr} \,.$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots m; \quad p, q, r = 1, 2, \ldots n)$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks reducirt sich aber mittels der Congruenz:

$$\sum_p w_{gp} w_{hp} \equiv \delta_{gh} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots m \\ p = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) auf die Summe:

$$4 \sum_g w_{gq} w_{gr} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots m \\ q, r = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

es bleibt also in dem Ausdruck (15), wenn derselbe im Sinne der Congruenz für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) betrachtet wird, nur der letzte Theil δ_{qr} übrig, und die Richtigkeit der Congruenz (14) ist hiermit dargethan.

Nimmt man für die Grössen w_{gp} ganze Functionen irgend eines Bereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, so ersieht man aus der Congruenz (14),

> dass die mittels der Gleichungen (13) definirten Grössen u_{pq}, im Sinne der Congruenz für das Modulsystem ($\mathfrak{M}$) oder für irgend ein darin enthaltenes Modulsystem, ein orthogonales symmetrisches System bilden.

Es tritt hierdurch in Evidenz, dass die Gleichungen (6′), welche aus den Gleichungen (13) hervorgehen, indem man die Grössen u durch die Grössen a und die Grössen w durch die Grössen c ersetzt, orthogonale symmetrische Systeme mit complexen Elementen a_{ik} liefern, sobald man für die Grössen c complexe Grössen setzt, welche die Gleichungen (12) befriedigen; denn die sämmtlichen Elemente des Modulsystems ($\mathfrak{M}$) werden alsdann gleich Null, und die Congruenz (14) geht in die Gleichung (3) über, durch welche das System (a_{ik}) als ein orthogonales charakterisirt wird. Aber es bedarf noch des Nachweises, dass alle orthogonalen symmetrischen Systeme mit complexen Elementen auf die angegebene Weise erhalten werden, und hierfür ist nur nöthig zu zeigen, dass auch complexe Elemente a_{ik} in der im art. I mit (1) bezeichneten Form:

$$(1) \qquad a_{ik} = \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

angenommen werden können.

Während im art. I einfach davon ausgegangen worden ist, dass die reellen Elemente a_{ik} jedes symmetrischen Systems sich in der angegebenen Form darstellen lassen, muss für den Fall complexer Elemente a_{ik}, wo dies nicht mehr allgemein stattfindet, der Nachweis einer solchen Darstellbarkeit zugleich auf die Eigenschaft der Orthogonalität des Systems (a_{ik}) gegründet werden. Wegen dieser Eigenschaft müssen die Grössen a_{ik} die Relationen erfüllen:

$$(16) \qquad \sum_k a_{hk} a_{ik} = \delta_{hi} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

und es besteht hiernach die Gleichung:

$$(17) \qquad \sum_k (u\delta_{hk} - va_{hk})(u\delta_{ik} + va_{ik}) = (u^2 - v^2)\,\delta_{hi} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher u, v unbestimmte Variable bedeuten. Die beiden Systeme:

$$u\delta_{ik} + va_{ik}, \quad \frac{u\delta_{ik} - va_{ik}}{u^2 - v^2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

sowie die beiden quadratischen Formen:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \quad \frac{u}{u^2 - v^2}\sum_k X_k^2 - \frac{v}{u^2 - v^2}\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

sind also zu einander reciprok. Die erstere dieser beiden Formen repraesentirt eine »Schaar« quadratischer Formen, und jede Schaar, welche, wenn ϕ und ψ quadratische Formen mit den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten, durch den Ausdruck:

$$u\phi + v\psi$$

gegeben ist, lässt sich als ein Aggregat »elementarer Schaaren«:

$$u_g\phi_g + v_g\psi_g \qquad (g = 1, 2, 3, \ldots)$$

darstellen. Dabei bedeuten u_g, v_g lineare homogene Functionen von u, v, und ϕ_g, ψ_g quadratische Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und diese lassen sich durch lineare Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche mit:

$$y_g, \; y_{g1}, \; y_{g2}, \; y_{g3}, \ldots$$

bezeichnet werden mögen, in einer der folgenden Weisen ausdrücken:

$$(18) \qquad \begin{array}{ll} \phi_g = y_g^2, & \\ \phi_g = 2y_{g1}y_{g2}, & \psi_g = y_{g2}^2 \\ \phi_g = 2y_{g1}y_{g2} + y_{g3}^2, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} \\ \phi_g = 2y_{g1}y_{g2} + 2y_{g3}y_{g4}, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} + y_{g4}^2 \\ \phi_g = 2y_{g1}y_{g2} + 2y_{g3}y_{g4} + y_{g5}^2, & \psi_g = 2y_{g2}y_{g3} + 2y_{g4}y_{g5}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wenn die Determinante der Schaar $u\phi + v\psi$ nicht gleich Null ist.[1]

[1] Vergl. meine Mittheilung im Monatsbericht vom Januar 1874.

Die den ersten drei Fällen entsprechenden elementaren Schaaren $u_g \phi_g + v_g \psi_g$, nebst ihren reciproken, sind:

$$u_g y_g^2, \qquad \frac{1}{u_g} Y_g^2,$$

$$(19) \quad 2u_g y_{g1} y_{g2} + v_g y_{g2}^2, \qquad \frac{1}{u_g^2}(v_g Y_{g1}^2 - 2u_g Y_{g1} Y_{g2}),$$

$$2u_g y_{g1} y_{g2} + 2v_g y_{g2} y_{g3} + u_g y_{g3}^2, \quad \frac{1}{u_g^3}\Big((v_g Y_{g1} - u_g Y_{g3})^2 + 2u_g^2 Y_{g1} Y_{g3}\Big),$$

aber in dem ersten Falle, wo sich $u_g \phi_g + v_g \psi_g$ auf $u_g y_g^2$ reducirt, ist dies keine eigentliche Schaar. Nun gilt der bemerkenswerthe, vielfach mit Vortheil zu benutzende Satz:

(20) die reciproke eines Aggregats von quadratischen Formen, welche keine Variabeln mit einander gemein haben, ist gleich dem Aggregat der reciproken der einzelnen Formen.[1]

Die reciproke von $u\phi + v\psi$ ist daher gleich der Summe der reciproken derjenigen Formen:

$$u_g y_g^2, \; 2u_g y_{g1} y_{g2} + v y_{g2}^2, \; 2u_g y_{g1} y_{g2} + 2v_g y_{g2} y_{g3} + u_g y_{g3}^2, \; \ldots;$$

als deren Aggregat $u\phi + v\psi$ dargestellt ist, und da die reciproke jeder von diesen Formen, mit alleiniger Ausnahme der ersten, im Nenner die zweite oder eine höhere Potenz einer linearen Function von u und v enthält, so ergiebt sich das Resultat:

(21) eine Schaar $u\phi + v\psi$ kann dann, und nur dann, in eine Summe:

$$\sum_{g=1}^{g=n} u_g y_g^2$$

transformirt werden, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineare homogene Functionen von u, v und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, wenn die reciproke der quadratischen Form:

$$u\phi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

so dargestellt werden kann, dass der Nenner, welcher eine homogene Function von u, v ist, keine gleichen Factoren enthält.

Eben dieselbe Bedingung ist offenbar nothwendig und hinreichend für die Möglichkeit der simultanen Transformation der beiden quadratischen Formen:

[1] Der Satz gilt ebenso für bilineare Formen. Ich habe ihn in meinen algebraischen Universitätsvorlesungen sehr häufig angewendet. Seine Richtigkeit ergiebt sich unmittelbar aus der Bildungsweise reciproker Formen.

$$\phi(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

in Summen von Quadraten, da eine solche Transformation vollkommen identisch mit jener Transformation der Schaar $u\phi + v\psi$ in eine Summe:

$$u_1 y_1^2 + u_2 y_2^2 + \ldots + u_n y_n^2$$

ist, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineare homogene Functionen von u, v und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten.

Nimmt man:

$$u\phi + v\psi = u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und wendet das angegebene Resultat (21) auf diese besondere Schaar $u\phi + v\psi$ an, deren reciproke durch ihren obigen Ausdruck:

$$\frac{u}{u^2 - v^2}\sum_k X_k^2 - \frac{v}{u^2 - v^2}\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so dargestellt ist, dass der Nenner $u^2 - v^2$ keine gleichen Factoren enthält, so erschliesst man hieraus unmittelbar die Transformirbarkeit der Form:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

in eine Summe:

$$\sum_k (uq_k + vp_k) y_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher p_k, q_k complexe Grössen und $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit complexen Coefficienten bedeuten. Setzt man demgemäss:

$$\sqrt{q_k}\, y_k = \sum_i c_{ki} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so erhält man die Transformationsgleichungen:

$$\sum_h c_{hi} c_{hk} = \delta_{ik}, \quad \sum_h p_h c_{hi} c_{hk} = a_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

aus denen erstens hervorgeht, dass die Coefficienten c_{hi} ein orthogonales System mit complexen Elementen bilden, und zweitens dass, wie nachgewiesen werden sollte, die complexen Grössen a_{ik}, weil sie als die Elemente eines zugleich orthogonalen und symmetrischen Systems vorausgesetzt worden sind, sich in derselben (im art. I mit (1) bezeichneten) Form darstellen lassen, wie jedes symmetrische System mit reellen Elementen.

IV.

In den vorstehenden Entwickelungen ist nachgewiesen worden, dass die Elemente jedes orthogonalen symmetrischen Systems (a_{ik}) sich durch Gleichungen:

$$(6)\qquad a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi}c_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi}c_{hk} \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

und zwar so darstellen lassen, dass die Grössen c die Elemente eines orthogonalen Systems sind, aber die zu einer solchen Darstellung erforderlichen Grössen c sind nicht rational durch die Grössen a_{ik} bestimmt. Wird also das Problem der Aufstellung aller orthogonalen symmetrischen Systeme dahin praecisirt,

> dass alle derartigen, einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörigen Systeme (a_{ik}) aufgestellt werden sollen,

so bedarf die oben angegebene Lösung noch einer wesentlichen Modification.

Um diese darzulegen knüpfe ich an das im vorigen Abschnitt entwickelte Resultat an, dass für die Elemente eines orthogonalen symmetrischen Systems (a_{ik}) stets eine Transformationsgleichung besteht:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k = \sum_h (uq_h+vp_h)y_h^2 \qquad (h,i,k=1,2,\ldots n),$$

in welcher $y_1, y_2, \ldots y_n$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Benutzt man nun zur wirklichen Herleitung dieser Transformationsgleichung, und also zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten sowie der Coefficienten p_h, q_h, das Reductionsverfahren, welches ich für Schaaren quadratischer Formen in meiner im Monatsbericht vom Januar 1874 abgedruckten Mittheilung auseinandergesetzt habe, so ergeben sich diese Coefficienten sämmtlich als Grössen desjenigen Rationalitätsbereichs, welchem die Coefficienten der Schaar, also hier die Grössen a_{ik}, und die verschiedenen Werthe des Verhältnisses $u:v$ angehören, für welche die Determinante der Schaar verschwindet. Diese Werthe sind aber im vorliegenden Falle nur ± 1, da aus der oben im art. III mit (17) bezeichneten Gleichung unmittelbar erhellt, dass die Determinante der Schaar:

$$u\sum_k x_k^2 + v\sum_{i,k} a_{ik}\,x_i\,x_k \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

keine anderen Linearfactoren als $u+v$ und $u-v$ enthält. Sollen also die Coefficienten a_{ik} dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören, so müssen, wenn die obige Transformationsgleichung durch die Substitution:

$$y_h = \sum_i b_{hi}\, x_i \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

befriedigt wird, die Coefficienten:

$$b_{hi}\,,\, p_h\,,\, q_h \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

sämmtlich Grössen des gegebenen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ sein.

Aus derselben Transformationsgleichung folgen für die Coefficienten b, p, q die Relationen:

$$(22) \qquad \sum_h p_h\, b_{hi}\, b_{hk} = a_{ik}\,,$$

$$(23) \qquad \sum_h q_h\, b_{hi}\, b_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und aus den letzteren ergeben sich ferner die Relationen:

$$(24) \qquad q_k \sum_h b_{ih}\, b_{kh} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Denn vermöge jener Relationen (23) ist:

$$(25) \qquad \sum_{g,i} b_{fg}\, q_i\, b_{ig} \left(q_k \sum_h b_{ih}\, b_{kh} - \delta_{ik} \right) = 0 \qquad (f, g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und der Werth der Determinante:

$$\left| \sum_{g=1}^{g=n} b_{fg}\, q_i\, b_{ig} \right| \qquad (f, i = 1, 2, \ldots n)$$

gleich *Eins*. Die Gleichungen (25) können demnach nur dann bestehen, wenn die Grössen b, q den Relationen (24) genügen.[1]

Wegen der vorausgesetzten Orthogonalität des Systems (a_{ik}) müssen die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_i a_{ir}\, a_{is} = \delta_{rs} \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllt sein. Setzt man hierin die aus den Relationen (22) hervorgehenden Werthe der Elemente a_{ir}, a_{is} ein, so kommt:

$$\sum_{g,h} p_g\, p_h\, b_{gr}\, b_{hs} \sum_i b_{gi}\, b_{hi} = \delta_{rs} \qquad (g, h, i, r, s = 1, 2, \ldots n).$$

und da gemäss den Relationen (24) die auf i bezügliche Summe den Werth $\dfrac{\delta_{gh}}{q_h}$ hat, so resultirt die Gleichung:

[1] Die vollständige Aequivalenz der Relationen (23) und (24) erhellt unmittelbar aus den Gleichungen (39) im art. V, wenn man darin:

$$w_{hi} = u\sqrt{q_h}\, b_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

setzt.

$$\sum_h \frac{p_h^2}{q_h} b_{hi} b_{hk} = \delta_{ik} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

aus deren Verbindung mit den Relationen (23) folgt, dass:

$$\sum_h \left(\frac{p_h^2}{q_h} - q_h \right) b_{hi} b_{hk} = 0 \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und also:

$$(26) \qquad p_h^2 = q_h^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

sein muss.

Eben dieselbe Folgerung ergiebt sich in übersichtlicher Weise, wenn man von den (symbolischen) Compositionsgleichungen Gebrauch macht:

$$(27) \qquad (b)\,(p)\,(\bar{b}) = (a)\,, \quad (b)\,(q)\,(\bar{b}) = (1)\,,$$

durch welche die Relationen (22) und (23) dargestellt werden können. Dabei bedeutet

(1) das Einheitssystem (δ_{ik}),
(b) das System (b_{ik}),
(b) das transponirte System derselben Grössen b_{ik},
(p) das System, welches in der Diagonale die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$, im Übrigen aber nur Nullen enthält,
(q) das ebenso aus den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ gebildete System.

Bezeichnet man ferner mit (b') das reciproke System von (b) und mit (b') das reciproke von (b), so kann die zweite der Compositionsgleichungen (27) durch die folgende ersetzt werden:

$$(b')\left(\frac{1}{q}\right)(b') \qquad (1)\,,$$

also die erste durch:

$$(\bar{b}')\left(\frac{1}{q}\right)(b')\,(b)\,(p)\,(\bar{b}) = (a)\,;$$

und diese Compositionsgleichung reducirt sich mit Hülfe der Relationen:

$$(b')\,(b) \qquad (1)\,, \quad \left(\frac{1}{q}\right)(p) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)$$

auf folgende:

$$(28) \qquad (\bar{b}')\left(\frac{p}{q}\right)(\bar{b}) = (a).$$

Da endlich das System (a), als orthogonales symmetrisches System, das reciproke seiner selbst, d. h. da $(a)\,(a) = (1)$ und folglich:

$$(\bar{b})\,(a)\,(a)\,(\bar{b}') = (\bar{b})\,(\bar{b}') = (1)$$

ist, so erhält man, wenn man hier die Systeme (a) durch den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (28) ersetzt, die Relation:

$$(\bar{b})(\bar{b}')\left(\frac{p}{q}\right)(\bar{b})(\bar{b}')\left(\frac{p}{q}\right)(\bar{b})(\bar{b}') = (1)$$

und daher, mit Benutzung der Gleichungen:

$$(\bar{b})(\bar{b}') = (1), \quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p^2}{q^2}\right)$$

das Endresultat:

$$\left(\frac{p^2}{q_2}\right) = (1),$$

d. h. wie oben:

$$p_h^2 = q_h^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{26}$$

Es sei demgemäss:

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots p_m = q_m,$$
$$p_{m+1} = -q_{m+1}, p_{m+2} = -q_{m+2}, \ldots p_n = -q_n,$$

so dass die Gleichungen (22) in folgende übergehen:

$$a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} q_g b_{gi} b_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} q_h b_{hi} b_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n). \tag{29}$$

oder, bei Anwendung der Gleichungen (23):

$$a_{ik} = -\delta_{ik} + 2\sum_{g=1}^{g=m} q_g b_{gi} b_{gk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n). \tag{30}$$

Die dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehörigen Elemente a_{ik} eines orthogonalen symmetrischen Systems lassen sich also stets auf die hier angegebene Weise durch Grössen:

$$q_h, b_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

ausdrücken, welche selbst dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören und dabei den obigen Relationen (24) genügen. Es ist aber auch andererseits zu zeigen, dass, wie immer Grössen q_h, b_{hi} gemäss den Bedingungsgleichungen (24) aus dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ entnommen werden mögen, die daraus mittels der Gleichungen (29) oder (30) bestimmten Grössen a_{ik} stets ein orthogonales symmetrisches System bilden.

Zu dem angegebenen Zweck ist nur nachzuweisen, dass die mittels der Gleichungen (30) bestimmten Grössen a_{ik}, welche offenbar die Symmetriebedingungen:

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllen, auch den Orthogonalitätsbedingungen genügen:

$$\sum_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots n);$$

es ist also die Richtigkeit der folgenden Gleichung darzuthun:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(2\sum_{g=1}^{g=m} q_g\, b_{gi}\, b_{gr} - \delta_{ir}\right) \left(2\sum_{h=1}^{h=m} q_h\, b_{hi}\, b_{hs} - \delta_{is}\right) = \delta_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n).$$

Entwickelt man nun den Ausdruck auf der linken Seite, so kommt:

$$4\sum_{g,h} q_g\, b_{gr}\, b_{hs}\, q_h \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi}\, b_{hi} - 4\sum_g q_g\, b_{gr}\, b_{gs} + \delta_{rs} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots m \\ r, s = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und der Werth dieses Ausdrucks reducirt sich mit Hülfe der Gleichung (24) in der That auf δ_{rs}. Dabei werden von den Gleichungen (24) nur die folgenden verwendet:

$$(31) \qquad q_h \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi}\, b_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots m),$$

in welchen der vordere Index der Grössen b nicht grösser als m ist. Das hiermit erlangte Resultat kann daher folgendermaassen formulirt werden:

Man erhält alle orthogonalen symmetrischen Systeme, deren Elemente a_{ik} einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören, wenn man diesem Bereich irgend welche, den $\frac{1}{2} m (m-1)$ Bedingungen:

$$(32) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi}\, b_{hi} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots m;\ g < h)$$

genügende mn Grössen b_{gi} entnimmt und daraus die n^2 Elemente a_{ik} mittels der Gleichungen:

$$(33) \qquad a_{ik} = -\delta_{ik} + 2\sum_{g=1}^{g=m} \frac{b_{gi}\, b_{gk}}{b_{g1}^2 + b_{g2}^2 + \ldots + b_{gn}^2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt.

Hierbei können die sämmtlichen $mn - \frac{1}{2} m (m-1)$ Grössen b_{gi}, bei welchen $g \leq i$ ist, beliebig angenommen und die $\frac{1}{2} m (m-1)$ Gleichungen (32) zur Bestimmung der übrigen $\frac{1}{2} m (m-1)$ Grössen b_{gi} verwendet werden, in Beziehung auf welche sie linear sind.

(Fortsetzung folgt.)



Über das Problem der Saecularstörungen.

Von Prof. H. Bruns
in Leipzig.

(Vorgelegt von Hrn. Kronecker.)

Hr. Kronecker hat in diesen Sitzungsberichten (1888, S. 417 ff.) mehrere Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten mitgetheilt, deren Inhalt von astronomischer Seite, wie ich Gelegenheit gehabt habe wahrzunehmen, zum Theil geradezu missverstanden worden ist. Es sei mir deshalb gestattet, an einem einfacheren Beispiele, nämlich dem Problem der Saecularstörungen, kurz zu zeigen, wie in diesem Falle die Dirichlet'sche Schlussweise »mit einem Federstriche« zu einem Stabilitätsbeweise führt.

Fasst man das von der Sonne, den Planeten und ihren Satelliten gebildete mechanische System als einen Complex starrer Körper auf, welche gegen einander gravitiren, so lässt sich bei passender Wahl der Variabeln die Untersuchung der Bewegung in der Bahn und der Rotation in eine einzige Analyse mittels des canonischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dW_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w_\alpha}, \quad \frac{dw_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial W_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots)$$

zusammenfassen, wo H die Differenz zwischen der lebendigen Kraft T und der Kräftefunction U bedeutet, und wo ferner die Zahl der Variablenpaare w, W vorläufig gleich dem Sechsfachen der Zahl der Körper ist. Der Einfachheit halber möge hier die Untersuchung der Rotation bei Seite gelassen, d. h. jeder Körper durch seine im Schwerpunkte concentrirte Masse ersetzt werden. Bezieht man dann den Ort jedes Satelliten auf seinen Planeten, ferner den Schwerpunkt jedes Partialsystems »Planet plus Satelliten« auf die Sonne, so entsprechen diesen relativen Örtern ebenso viele Bahnbewegungen, die wir als elliptische mit osculirenden, d. h. variabeln Elementen auffassen wollen. Es seien, wie üblich, a die Halbaxe, ϕ der Excentricitätswinkel, J die Neigung, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens auf der gewählten

Fundamentalebene, ω der Abstand des Pericentrums vom Knoten und M die mittlere Anomalie, dann kann man für die Bahn mit der Nummer α als Variabelnpaare W, w ansetzen

$$W = \left| \begin{array}{l} M_\alpha \\ \omega_\alpha \\ \Omega_\alpha \end{array} \right. \qquad w = \left| \begin{array}{l} k_\alpha \sqrt{a_\alpha}\,, \\ k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\phi_\alpha\,, \\ k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\phi_\alpha \cos J_\alpha\,, \end{array} \right.$$

wo die k_α nur von den Massen abhängende Constanten bedeuten. So lange die Elemente a und ϕ innerhalb gewisser Grenzen um Mittelwerthe herumschwanken, welche dem gegenwärtigen Zustande des Sonnensystems entsprechen, lässt sich H trigonometrisch nach den W in eine unbedingt convergente Reihe entwickeln. Die Coefficienten sind wiederum als Reihen darstellbar, in denen jedes Glied die Form

$$C a_1^\alpha a_2^\beta \ldots \Phi_{\prime}(\phi_1)\, \Phi_{\prime\prime}(\phi_2) \ldots \Psi_{\prime}(J_1)\, \Psi_{\prime\prime}(J_2) \ldots$$

besitzt. Hierin bedeuten: die C Factoren, welche nur von den Massen abhängen, die $\alpha, \beta, \ldots$ positive oder negative Zahlen, die Φ und Ψ Functionen der Argumente ϕ und J, welche ausser von den hingeschriebenen Variablen nur noch von je drei ganzzahligen Parametern abhängen und im Wesentlichen identisch sind mit Ausdrücken, die bereits Hansen näher untersucht hat.[1]

Der Ausdruck H ist seiner Bedeutung nach von der Wahl der Coordinatenaxen unabhängig, ändert sich also auch nicht, wenn man die Anfangsrichtung für die Zählung der Längen in der Fundamentalebene verschiebt. Diese Verschiebung lässt die Elemente a, ϕ, J, ω, M ungeändert, ändert dagegen sämmtliche Ω um eineunddieselbe Grösse. Hieraus folgt

$$\text{(A)} \qquad \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha} = 0.$$

Diese Relation gilt auch für jedes einzelne Glied der trigonometrischen Entwickelung von H. Mit Rücksicht auf die Bewegungsgleichungen folgt aus (A)

$$\frac{d}{dt} \sum_\alpha k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\phi_\alpha \cos J_\alpha = 0\,,$$

$$\sum_\alpha k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\phi_\alpha \cos J_\alpha = \text{constans}.$$

Die letzte Gleichung ist offenbar nichts anderes, als der eine der drei Flächensätze. Bezeichnet man in der trigonometrischen Entwickelung

[1] Abh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. II (1853) S. 181—281, 283—376. Die Hansen'sche Untersuchung lässt sich übrigens wesentlich vervollständigen durch die Aufstellung der Differentialrelationen und der linearen Differentialgleichungen dritter bez. vierter Ordnung, denen die Φ und Ψ genügen.

von H die Gesammtheit der von den M unabhängigen Glieder mit H' und setzt $H = H' + H''$, so beruht die übliche Behandlung der Saecularstörungen darauf, dass man in H den Bestandtheil H'' unterdrückt. In diesem Falle verwandeln sich aber die a_α in Constanten, andererseits wird in der dann ebenfalls noch geltenden Gleichung

$$\sum_\alpha k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\phi_\alpha \cos J_\alpha = \text{constans}$$

die linke Seite ein wirkliches Maximum für $\phi_\alpha = 0$, $J_\alpha = 0$, woraus nach der von Dirichlet angewandten Schlussweise sofort folgt, dass die ϕ und J, wenn sie in einem gegebenen Zeitpunkte hinreichend kleine Werthe besitzen, auch beständig klein bleiben.



Über die Entwickelung des Uterus und der Vagina beim Menschen.

Von Dr. W. Nagel
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer.)

Im Anschluss an meine früher mitgetheilten Arbeiten über die Entwickelung des Urogenitalsystems des Menschen (s. Sitzungsberichte von 1888 und 1889) habe ich in dem I. anatomischen Institut zu Berlin die Untersuchungen über das spätere Schicksal der Müller'schen Gänge an einer grossen und ziemlich vollständigen Reihe von frischen menschlichen Embryonen, welche ich zum grössten Theile Hrn. Prof. Gusserow verdanke, bisher fortgesetzt.

Das Ergebniss meiner Untersuchungen ist folgendes.

Von den frühesten Entwickelungsstufen an zeigen der Geschlechtsstrang (die vereinigten Müller'schen Gänge) und die angrenzenden Theile der Plicae urogenitales (der spätere uterine Abschnitt der Tube mit angrenzendem Stück der Ligamenta lata) eine seichte dorso-ventrale Krümmung mit vorderer Concavität. Diese gekrümmte Lage ist zunächst eine nothwendige Folge der Entwickelung der Müller'schen Gänge, indem dieselben, wie ich früher (s. oben) mitgetheilt habe, den Wolff'schen Gängen entlang bis zu Sinus Urogenitalis abwärts wachsen. Da nun die Wolff'schen Gänge, zum Theil der Krümmung des embryonalen Körpers folgend, in einem Bogen von oben nach vorne unten verlaufen, so müssen die Müller'schen Gänge denselben Weg nehmen. Je älter der Embryo, um so ausgesprochener wird die Vorwärtsneigung des Geschlechtsstranges; sie ist wohl bedingt theils durch das Herabsinken der Geschlechtsdrüsen mit den Resten der Wolff'schen Körper in das kleine Becken, theils durch den Druck der auf dem Geschlechtsstrange ruhenden Gedärme. Dass ein solcher Druck mit genauer Anpassung der Organe an den beschränkten Raum thatsächlich sehr früh vorhanden ist, wird dadurch bewiesen, dass ich wiederholentlich, schon bei Embryonen mit einer Kopf-Steisslänge von $6-7^{cm}$, an der Innen-

fläche des Bauchraumes Abdrücke gesehen habe, die in Form und Ausdehnung Darmschlingen entsprachen.

Die eben besprochene Krümmung gestaltet sich zuerst als ein nahezu gleichmässig verlaufender Abschnitt eines Kreises, dessen Centrum man sich ausserhalb des Körpers, etwas oberhalb der Symphysis pubis, zu denken hat und an welchem man etwa in der Mitte eine flachwinklige Knickungsstelle bemerkt. Spätere Entwickelungsstufen zeigen, dass dieser Knickungswinkel im Lumen des Geschlechtsstranges derjenigen Stelle entspricht, wo der äussere Muttermund sich bildet.

Bei grösseren Embryonen (mit einer Kopf-Steisslänge von 6 bis 10^{cm} und darüber) gesellt sich noch eine besondere Neigung des oberen Abschnittes des Geschlechtsstranges nach vorne hinzu, welche mitunter so stark wird, dass das Corpus Uteri horizontal liegt; der hierdurch entstandene, von dem vorher genannten wohl zu unterscheidende neue Knickungswinkel liegt in der Gegend des inneren Muttermundes.

Die eben geschilderte topographische Lage des Geschlechtsstranges habe ich an allen meinen Embryonen gesehen; niemals habe ich einen gestreckten Verlauf, geschweige denn eine Rückwärtsneigung des Geschlechtsstranges gefunden. Es ist wohl deshalb der Schluss gerechtfertigt, dass die von anderen Autoren für ältere Foeten und Neugeborene (s. Kölliker, Über die Lage der weiblichen inneren Geschlechtsorgane; Festschrift zu Ehren Henle's. Bonn 1882. Langerhans, Über 40 Sagittalschnitte durch gefrorene Leichen neugeb. Mädchen, A. f. Gynaekologie 1878. Beigel, Pathologische Anatomie der weiblichen Unfruchtbarkeit. Braunschweig 1878. u. A.), und Erwachsene (s. R. Virchow, Über die Knickungen der Gebärmutter. Verhandlungen der Gesellschaft f. Geburtshülfe zu Berlin. Bd. IV; K. Schröder, Über Aetiologie und intrauterine Behandlung der Deviationen des Uterus nach vorn und hinten. Volkmann's Sammlung klinischer Vorträge Nr. 37; Aran, Études anatomiques et anatomo-pathologiques sur la statique de l'Uterus. Arch. gén. de Méd. 1858; E. Martin, Die Neigungen und Beugungen der Gebärmutter. Berlin 1870; B. S. Schultze, Die Pathologie und Therapie der Lageveränderungen der Gebärmutter. Berlin 1881; Waldeyer, Lage der Beckenorgane bei Nulliparen, Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 1888. u. A.) als normal angesehene (»typische« nach Waldeyer) Lage der inneren weiblichen Genitalien mit nach vorne geneigter und mehr oder weniger über die vordere Fläche gebeugter Gebärmutter die ursprüngliche ist: sie ist eine naturgemässe Folge der Entwickelung des Geschlechtsstranges.

Das distale (solide) Ende des Müller'schen Ganges besteht, wie ich früher (s. oben) mitgetheilt habe, während der Abwärtswanderung dem Wolff'schen Gange entlang, aus eigenartigen, von dem Cylinderepithel des eigentlichen Ganges wohl zu unterscheidenden grossen Zellen. Auch nachdem die Gänge den Sinus Urogenitalis erreicht haben und mit einander verschmolzen sind, zeigt das distale Ende dieses eigenthümliche Verhalten. Schritthaltend mit dem Wachsthum des Embryo nimmt der eben besprochene Abschnitt der Müller'schen Gänge an Ausdehnung (Länge) zu und bildet in dieser Weise die Anlage der Vagina. Es besteht also nach meinen Beobachtungen von vornherein ein Unterschied in der Epithelbekleidung des proximalen und distalen Abschnittes des Geschlechtsstranges: in dem erstgenannten (Uterus) wird das Epithel aus hohen und schmalen Cylinderzellen mit länglichen Kernen gebildet, in dem letztgenannten (Vagina) sind die Epithelzellen kürzer, breiter und haben rundliche Kerne. Dieser Unterschied der Epithelbekleidung ist besonders in die Augen fallend, wenn man die beiden obenerwähnten Abschnitte des Geschlechtsstranges mit einander vergleicht; jedoch ist der Übergang zwischen den beiden Epithelarten kein scharfer, plötzlicher; derselbe vollzieht sich vielmehr allmählich innerhalb einer Strecke von einigen Mikromillimetern; je älter der Embryo, um so schärfer tritt jedoch der Epithelunterschied hervor. Aus den späteren Entwickelungsstufen (bei Embryonen mit einer Kopf-Steisslänge von 20^{cm} und darüber) ist zu entnehmen, dass die Übergangsstelle gleichwerthig ist mit derjenigen Stelle etwas oberhalb des äusseren Muttermundes, wo unter normalen Verhältnissen im späteren Cervicalkanale die Grenze zwischen dem Cylinderepithel des Uterus und dem Plattenepithel der Vagina zu sehen ist. Es findet also an keiner Stelle des Geschlechtsstranges und auf keiner Entwickelungsstufe eine Umwandlung von hochzelligem, deutlich ausgesprochenem Cylinderepithel in Plattenepithel statt, wie man allgemein anzunehmen scheint (siehe u. A. Tourneux et Legay, Mémoire sur le Developpement de l'Uterus et du vagin. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, 1884). Es besteht vielmehr nach meinen Untersuchungen von vornherein und während der ganzen Entwickelung eine gewisse Trennung der beiden Abschnitte des Geschlechtsstranges nicht allein durch den eben erwähnten Epithelunterschied, sondern auch durch den mehr gestreckten Verlauf (nach vorn unten) des distalen Theiles und durch die Beschaffenheit der umliegenden mesodermalen Bildungszellen. Auch der proximale Abschnitt zeigt an verschiedenen Stellen ein verschiedenes Aussehen, indem das cylindrische Epithel desselben im Bereich des späteren Corpus

Uteri niedriger ist als im Bereiche des späteren Cervicalkanals, auch wird es an letztgenannter Stelle mehrschichtig und der Epithelsaum hat an Längsschnitten ein wellenförmiges Aussehen. Die Gestalt des proximalen Theiles zeigt ferner die schon erwähnte Neigung und Beugung nach vorne; die Bildungszellen dieses Abschnittes ferner verhalten sich anders, indem alsbald die Zellen der peripheren Schichten eine spindelförmige Gestalt annehmen; auch werden hier und dort, auf die Uterushöhle senkrecht verlaufende, zarte Balken sichtbar.

Die endgültige Trennung zwischen Uterus und Vagina und zwar durch die Bildung der Portio vaginalis findet auf einer späteren Entwickelungsstufe statt. Die ersten Zeichen dieses Vorganges habe ich bei Embryonen mit einer Kopf-Steisslänge von 10—14^{cm} gefunden, und zwar unter folgender Erscheinung. Etwas unterhalb der oben erwähnten Epithelgrenze bemerkt man, dass das Epithel in Gestalt eines Zapfens (bei Längsschnitten) in die hintere Wand des Geschlechtsstranges einwuchert und zwar etwas schräg nach oben; hierdurch geschicht die Anlage und Abgrenzung der hinteren Muttermundslippe. Um diese Zeit deutet nur eine buckelige Hervorragung der vorderen Wand des Geschlechtsstranges nach dem Lumen zu diejenige Stelle an, wo sich später die vordere Muttermundslippe bildet. Die Trennung dieser von der Vagina findet in derselben Weise (vergl. auch die Arbeiten von Dohrn, Über die Müller'schen Gänge und die Entwickelung des Uterus. Monatsschrift für Geburtskunde, Bd. XXIV und: Über die Entwickelung des Hymen. Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg, 1875. v. Mihalkovicz, Entwickelung des Harn- und Geschlechtsapparates der Amnioten. Internationale Monatsschrift für Anatomie und Histologie, Bd. II. van Ackeren, Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der weiblichen Sexualorgane des Menschen. Inaugural-Dissertation; Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Bd. 48. Tourneux et Legay a. a. O. u. A.) statt — durch eine Einwucherung des Epithels also — wie oben für die Bildung der hinteren Lippe beschrieben.

Wie schon gesagt findet die Bildung der Portio vaginalis Uteri am ersten Knickungswinkel des Lumens des Geschlechtsstranges statt; damit ist zugleich die typische Richtung der Portio vaginalis nach hinten gegeben.

Die Einwucherung des Epithels behufs Bildung der Portio ist gleichwerthig mit dem bei der Bildung der Vaginalfalten obwaltenden Vorgange.

Die oben beschriebenen von Wucherungen des Epithels bewirkten

Einkerbungen an der Wand des Cervicalkanals sind die ersten Anlagen der Cervicaldrüsen.

Die Mündungsstelle der MÜLLER'schen Gänge in den Sinus Urogenitalis (Canalis Urogenitalis nach RATHKE) jüngerer Embryonen ist gleichwerthig mit dem Introitus vaginae älterer Embryonen und Erwachsener[1]. Sobald also die MÜLLER'schen Gänge in der früher von mir beschriebenen (s. o.) Weise den Canalis Urogenitalis erreicht haben, ist das Orificium vaginae vestibulare gegeben. Von einem später stattfindenden Durchbruch einer abschliessenden bindegewebigen Membran ist nicht die Rede.

Die Mündung der vereinigten MÜLLER'schen Gänge in den Canalis Urogenitalis hat bei den verschiedenen Embryonen ein etwas verschiedenes Aussehen, indem die Ränder der Mündung (Lippen) bald gegen einander umgekrümmt sind, bald parallel zu einander stehen. Während die Ränder der Mündung in Bezug auf Entfernung von einander und in ihrem übrigen Verhalten zunächst ein annähernd unverändertes Aussehen bewahren, geht alsbald die Anlage der Vagina besondere Veränderungen ein, indem neben einem bedeutenden Längenwachsthume der anfänglich sehr kurzen Scheide eine ausgiebige Faltenbildung und eine eigenartige Anhäufung von Epithelien Platz greift. Diese Anhäufung von Epithelien findet zuerst in dem distalen Theile der Vagina statt, dicht oberhalb der Mündung in den Sinus Urogenitalis, wodurch die Vagina an dieser Stelle (bei Embryonen von 10—12^{cm} Kopf-Steisslänge und darüber) eine bauchige, oder blasige Erweiterung erfährt. Durch diese Erweiterung ist die erste Anlage des Hymen gegeben. Da nämlich die Ränder der ursprünglichen Mündung von der Erweiterung nicht betroffen werden, da die Mündung vielmehr ihre anfängliche Enge behält und die Erweiterung oberhalb derselben liegt, so muss sich in dieser Weise ein Ring bilden, durch welchen die Vagina von dem Sinus Urogenitalis abgeschlossen wird. Bis zu einem gewissen Grade muss dies auch der Fall sein bei denjenigen Embryonen, wo auf frühen Entwickelungsstufen die Wandungen des Geschlechtsrohres bis zur Mündung hin nicht gegen einander geneigt sind, sondern mehr parallel verlaufen.

Da ich bei mehreren meiner Embryonen, an Sagittalschnitten durch die Medianebene gesehen habe, dass die Hymenalöffnung an dieser Stelle (in der Medianlinie also) verhältnissmässig grösser ist

[1] A. a. O. (Sitzungsberichte von 1889 S. 20) habe ich die Meinung ausgesprochen, dass die Mündungsstelle der MÜLLER'schen Gänge in den Sinus Urogenitalis zu Orificium Uteri externum wird. Spätere Untersuchungen haben mir jedoch gezeigt, dass diese Ansicht nicht richtig war; ich muss vielmehr die hier gegebene Schilderung der Entwickelungsvorgänge als die zutreffende bezeichnen.

als es der Regel nach der Sachlage bei Neugeborenen und Erwachsenen entsprechen würde, so muss ich annehmen, dass in gewissen Fällen auf einer späteren Entwickelungsstufe auch ein actives Wachsthum, insbesondere des hinteren Theiles der Scheidenklappe stattfindet, wodurch die Hymenalöffnung theils enger, theils mehr nach vorne verlegt wird.

Auf allen Entwickelungsstufen, wenigstens bis zu einer Grösse des Embryo von 20—22^{cm} Kopf-Steisslänge, ist die Öffnung des Hymenalringes mit Epithelien ausgefüllt.

Die vorhin erwähnte Anhäufung von Epithelien und Erweiterung der Vagina schreitet allmählich aufwärts und erreicht schliesslich einen ziemlich hohen Grad; bei Embryonen aus dem 6., 7. und 8. Monat bildet die Vagina eine $^1/_2$ bis 1 cm. weite faltige Röhre, welche die Länge des Uterus um etwa ein Drittheil überragt.

Berichtigung.

S. 402 Z. 11 v. u. st. 0.″13 l. 0.″013.

Ausgegeben am 5. Juni.

1890.
XXVII.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

22. Mai. Sitzung der philosophisch-historischen Classe.

Vorsitzender Secretar: Hr. Curtius.

Hr. Dümmler las über Christian von Stavelot und seine Auslegung zum Matthaeus.

Die Mittheilung wird in den Sitzungsberichten erfolgen.

Ausgegeben am 5. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei



SITZUNGSBERICHTE

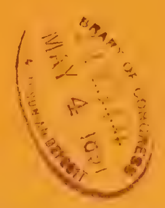
DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Jahrgang 1890.



VERZEICHNISS DER IM VIERTEN VIERTELJAHR EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN, TITEL, INHALT, NAMEN- UND SACHREGISTER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

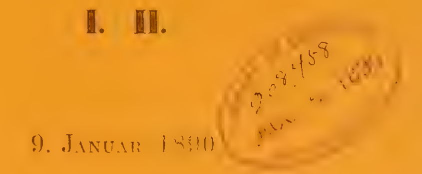
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

I. II.

9. Januar 1890.



BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN



III.

16. Januar 1890.

MIT DEM VERZEICHNISS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE
AM 1. JANUAR 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

IV.

23. Januar 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

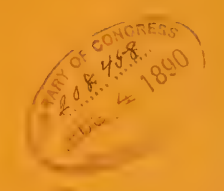
SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN



V. VI.

30. Januar 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

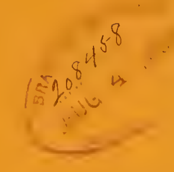
DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

VII.



6. Februar 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

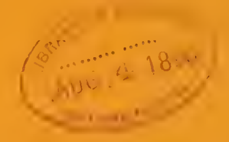
DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

VIII. IX.



13. Februar 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

X. XI. XII.

20. 27. Februar 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung**. Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.



XIII.

6. März 1890.

MIT TAFEL I.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

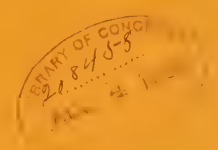
DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XIV. XV.



13. März 1890.

MIT TAFEL II UND III.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XVI.

20. März 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XVII. XVIII.

27. März 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

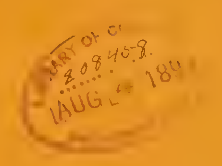
SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.



XIX.

10. April 1890.

BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

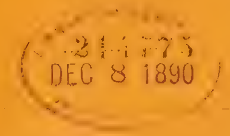
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XX. XXI.

17. April 1890.



BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XXII.

MIT TAFEL IV.

24. April 1890.

HIERBEI VERZEICHNISS DER IM ERSTEN VIERTELJAHR EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN.



BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

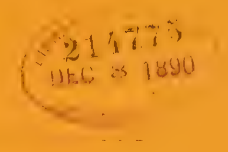
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XXIII. XXIV. XXV.

1. 8. Mai 1890.



BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

SITZUNGSBERICHTE

DER

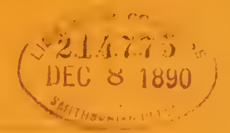
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

XXVI. XXVII.

22. Mai 1890.



BERLIN 1890.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. **Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.**

VERZEICHNISS DER »WISSENSCHAFTLICHEN MITTHEILUNGEN«

zu St. XXVI und XXVII.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1888, 1889, 1890.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berli wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Thei des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diese Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reine Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschafte in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ih fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselbe Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Rede und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in de Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften un Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicke zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftliche Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1889 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur i Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1890 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 M.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

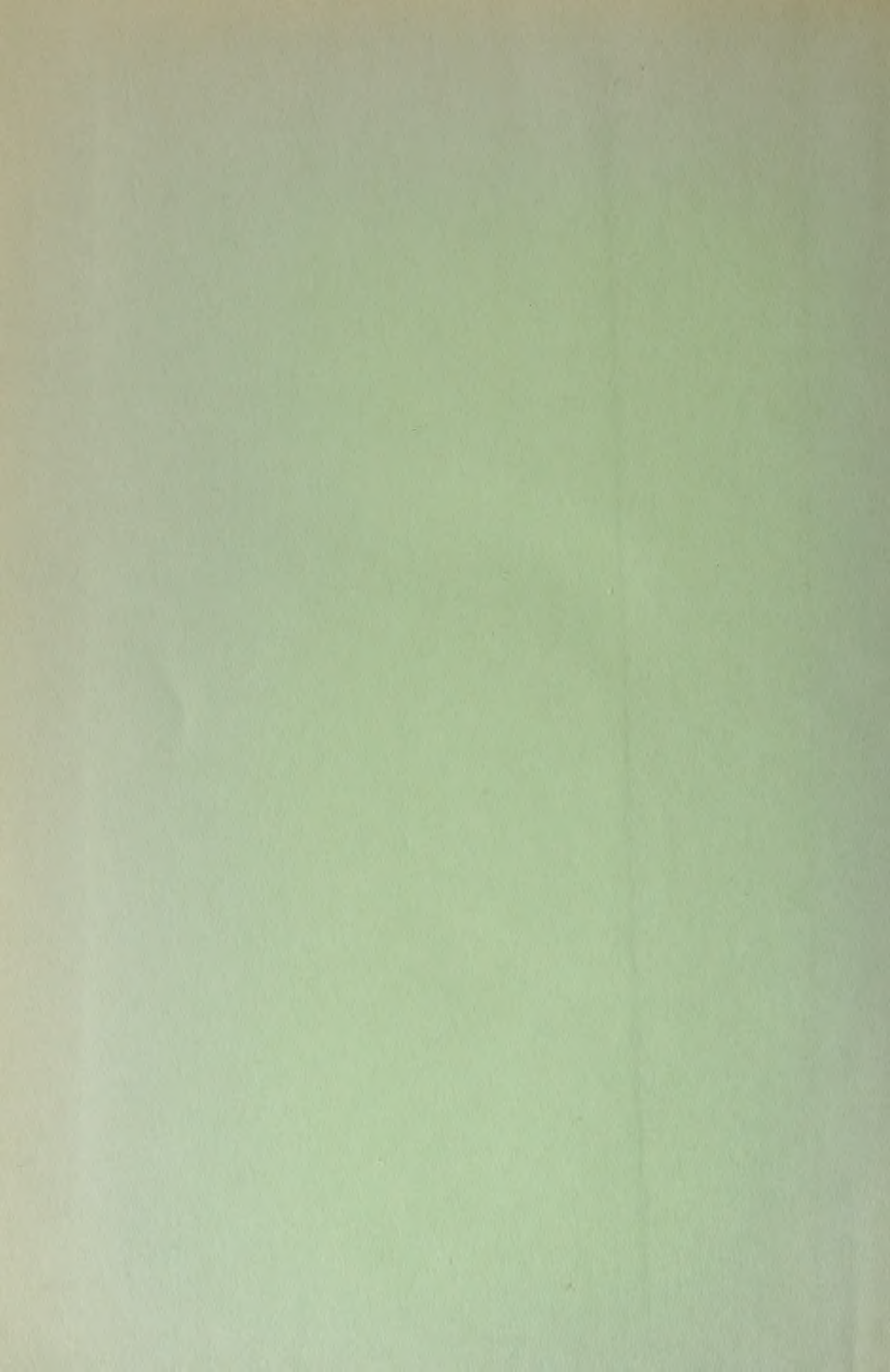
gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 M.

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsbericht oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seit der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzeln Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten zuzusende Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannt Buchhandlung in Verbindung setzen.












SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9349